ATTI

DELLA

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXLVI

1949

SERIE OTTAVA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME VI.

(1° semestre 1949)

ROMA

DOTT. GIOVANNI BARDI

TIPOGRAFO DELL'ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1949

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta dell'8 gennaio 1949

Presidenza del Socio G. CASTELNUOVO

NOTE DI SOCI

Geometria. — *Sopra una proprietà delle normali ad una superficie ed una sua parziale estensione.* Nota II (*) del Corrisp. GUIDO ASCOLI.

3. Nell'enunciato ora richiamato è implicita la soluzione della questione che ci interessa. Perchè infatti una superficie ammetta effettive deformazioni in sè (cioè non nulle) occorre e basta che essa sia applicabile sopra una superficie di rotazione; se ciò non avviene, l'unica soluzione possibile delle (6) sarà $\boldsymbol{t} = 0$, che dà $\mathbf{T} = \boldsymbol{n}$: *per una superficie* Σ *non applicabile sopra una superficie di rotazione l'unica congruenza che possiede la proprietà* (&) *è la congruenza delle normali a* Σ.

Quando invece Σ sia applicabile sopra una superficie di rotazione, ma non abbia curvatura costante, il vettore $\boldsymbol{t}$ potrà essere un qualunque vettore di modulo non superiore ad 1 diretto secondo la tangente alla deformata del parallelo e proporzionale al raggio ρ del parallelo stesso. Ad ogni scelta di $\boldsymbol{t}$ corrisponde una determinazione di $\mathbf{T}$ e quindi una congruenza; *vi sono quindi* ∞^1 *congruenze dotate della proprietà* (&). Si deduce anzi la formula

$$\sin \mathbf{T}\boldsymbol{n} = k \qquad (k \text{ costante}) \tag{8}$$

dalla quale, dando a k due valori distinti e dividendo membro a membro, risulta che *le infinite congruenze si deducono una dall'altra per rifrazione attraverso la superficie.*

Quando finalmente la superficie sia a curvatura costante, essa ammette ∞^3 deformazioni infinitesime in sè, cui corrispondono altrettante congruenze aventi la proprietà (&). Avuto riguardo ai vari modi di applicare Σ sopra una superficie di rotazione, si vede subito che le ∞^3 congruenze si distribui-

(*) Presentata nella seduta del 13 novembre 1948.

scono in ∞^2 sistemi di ∞^1 congruenze, costituite come nel caso precedente. Gli ∞^2 sistemi corrispondono agli ∞^2 sistemi di cerchi geodetici concentrici (a centro eventualmente improprio o ideale) che possono tracciarsi sulla superficie.

Si può approfondire lo studio di tali congruenze riferendosi ad un modello semplice di superficie a curvatura costante, potendosi ogni altro ricondurre ad esso per flessione, ed essendo la proprietà (6), d'altra parte, per la sua stessa definizione, invariante per flessione. Per il caso della curvatura costante positiva o negativa è naturale riferirsi alla sfera e alla pseudosfera; ma i risultati che si ottengono non sono molto espressivi. Nel caso della curvatura nulla ci si può riferire al piano, e si ottiene allora con facile calcolo il risultato seguente. Se il sistema di cerchi geodetici si riduce ad un fascio di rette parallele, la congruenza è formata di rette parallele, ed è quindi in generale una stella a centro improprio; essa può però degenerare nel fascio stesso, ogni raggio del quale sia contato infinite volte. In questo ultimo caso la flessione in una sviluppabile genera congruenze formate da tangenti alla superficie, e precisamente ad un sistema di geodetiche parallele. Se invece si parte da un sistema di cerchi concentrici, la congruenza si decompone in ∞^1 schiere rigate, situate su iperboloidi di rotazione confocali, simmetrici rispetto al piano. La costante k rappresenta la curvatura del cerchio focale.

4. Si può domandare se, oltre il caso or ora considerato, esistono altri casi in cui tra le soluzioni del problema ve n'è una formata da tangenti alla superficie Σ. La (8) dà allora $k\rho = 1$, $\rho = 1/k = \text{cost.}$; ne risulta che la congruenza può deformarsi in quella delle tangenti alle sezioni normali di un cilindro di rotazione; la superficie è sviluppabile e si ricade sul caso già segnalato.

Un'altra proprietà, pure invariante per flessione, che può ricercarsi nelle soluzioni del nostro problema è quella di essere *congruenze normali*. Tale essendo la soluzione $\mathbf{T} = \boldsymbol{n}$, valida per ogni superficie, si tratterà di vedere se possono esservene altre.

Ora la condizione di normalità della congruenza PT si identifica facilmente con l'altra che

$$\mathbf{T} \times d\mathrm{P} = \boldsymbol{t} \times d\mathrm{P} = t_1\, dx^1 + t_2\, dx^2$$

sia un differenziale esatto, ciò che porta alla condizione:

$$t_{1/2} = t_{2/1}\,,$$

che, per le (6), porta a

$$t_{1/1} = t_{1/2} = t_{2/1} = t_{2/2} = 0 \quad , \quad \boldsymbol{t}_{/1} = 0 \quad , \quad \boldsymbol{t}_{/2} = 0\,,$$

da cui segue:

$$d(\boldsymbol{t}^2) = 2\,(\boldsymbol{t} \times \boldsymbol{t}_{/1}\, dx^1 + \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{t}_{/2}\, dx^2) = 0 \quad , \quad \boldsymbol{t}^2 = \text{cost}\,.$$

Ora escluso il caso $\boldsymbol{t} = 0$, la Σ dovrà essere applicabile sopra una superficie di rotazione e varrà la costruzione del n. 3, per la quale è:

$$\boldsymbol{t}^2 = k^2 \rho^2\,.$$

Ne risulta $\rho = \text{cost.}$, cioè che Σ può deformarsi in un cilindro di rotazione; e la costruzione della congruenza mostra subito che svolgendo questo sopra un piano i raggi della congruenza divengono paralleli. Si ricade così ancora sopra un caso considerato; e si vede altresì che le traiettorie ortogonali della congruenza sono in ogni caso sviluppabili.

Si può invece stabilire che è sempre normale la congruenza generata dal raggio PT' ottenuto facendo rotare di un angolo retto il raggio PT intorno alla normale $\mathrm{P}\boldsymbol{n}$. E difatti, escluso il caso banale $\mathbf{T} = \boldsymbol{n}$, possiamo riferirci al caso di una superficie di rotazione; per essa il raggio PT' risulta contenuto nel piano del meridiano e la congruenza si genera con la rotazione di un inviluppo semplice di rette di un piano intorno ad una retta fissa del piano stesso. E con ciò si ottiene evidentemente una congruenza normale.

5. Come già si è avvertito al n. 1, si potrebbe avere una certa semplificazione nella trattazione del n. 2 assumendo un sistema di riferimento connesso con la congruenza che si ricerca. Come tale si presenta subito il sistema in cui le linee u sono definite da

$$d\mathrm{P} \times \mathbf{T} = 0$$

e le linee v sono le loro traiettorie ortogonali. Ciò però esclude il caso della congruenza delle normali, che è del resto subito esaurito.

Una trattazione estremamente semplice, che esclude però anche il caso $z = 0$, cioè di una congruenza di tangenti, da trattarsi a parte, si ha combinando la scelta indicata con il seguente artificio. Si ha l'identità:

$$\mathbf{T}_u \wedge \mathbf{T}_v \times \mathbf{T} \cdot \mathrm{P}_u \wedge \mathrm{P}_v \times \mathbf{T} = \begin{vmatrix} \mathbf{T}_u \times \mathrm{P}_u & \mathbf{T}_u \times \mathrm{P}_v & \mathbf{T}_u \times \mathbf{T} \\ \mathbf{T}_v \times \mathrm{P}_u & \mathbf{T}_v \times \mathrm{P}_v & \mathbf{T}_v \times \mathbf{T} \\ \mathbf{T} \times \mathrm{P}_u & \mathbf{T} \times \mathrm{P}_v & \mathbf{T} \times \mathbf{T} \end{vmatrix}$$

che, per essere $\mathbf{T}^2 = 1$, $\mathbf{T} \times \mathbf{T}_u = 0$, $\mathbf{T} \times \mathbf{T}_v = 0$ si riduce a

$$\mathbf{T}_u \wedge \mathbf{T}_v \times \mathbf{T} \cdot \mathrm{P}_u \wedge \mathrm{P}_v \times \mathbf{T} = \mathbf{T}_u \times \mathrm{P}_u \cdot \mathbf{T}_v \times \mathrm{P}_v - \mathbf{T}_u \times \mathrm{P}_v \cdot \mathbf{T}_v \times \mathrm{P}_u .$$

Poichè nelle ipotesi poste è $\mathrm{P}_u \wedge \mathrm{P}_v \times \mathbf{T} \neq 0$, si vede che la condizione imposta a $\mathbf{T}$ si traduce nell'altra che l'espressione

$$\Delta = \mathbf{T}_u \times \mathrm{P}_u \cdot \mathbf{T}_v \times \mathrm{P}_v - \mathbf{T}_u \times \mathrm{P}_v \cdot \mathbf{T}_v \times \mathrm{P}_u$$

sia un invariante di flessione.

Ora, posto

$$\mathbf{T} \times \mathrm{P}_v = y$$

si ottiene facilmente

$$\mathbf{T}_u \times \mathrm{P}_u = -\mathbf{T} \times \mathrm{P}_{uu} = -\mathbf{T} \times \left(\left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{matrix} \right\} \mathrm{P}_u + \left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{matrix} \right\} \mathrm{P}_v + \mathrm{D}\boldsymbol{n} \right) = -\left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{matrix} \right\} y - \mathrm{D}z$$

$$\mathbf{T}_u \times \mathrm{P}_v = y_u - \mathbf{T} \times \mathrm{P}_{uv} = y_u - \mathbf{T} \times \left(\left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & \end{matrix} \right\} \mathrm{P}_u + \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & \end{matrix} \right\} \mathrm{P}_v + \mathrm{D}'\boldsymbol{n} \right) = y_u - \left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & \end{matrix} \right\} y - \mathrm{D}'z$$

$$\mathbf{T}_v \times \mathrm{P}_u = -\left\{ \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & \end{matrix} \right\} y - \mathrm{D}'z \quad , \quad \mathbf{T}_v \times \mathrm{P}_v = y_v - \left\{ \begin{matrix} 2 & 2 \\ 2 & \end{matrix} \right\} y - \mathrm{D}''z .$$

Ne risulta per Δ l'espressione

$$\Delta = -\left[\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ & 2\end{matrix}\right\} y + D'z\right]\left[y_u - \left\{\begin{matrix}1 & 2\\ & 2\end{matrix}\right\} y - D'z\right] -$$

$$+\left[\left\{\begin{matrix}1 & 1\\ & 2\end{matrix}\right\} y + Dz\right]\left[y_v - \left\{\begin{matrix}2 & 2\\ & 2\end{matrix}\right\} y - D''z\right]$$

e basta ripetere su di essa le considerazioni del n. 2 per vedere che le condizioni di invarianza di Δ per ogni flessione di Σ sono date da:

$$y_u = 2\left\{\begin{matrix}1 & 2\\ & 2\end{matrix}\right\} y \quad , \quad y_v = \left\{\begin{matrix}2 & 2\\ & 2\end{matrix}\right\} y \quad , \quad \left\{\begin{matrix}1 & 1\\ & 2\end{matrix}\right\} = 0 .$$

Quando in queste ai simboli di Christoffel si sostituiscano i loro valori si ottiene:

$$y_u = \frac{\partial \log G}{\partial u} y \quad , \quad y_v = \frac{1}{2}\frac{\partial \log G}{\partial v} y \quad , \quad -\frac{E_v}{2G} = 0 ,$$

equazioni la cui integrazione è immediata e fornisce per l'elemento lineare di Σ la forma

$$ds^2 = E(u)\, du^2 + \frac{U^2(u)}{V^2(v)}\, dv^2$$

riducibile subito, mediante opportuni cambiamenti di variabile, all'altra

$$ds^2 = du^2 + G(u)\, dv^2$$

caratteristica delle deformate delle superficie di rotazione.

Dal calcolo risulta anche $y = G(u)$, e ciò permette di ritrovare senza difficoltà la costruzione geometrica delle congruenze richieste, nonchè le conclusioni del n. 3.

Il caso escluso $z = 0$ si tratta pure facilmente, bastando assumere, giusta l'osservazione finale del n. 1, $\mathbf{T} = P_v$. Il calcolo diretto dà:

$$\omega = \mathbf{T}_u \wedge \mathbf{T}_v \times \mathbf{T} = P_{uv} \wedge P_{vv} \times P_v = \left[\left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 1\end{matrix}\right\} D' - \left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 1\end{matrix}\right\} D''\right]\sqrt{EG}$$

e conduce alle condizioni

$$\left\{\begin{matrix}2 & 2\\ 1\end{matrix}\right\} = 0 \quad , \quad \left\{\begin{matrix}1 & 2\\ 1\end{matrix}\right\} = 0 .$$

Queste, sviluppate, dànno

$$G_u = 0 \quad , \quad E_v = 0$$

onde per il ds^2 di Σ si ha la forma:

$$ds = E(u)\, du^2 + G(v)\, dv^2,$$

caratteristica delle sviluppabili, riferite a due sistemi ortogonali di geodetiche. E ciò conferma quanto si è trovato per questo caso nel n. 4.

Geometria. — *Tessuti di curve piane e corrispondenze fra piani.* Nota (*) del Socio ENRICO BOMPIANI.

1. PREMESSA. – In questa Nota espongo alcune considerazioni geometriche sui tessuti di curve piane e ne faccio applicazioni alle corrispondenze fra due piani: mostro fra l'altro che si possono definire tre proiettività, legate all'intorno del 3° ordine di punti corrispondenti, che determinano nel modo più semplice i sei invarianti del 3° ordine di una corrispondenza.

L'estensione di queste idee alle corrispondenze fra spazî (di dimensioni > 2) deve essere lasciata ad altro lavoro.

2. PROIETTIVITÀ TANGENZIALI DI UN n–TESSUTO. – Sia dato un piano proiettivo π, ed in esso un *n–tessuto* di curve (1), cioè un sistema ∞^1 di curve tale che per un punto generico del piano passino n curve del sistema.

Siano (x, y) coordinate proiettive non omogenee di un punto del piano; e sia il tessuto definito dall'equazione differenziale del 1° ordine e di grado n

$$\sum_0^n{}_i \alpha_i(x, y)\, y'^i = 0; \tag{2.1}$$

in ogni punto $P(x, y)$ l'equazione precedente definisce gli n valori di $y' = \frac{dy}{dx}$ corrispondenti alle tangenti alle curve del tessuto.

Se ci spostiamo dal punto $P(x, y)$ al punto $P + \delta P(x + \delta x, y + \delta y)$, le tangenti $(y' + \delta y')$ alle curve del tessuto per $P + \delta P$ sono definite da

$$\sum_0^n{}_i (\partial_x \alpha_i \cdot \delta x + \partial_y \alpha_i \cdot \delta y)\, y'^i + \sum_1^n{}_i i\, \alpha_i\, y'^{i-1}\, \delta y' = 0 \tag{2.2}$$

ove $\partial_x f = \frac{\partial f}{\partial x}$, e le y' sono radici della (2.1).

Il punto d'intersezione della tangente in P relativa a un valore di y' con la tangente in $P + \delta P$ relativa ad $y' + \delta y'$ è dato da

$$\xi = x - \frac{y'\,\delta x - \delta y}{\sum_1^n{}_i (\partial_x \alpha_i \cdot \delta x + \partial_y \alpha_i \cdot \delta y)\, y'^i} \sum i\, \alpha_i\, y'^{i-1},\quad \eta = y + y'(\xi - x). \tag{2.3}$$

Queste rappresentano una proiettività fra il fascio di rette passanti per P (al variare di $\delta y/\delta x$) e la punteggiata su una determinata tangente (cioè per un determinato valore di y' radice di (2.1)) al tessuto.

Il tessuto determina una proiettività fra le rette del fascio passanti per un punto del piano e le punteggiate situate sulle tangenti al tessuto nel punto stesso.

(*) Presentata nella seduta dell'8 gennaio 1949.

(1) Sulla geometria dei tessuti si veda l'opera di W. BLASCHKE, *Geometrie der Gewebe* (Berlin, J. Springer, 1938).

Diremo queste n proiettività fra punteggiate tangenti e *fascio*, o anche delle punteggiate fra loro, *proiettività tangenziali*.

3. Tessuto associato ad un tessuto dato. – Le proiettività tangenziali relative al punto P sono legate all'intorno del 2° ordine di P sul tessuto (le tangenti in P all'intorno del 1° ordine). Equivalente ad esse è la nozione seguente. Si consideri una retta per P (cioè un valore di $\delta y/\delta x$) e la curva d'ordine $n-1$, C^{n-1}, che ha in P quella retta come tangente $(n-2)$-pla, cioè una cuspide di specie $n-3$ se $n>3$, e che passa per i punti corrispondenti nelle n proiettività tangenziali a quella retta.

L'equazione di questa curva è del tipo

$$\left\{ Y - y - \frac{\delta y}{\delta x}(X-x) \right\}^{n-2} = \sum_{p+q=n-1} a_{pq} (X-x)^p (Y-y)^q .$$

La condizione di passaggio di essa per il punto (2. 3) corrispondente nella proiettività tangenziale alla direzione $\delta y/\delta x$ sulla tangente y' si trova facilmente essere

$$\sum_0^n{}_i \left(\partial_x \alpha_i + \frac{\delta y}{\delta x} \partial_y \alpha^i \right) y'^i \left(y' - \frac{\delta y}{\delta x} \right)^{n-3} = - \sum_0^{n-1}{}_q a_{n-1-q,\,q}\, y'^q \cdot \sum_0^n{}_i i \alpha_i y'^{i-1} .$$

Se ora ri scrivono le n condizioni relative alle n tangenti distinte del tessuto in P restano individuati i coefficienti $a_{p,q}$ (il loro determinante è quello di Vandermonde delle n tangenti).

Al variare di $\frac{\delta y}{\delta x}$ si hanno ∞^1 curve C^{n-1}: e siccome le $a_{p,q}$ sono di ordine $n-2$ in $\frac{\delta y}{\delta x}$, il sistema ∞^1 delle C^{n-1} è d'ordine $n-2$ nel parametro $\delta y/\delta x$.

L'elemento cuspidale (o regolare se $n=3$) della C^{n-1} determinata dalla direzione $\delta y/\delta x$ in P è del tipo

$$Y - y = \frac{\delta y}{\delta x}(X-x) + \alpha t^{n-1} + \cdots \quad , \quad X - x = t^{n-2}$$

con

$$\alpha^{n-2} = \sum_{p+q=n-1} \alpha_{pq} \left(\frac{\delta y}{\delta x} \right)^q .$$

Si hanno perciò $n-2+n-1 = 2n-3$ rette per cui $\alpha = 0$ in un punto P. Queste definiscono quindi un $(2n-3)$-tessuto intrinsecamente determinato dall'n-tessuto dato.

4. Il caso particolare dei 3-tessuti. — Nel caso particolare dei 3-tessuti le nozioni precedenti si specificano come segue.

Per ogni punto P del piano si ha una proiettività fra le rette del fascio di centro P e le punteggiate appartenenti alle tre tangenti al tessuto in P.

La conica tangente ad una retta variabile per P *e passante per i tre punti ad essa corrispondenti nelle proiettività precedenti varia in un fascio.*

Rimane perciò definita dal 3–tessuto una trasformazione [1, 3] del piano in sè associando al punto P gli altri tre punti base del fascio: i tre punti sono covarianti proiettivi di P e del 3–tessuto (fino allo intorno del 2° ordine di P).

Ogni retta per P definisce un E_2^* (che diremo *associato* alla retta in P): quello della conica tangente alla retta in P. Ne segue che un qualsiasi E_2 per P è definito da due invarianti proiettivi: il birapporto della sua tangente con le tre tangenti del tessuto e l'invariante di contatto di E_2 con l'E_2^* che ha la stessa tangente.

La totalità degli ∞^3 E_2^* (al variare di P e della tangente) è quella degli E_2^* definiti da un'equazione differenziale del 2° ordine che è legata intrinsecamente al tessuto. Essa determina una « projective geometry of paths », e una *legge di trasporto* di elementi differenziali sia del 1° che del 2° ordine.

Infatti sia dato un E_2 con centro in P e si voglia determinare, intrinsecamente rispetto al tessuto, un E_2' in $P + \delta P$. Si costruisca anzitutto in $P + \delta P$ la retta che forma con le tre tangenti al tessuto in $P + \delta P$ lo stesso birapporto che la tangente all'E_2 dato in P forma con le tangenti in P al tessuto.

Si determini poi l'E_2 tangente a quella retta in $P + \delta P$ ed avente con l'E_2^* determinato dal tessuto in $P + \delta P$ (e con la stessa tangente) lo stesso invariante di contatto che l'E_2 dato ha con l'E_2^* del tessuto ad esso tangente in P.

5. TESSUTI DETERMINATI DA UNA CORRISPONDENZA. — Data una corrispondenza puntuale fra due piani proiettivi π e $\overline{\pi}$ esistono, com'è notissimo, tre rette per un punto P di π ai cui elementi E_2 inflessionali corrispondono pure $\overline{E}_2$ inflessionali (quindi tre rette per $\overline{P}$).

Queste tre *rette inflessionali* uscenti da un generico punto P di π (e le analoghe in $\overline{\pi}$) determinano un *3–tessuto inflessionale relativo alla corrispondenza* (in π; e così in $\overline{\pi}$).

Ogni proprietà proiettiva del 3–tessuto inflessionale è una proprietà proiettiva della corrispondenza.

In particolare: le tre proiettività tangenziali fra il fascio di rette per un punto P e le punteggiate sulle tangenti al tessuto dànno luogo a tre proiettività che diremo *inflessionali* dipendenti dall'intorno del 3° ordine della trasformazione relativo a P (e come vedremo lo caratterizzano completamente).

Ancora: per ogni punto P e per ogni tangente in esso si ha un E_2^* *associato* (dal tessuto e perciò) dalla trasformazione (al punto e alla tangente). Se in particolare cerchiamo quali sono in un punto P le rette i cui elementi associati sono di flesso troviamo *tre* di queste rette: rimane quindi definito un nuovo 3–tessuto (dipendente dalle proprietà del 3° ordine della trasformazione). E di questo (se non coincide col primo) si potrebbe approfittare (applicando di nuovo ad esso le nozioni introdotte) per esaminare le proprietà d'ordine più elevato della trasformazione.

6. PROIETTIVITÀ INFLESSIONALI RELATIVE ALL'INTORNO DEL 3° ORDINE. — Partiamo dalle equazioni

$$\overline{x} = \varphi(x, y) \quad , \quad \overline{y} = \psi(x, y) \tag{6.1}$$

della corrispondenza. L'equazione differenziale del 3-tessuto inflessionale (in cui si specifica la (2.1) per questo caso) è $\left(\text{posto per esempio } \varphi_x = \frac{\partial y}{\partial x}\right)$

$$(6.2)\quad [\varphi_y \psi_{yy}]\, y'^3 + [\varphi_x \psi_{yy} + 2\varphi_y \psi_{xy}]\, y'^2 + [\varphi_y \psi_{xx} + 2\varphi_x \psi_{xy}]\, y' + [\varphi_x \psi_{xx}] = 0$$

ove la [ ] è simbolo di *alternazione* su φ e ψ cioè per esempio

$$[\varphi_y \psi_{yy}] = \varphi_y \psi_{yy} - \psi_y \varphi_{yy}.$$

Per avere il legame, anologo alla (2.2), fra $\delta x, \delta y, y', \delta y'$ (in un punto x, y) bisogna differenziare la (6.2) col simbolo δ; e si ha

$$(6.3)\quad (\{[\varphi_{xy} \psi_{yy}] + [\varphi_y \psi_{xyy}]\}\, \delta x + [\varphi_y \psi_{yyy}]\, \delta y)\, y'^3 + (\{[\varphi_{xx} \psi_{yy}] +$$
$$+ [\varphi_x \psi_{xyy}] + 2[\varphi_y \psi_{xxy}]\}\, \delta x + \{[\varphi_{yy} \psi_{xy}] + [\varphi_x \psi_{yyy}] + 2[\varphi_y \psi_{xyy}]\}\, \delta y)\, y'^2 +$$
$$+ (\{[\varphi_{xx} \psi_{xy}] + [\varphi_y \psi_{xxx}] + 2[\varphi_x \psi_{xxy}]\}\, \delta x + \{[\varphi_{yy} \psi_{xx}] + [\varphi_y \psi_{xxy}] +$$
$$+ 2[\varphi_x \psi_{xyy}]\}\, \delta y)\, y' + ([\varphi_x \psi_{xxx}]\, \delta x + \{[\varphi_{xy} \psi_{xx}] + [\varphi_x \psi_{xxy}]\}\, \delta y) +$$
$$+ (3[\varphi_y \psi_{yy}]\, y'^2 + 2\{[\varphi_x \psi_{yy}] + 2[\varphi_y \psi_{xy}]\}\, y' + \{[\varphi_y \psi_{xx}] + 2[\varphi_x \psi_{xy}]\})\, \delta y' = 0.$$

Con il valore di $\delta y'$ fornito da questa equazione, in relazione ad una radice y' della (6.2), va calcolato il punto (ξ, η) corrispondente alla direzione $\delta y/\delta x$ per il punto (x, y) e precisamente:

$$\xi = x + \frac{y'\,\delta x - \delta y}{\delta y'} \quad , \qquad \eta = y + y'(\xi - x).$$

Riferiamoci d'ora in poi alla *forma canonica* [2] che nel caso generale si può assumere per rappresentare la corrispondenza nell'intorno di una coppia regolare $O, \overline{O}$ di punti corrispondenti:

$$(6.4)\quad \begin{cases} \bar{x} = x - xy + x(ax^2 + by^2) + y(cx^2 + dy^2) + [4] \\ \bar{y} = y - xy + y(ax^2 + by^2) + x(ex^2 + fy^2) + [4]. \end{cases}$$

Ricordiamo che per essa le direzioni inflessionali in O sono $y = 0, x = 0$, $y = x$; e che gli ulteriori elementi del riferimento proiettivo sono fissati in relazione alle direzioni d'iperosculazione di una trasformazione quadratica (le cui direzioni d'iperosculazione siano a coppie separate armonicamente da due direzioni inflessionali).

I sei coefficienti $a, \cdots, f$ sono invarianti (indipendenti) della trasformazione fino al 3° ordine.

Se si applica il procedimento indicato sopra si trova in luogo della (6.3) la seguente:

$$-(b\,\delta x + 3d\,\delta y)\, y'^3 + (\{f - 2c\}\, \delta x + b\,\delta y)\, y'^2 + (-a\,\delta x + \{2f - c\}\, \delta y)\, y'$$
$$+ 3e\,\delta x + a\,\delta y + (2y' - 1)\, \delta y' = 0.$$

(2) E. Bompiani, *Sulle trasformazioni puntuali fra piani proiettivi*, « Memorie Acc. d'Italia », vol. XIII, n. 10, pp. 837-848; equaz. (6.10) a p. 846.

Perciò le tre *proiettività inflessionali* relative al 3° ordine fra il fascio di rette $y = mx$ e le punteggiate sulle rette inflessionali sono rappresentate da:

$$(6.5)\quad \begin{cases} y = 0 \ , & x = -\dfrac{m}{3e + am} \\ x = 0 \ , & y = -\dfrac{1}{b + 3dm} \\ y = x \ , & x = \dfrac{1 - m}{(a + b - f + 2c - 3e) - (a + b - c + 2f - 3d)m}. \end{cases}$$

Esse risultano degeneri rispettivamente se $e = 0$, $d = 0$, $c - f = e - d$.

Se nessuna di esse è degenere, la proiettività risultante fra due rette inflessionali individua una conica: si hanno tre di queste coniche, e i loro punti di contatto con le rette inflessionali (su ciascuna delle quali sono già definiti l'origine, il punto unità e il punto improprio) forniscono i sei invarianti del 3° ordine della corrispondenza [3].

Per esempio la conica tangente agli assi x e y li tocca nei punti $(-1/a, o)$ $(o, -1/b)$ e quindi fornisce il significato di a e b. Analogamente per le altre due coniche.

Sempre nel caso che quelle proiettività non siano degeneri rimane definita (dall'intorno del 3° ordine della corrispondenza) una coppia di rette con la condizione che a ciascuna di esse corrispondano, nelle tre proiettività punti allineati. Riassumendo:

Le tre proiettività inflessionali relative al 3° ordine (insieme alle direzioni d'iperosculazione già ricordate) caratterizzano completamente la corrispondenza fino a tutto l'intorno del 3° ordine di una coppia di punti corrispondenti.

Ci si può servire delle proiettività trovate per caratterizzare particolari circostanze relative alle corrispondenze.

Per esempio se si vogliono caratterizzare le corrispondenze approssimate fino all'intorno del 3° ordine da una quadratica [4], basta ricordare (vedi mio lavoro citato) che una qualsiasi trasformazione quadratica osculatrice ha le equazioni

$$\bar{x} = x - xy + (v + 1)x^2 y - vxy^2 + [4]$$

$$\bar{y} = y - xy - ux^2 y + (u + 1)xy^2 + [4]$$

e affinchè queste coincidano con le (6. 4) fino all'intorno del 3° ordine occorre e basta che sia

$$a = b = 0 \quad , \quad d = e = 0 \quad , \quad c = f = 1 \quad , \quad u = v = 0.$$

(3) Un'altra interpretazione, meno semplice, di quei sei invarianti si trova nella mia Memoria citata nella Nota precedente.

(4) Vedasi anche M. VILLA, *Ricerche locali sulle trasformazioni cremoniane*, « Memorie Acc. Scienze di Bologna », ser. X, t. II° (1944-45), n. 6.

Le condizioni $d = e = c - f = 0$ esprimono che le direzioni inflessionali, sono iperinflessionali, o, come s'è osservato che le tre proiettività inflessionali sono degeneri: le rimanenti condizioni esprimono che i tre punti corrispondenti nelle proiettività degeneri sulle rette inflessionali alle rette del fascio per O sono i punti base della rete omaloidica relativa alla trasformazione quadratica, punti che così vengono determinati.

7. Tessuto associato al 3-tessuto inflessionale. — Determiniamo infine l'elemento associato E_2^* ad una tangente in O (n. 4).

La conica tangente in O alla retta $y = mx$ e passante per i punti a questa corrispondenti nelle proiettività (6. 5) ha l'equazione

$$y - 3ex^2 - (a + 2b + 2c - f - 6e)xy + by^2 =$$
$$= m\{x + ax^2 - (2a + b - c + 2f - 6d)xy - 3dy^2\}$$

quindi l'E_2^* *associato* (dall'intorno del 3° ordine della trasformazione) al punto O e alla retta $y = mx$ è dato da

$$y = mx + \{3e + (2a + 2b + 2c - 6e - f)m - (2a + 2b - c + 2f - 6d)m^2 - 3dm^3\}x^2.$$

In particolare l'E_2^* associato alla direzione inflessionale $y = 0$ è

$$y = 3ex^2;$$

mentre l'E_2 della curva del tessuto inflessionale con quella tangente è

$$y = \frac{3}{2}ex^2;$$

da ciò si ricava che:

L'invariante di contatto in un punto fra un E_2 *del tesssuto inflessionale e l'*E_2^* *associato dal tessuto alla sua tangente è* $= 2$.

Le tre direzioni in O cui sono associati E_2^* di flesso sono date da

$$3ex^3 + (2a + 2b + 2c - 6e - f)x^2y - (2a + 2b - c + 2f - 6d)xy^2 - 3dy^3 = 0;$$

esse definiscono un *nuovo* 3-tessuto: i birapporti delle sue rette con quelle inflessionali forniscono tre degli invarianti del 3° ordine.

In particolare se queste tre direzioni coincidono con quelle inflessionali, e solo allora, $e = d = 0$, $c = f$, cioè le proietività inflessionali sono degeneri in O.

Equazioni differenziali. — *Valutazione asintotica degli integrali dell'equazione di Liénard che per* $t \to -\infty$ *tendono allo zero.* Nota (*) del Corrisp. GIOVANNI SANSONE.

1. Dell'equazione di Liénard

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \omega f(i) \frac{di}{dt} + \omega^2 i = 0 , \qquad [\omega > 0 \ , \ \omega = \text{cost.}] , \tag{1}$$

sia $f(i)$ *continua in* $(-\infty, +\infty)$, *e soddisfi le condizioni*

$$f(i) \geqq 0 \ \textit{per} \ |i| \geqq \Delta > 0 \ , \quad f(i) \leqq -\lambda < 0 \ \textit{per} \ |i| \leqq \delta , \ (\delta > 0) , \tag{2}$$

ipotesi queste che assicurano che un qualsiasi integrale $i(t)$ della (1), determinato dalle condizioni iniziali

$$i(t_0) = i_0 \quad , \quad i'(t_0) = i'_0 \quad , \quad [i_0^2 + i_0'^2 > 0] ,$$

ha per campo di esistenza $(t_0, +\infty)$, ed è oscillatorio (1).

Ammettiamo che un tale integrale $i(t)$ abbia per campo di esistenza $(-\infty, +\infty)$, e soddisfi la condizione

$$\lim_{t \to -\infty} i(t) = 0 , \tag{3}$$

e si voglia determinare il suo comportamento asintotico per $t \to -\infty$.

È quasi naturale pensare che tale comportamento debba coincidere con quello degli integrali dell'equazioni

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega f(0) \frac{du}{dt} + \omega^2 u = 0 , \tag{4}$$

e noi ce ne accerteremo nei due casi $f(0) < -2$, $-2 < f(0) < 0$ (2).

2. *a*) Sia

$$f(0) < -2 , \tag{5}$$

e si indichino con α e β le radici dell'equazione caratteristica della (4)

$$\beta = \omega \left[-f(0) + \sqrt{f^2(0) - 4} \right] / 2 \quad , \quad \alpha = \omega \left[-f(0) - \sqrt{f^2(0) - 4} \right] / 2 ;$$

un qualunque integrale della (4) ha la forma

$$u(t) = c_1 e^{\alpha t} + c_2 e^{\beta t} ,$$

con c_1 e c_2 costanti.

(*) Presentata nella seduta dell'8 gennaio 1949.

(1) Questa proprietà è dimostrata in un lavoro dell'A. in corso di pubblicazione.

(2) Questa proprietà è affermata, ma non dimostrata, nella Memoria di A. LIÉNARD, *Étude des oscillations entretenues.* « Revue Général de l'Électricité », *23* (pp. 901-912), p. 903. 2ª col. (1928).

Dalla (1) sottraendo la (4) si ottiene

$$\frac{d^2(i-u)}{dt^2} + \omega f(0)\frac{d(i-u)}{dt} + \omega^2(i-u) = \omega[f(0) - f(i)]\frac{di}{dt},$$

e il metodo di Lagrange, applicato a questa equazione, fornisce per $i(t)$ l'equazione integrale

$$(6)\quad i(t) = c_1 e^{\alpha t} + c_2 e^{\beta t} + \frac{\omega}{\beta - \alpha}\int_t^{t_0} \{f[i(\xi)] - f(0)\}[e^{\beta(t-\xi)} - e^{\alpha(t-\xi)}]\, i'(\xi)\, d\xi,$$

dove le costanti c_1 e c_2 hanno l'espressione

$$(7)\quad c_1 = (\beta i_0 - i_0')\, e^{-\alpha t_0}/(\beta - \alpha) \quad , \quad c_2 = (i_0' - \alpha i_0)\, e^{-\beta t_0}/(\beta - \alpha)\ ^{(3)}.$$

Posto

$$(8_1)\qquad \varkappa(t, \xi) = \omega[\beta e^{\beta(t-\xi)} - \alpha e^{\alpha(t-\xi)}]/(\beta - \alpha),$$

$$(8_2)\qquad \varphi(\xi) = f[i(\xi)] - f(0)$$

e derivando la (6) rispetto a t otteniamo per $i'(t)$ l'equazione integrale

$$(9)\qquad i'(t) = c_1 \alpha e^{\alpha t} + c_2 \beta e^{\beta t} + \int_t^{t_0} \varkappa(t, \xi)\, \varphi(\xi)\, i'(\xi)\, d\xi, \qquad (t < t_0),$$

che ci permetterà di ricavare l'espressione asintotica di $i'(t)$ quando $t \to -\infty$, e conseguentemente quella di $i(t)$.

Ora l'equazione integrale di seconda specie di Volterra

$$\theta(t) = f(t) + \int_t^{t_0} \varkappa(t, \xi)\, \varphi(\xi)\, \theta(\xi)\, d\xi,$$

posto

$$(10_1)\qquad \varkappa_1(t, \xi) = \varkappa(t, \xi)$$

$$(10_2)\qquad \varkappa_n(t, \xi) = \int_t^{\xi} \varkappa_{n-1}(t, \xi_1)\, \varkappa(\xi_1, \xi)\, \varphi(\xi_1)\, d\xi_1, \qquad (n = 2, 3, \cdots),$$

$$(10_3)\qquad \Gamma(t, \xi) = \varkappa_1(t, \xi) + \varkappa_2(t, \xi) + \cdots + \varkappa_n(t, \xi) + \cdots,$$

ha la soluzione

$$\theta(t) = f(t) + \int_t^{t_0} \Gamma(t, \xi)\, \varphi(\xi)\, f(\xi)\, d\xi,$$

e dalla (9) otteniamo quindi

$$(11)\qquad i'(t) = c_1 \alpha e^{\alpha t} + c_2 \beta e^{\beta t} + \int_t^{t_0} \Gamma(t, \xi)\, \varphi(\xi)\, [c_1 \alpha e^{\alpha \xi} + c_2 \beta e^{\beta \xi}]\, d\xi,$$

(3) Poichè nei coefficienti dell'equazione (1) non compare esplicitamente t, per lo studio asintotico di $i(t)$ si può supporre che nelle (7) t_0 abbia un valore prefissato arbitrario.

e da questa, tenuto conto delle (8_1), (8_2), (10_1), (10_2), (10_3), otterremo la cercata limitazione per $i'(t)$.

Essendo per ipotesi $\lim_{t\to-\infty} i(t) = 0$, fissato $\tau > 0$, $0 < \tau < \alpha$, si prenda τ_1 in guisa che $0 < \tau_1 < \tau$, ed $\varepsilon > 0$ tale che

$$\varepsilon\omega(\beta+\alpha)/(\beta-\alpha) < \tau_1 ; \tag{12}$$

e si determini un $\bar{t}_0$ tale che per qualunque coppia $\xi, t_0, \xi \leq t_0 < \bar{t}_0$ risulti

$$|\varphi(\xi)| = |f(i(\xi)) - f(0)| < \varepsilon . \tag{13}$$

Dalle (8_1), (10_1) tenuto conto che $\beta > \alpha > 0$, $t - \xi < 0$, abbiamo

$$|\chi_1(t,\xi)| \leq [\omega(\beta+\alpha)/(\beta-\alpha)]\, e^{\alpha(t-\xi)},$$

e da questa, dalla (10_2) e dalla (13)

$$|\chi_2(t,\xi)| \leq \varepsilon[\omega(\beta+\alpha)/(\beta-\alpha)]^2 e^{\alpha(t-\xi)} \frac{(\xi-t)}{1!},$$

e per induzione

$$|\chi_{n+1}(t,\xi)| \leq \varepsilon^n [\omega(\beta+\alpha)/(\beta-\alpha)]^{n+1} e^{\alpha(t-\xi)} \frac{(\xi-t)^n}{n!},$$

e per la (10_3)

$$|\Gamma(t,\xi)| \leq \omega \frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha} e^{\alpha(t-\xi)} e^{\varepsilon[\omega(\beta+\alpha)/(\beta-\alpha)](\xi-t)},$$

e si ha allora

$$\left| \int_t^{t_0} \Gamma(t,\xi)\varphi(\xi)[c_1\alpha e^{\alpha\xi} + c_2\beta e^{\beta\xi}]\, d\xi \right| \leq$$

$$\leq \varepsilon\omega \cdot \frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha} e^{[\alpha-\varepsilon\omega(\beta+\alpha)/(\beta-\alpha)]t} \int_t^{t_0} e^{\varepsilon[\omega(\beta-\alpha)/(\beta-\alpha)]\xi} [\,|c_1|\alpha + |c_2|\beta e^{(\beta-\alpha)\xi}]\, d\xi .$$

Senza alterare le generalità possiamo supporre $t_0 < 0$, perciò $e^{(\beta-\alpha)\xi} < 1$; è pure

$$0 \leq \varepsilon\omega \frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha} \int_t^{t_0} e^{\varepsilon[\omega(\beta+\alpha)/(\beta-\alpha)]\xi}\, d\xi < e^{\varepsilon[\omega(\beta+\alpha)/(\beta-\alpha)]t_0}$$

e perciò per la (12)

$$\left| \int_t^{t_0} \Gamma(t,\xi)\varphi(\xi)[c_1\alpha e^{\alpha\xi} + c_2\beta e^{\beta\xi}]\, d\xi \right| < [\,|c_1|\alpha + |c_2|\beta]\, e^{(\alpha-\tau_1)t},$$

e la (11) dà allora

$$|i'(t)| \leq 2[\,|c_1|\alpha + |c_2|\beta]\, e^{(\alpha-\tau_1)t},$$

e poichè per le (7), c_1 e c_2 dipendono unicamente da t_0, ed è $\tau_1 < \tau$, concludiamo che *se* $i(t)$ *è un integrale dell'equazione* (1) *definito in* $(-\infty, +\infty)$, *che soddisfa la condizione*

$$\lim_{t\to-\infty} i(t) = 0, \tag{3}$$

ed è

$$f(0) < -2\,, \tag{5}$$

allora comunque si fissi un numero positivo $\tau < \alpha$, *esiste un* t_0^* *tale che per* $t \leq t_0^*$ *risulti*

$$|i'(t)| < e^{(\alpha-\tau)t} \quad , \quad [t \leq t_0^*]. \tag{14_1}$$

Si ha pure per $\bar{t} < t \leq t_0^*$

$$|i(t) - i(t)| = \left| \int_{\bar{t}}^{t} i'(\xi)\, d\xi \right| \leq \int_{\bar{t}}^{t} e^{(\alpha-\tau)\xi}\, d\xi = \frac{e^{(\alpha-\tau)t} - e^{(\alpha-\tau)\bar{t}}}{\alpha - \tau},$$

dalla quale facendo tendere $\bar{t} \to -\infty$ si ha per la (3)

$$|i(t)| \leq e^{(\alpha-\tau)t}/(\alpha - \tau), \tag{14_2}$$

e le (14_2), (14_1) forniscono il cercato comportamento asintotico di $i(t)$ e $i'(t)$ per $t \to -\infty$.

b) Supponiamo che $f(i)$ *soddisfi nel punto* o *una condizione di Lipschitz di ordine* $s > 0$,

$$|f(i) - f(0)| < L\,|i|^s \quad , \quad (L = \text{cost.}\,,\ 0 < s \leq 1), \tag{15}$$

e fissato un numero positivo τ tale che $\tau < s\alpha/(\alpha + 1)$, si determini un t_0^* in modo che per $t \leq t_0^*$ risulti

$$|i(t)| < e^{(\alpha-\tau)t}/(\alpha - \tau) \quad , \quad |i'(t)| < e^{(\alpha-\tau)t}.$$

Dalla (6) per ogni coppia di valori $t, t_0, t < t_0 < t_0^*$ si ottiene

$$|i(t) - c_1 e^{\alpha t} - c_2 e^{\beta t}| \leq \frac{\omega L}{(\beta - \alpha)(\alpha - \tau)^s}\, e^{\alpha t} \int_{t}^{t_0} e^{(\alpha-\tau)s\xi} e^{-\tau\xi} \left[1 + e^{(\beta-\alpha)(t-\xi)}\right] d\xi,$$

ossia

$$|i(t) - c_1 e^{\alpha t} - c_2 e^{\beta t}| \leq \frac{2\,\omega L}{(\beta - \alpha)(\alpha - \tau)^s}\, e^{\alpha t} \int_{t}^{t_0} e^{[\alpha s - \tau(s+1)]\xi}\, d\xi$$

$$\leq \frac{2\,\omega L}{(\beta - \alpha)(\alpha - \tau)^s [\alpha s - \tau(s+1)]}\, e^{\alpha t} e^{[\alpha s - \tau(s+1)]t_0},$$

quindi tenuto conto delle (7), se $c_1 \neq 0$, poichè per t_0 negativo e in valore assoluto sufficientemente grande il fattore $e^{[\alpha s - \tau(s+1)]t_0}$ è infinitesimo, e il fattore $e^{-\alpha t_0}$ che figura nella (7) è maggiore di 1, ne segue che *se* $t \to -\infty$ *l'integrale* $i(t)$, *e anche* $i'(t)$ *per la* (9), *diventa definitivamente diverso da zero.*

Siccome per lo studio asintotico dell'integrale $i(t)$ ci si può sempre riferire ad una coppia di valori i_0, i_0' per i quali riesca $c_1 \neq 0$, o ciò che è lo stesso $i_0' \neq \beta i_0$, perchè ove si avesse sempre $i'(t) = \beta i(t)$ ne verrebbe

$$\omega\,[f(i) - f(0)]\,[di/dt] = 0 \quad , \quad f(i) = f(0),$$

e ciò non può essere, concludiamo che *se* $i(t)$ *è un integrale della* (1) *per cui vale la* (3), *ed* $f(i)$ *verifica le* (5) *e* (15), *allora l'integrale* $i(t)$ *per* $t \to -\infty$ *diventa*

definitivamente diverso da zero, e fissato t_0, *esiste una costante* M *tale che per* $t \leq t_0$ *risulta*

$$(10) \qquad |i(t)| \leq Me^{\alpha t} \quad , \quad |i'(t)| \leq Me^{\alpha t},$$

limitazioni quest'ultime che migliorano le (14_1), (14_2).

3. *a*) Ferme restando per $f(i)$ ed $i(t)$ le ipotesi del n. 1 si abbia

$$(17) \qquad -2 < f(0) < 0 .$$

L'equazione (4) ammette l'integrale generale

$$u(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + c_2 e^{\alpha t} \operatorname{sen} \beta t \quad , \quad (c_1, c_2 \text{ costanti}),$$

con

$$(18) \qquad \alpha = -\omega f(0)/2 \quad , \quad \beta = \omega \sqrt{4 - f^2(0)}/2 ,$$

e l'integrale $i(t)$ soddisfa l'equazione

$$(19) \qquad i(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + c_2 e^{\alpha} \operatorname{sen} \beta t -$$

$$- \frac{\omega}{\beta} \int_t^{t_0} e^{\alpha (t-\xi)} [f(0) - f(i(\xi))] \operatorname{sen} \beta (t-\xi)\, i'(\xi)\, d\xi ,$$

dove c_1 e c_2 hanno l'espressione

$$c_1 = \frac{1}{\beta} e^{-\alpha t_0} \begin{vmatrix} i_0 & , & \operatorname{sen} \beta t_0 \\ i'_0 & , & \alpha \operatorname{sen} \beta t_0 + \beta \cos \beta t_0 \end{vmatrix} ,$$

$$c_2 = \frac{1}{\beta} e^{-\alpha t_0} \begin{vmatrix} \cos \beta t_0 & , & i_0 \\ \alpha \cos \beta t_0 - \beta \operatorname{sen} \beta t_0 & , & i'_0 \end{vmatrix} ,$$

e poichè i_0 e i'_0 non sono simultaneamente nulli, risulta

$$(20) \qquad c_1^2 + c_2^2 = e^{-2\alpha t_0} [(i'_0 - \alpha i_0)^2 + \beta^2 i_0^2]/\beta^2 \neq 0 .$$

Si ha

$$i'(t) = (c_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + c_2 e^{\alpha t} \operatorname{sen} \beta t)' +$$

$$+ \frac{\omega}{\beta} \int_t^{t_0} e^{\alpha (t-\xi)} [f(i(\xi)) - f(0)] [\alpha \operatorname{sen} \beta (t-\xi) + \beta \cos \beta (t-\xi)]\, i'(\xi)\, d\xi ,$$

e posto

$$\varkappa(t, \xi) = \omega e^{\alpha (t-\xi)} [\alpha \operatorname{sen} \beta (t-\xi) + \beta \cos \beta (t-\xi)] \ , \ \varphi(\xi) = f(i(\xi)) - f(0),$$

si usino le stesse notazioni del n. 2, *a*).

Sia $\tau > 0$ e arbitrario, si prenda $0 < \tau_1 < \tau$, si scelga $\varepsilon > 0$ tale che $\varepsilon \omega \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}/\beta < \tau_1$, e si determini $\bar{t}_0 < 0$ così grande in valore assoluto che ogni coppia $\xi, t_0, \xi \leq t_0 < \bar{t}_0$, risulti $|\varphi(\xi)| < \varepsilon$.

Si avrà allora

$$|\varkappa_n(t, \xi)| \leq \varepsilon^{n-1} \left[\frac{\omega}{\beta} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \right]^n e^{\alpha (t-\xi)} \frac{(\xi - t)^{n-1}}{(n-1)!} ,$$

$$\Gamma(t, \xi) \leq \omega \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\, e^{\alpha (t-\xi)}\, e^{\varepsilon [\omega \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\, |\xi - t|}} ,$$

$$i'(t) \leq \sqrt{(c_1 \alpha + c_2 \beta)^2 + (c_2 \alpha - c_1 \beta)^2}\, e^{(\alpha - \tau_1) t}\, e^{(\tau_1 + \varepsilon [\omega \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\, |\xi - t|}} ,$$

perciò *per ogni integrale* $i(t)$ *dell'equazione* (1), *che soddisfa la* (3), *fissato* $\tau > 0$, $0 < \tau < \alpha$, *si può corrispondentemente trovare un* t_0^* *tale che per ogni* $t \leq t_0^*$ *risulti*

$$(21_1) \qquad |i'(t)| < e^{(\alpha-\tau)t} \quad , \qquad (21_2) \quad |i(t)| < e^{(\alpha-\tau)t}/(\alpha-\tau) .$$

b) Supponiamo che nel punto 0, $f(i)$ soddisfi la condizione di Lipschitz di ordine s, (15); scelti allora τ in guisa che $\alpha s - \tau(s+1) > 0$, dalle (19), (21$_1$) per ogni coppia di valori $t, t_0, t < t_0 < t_0^*$ si ha:

$$|i(t) - c_1 e^{\alpha t} \cos \beta t - c_2 e^{\alpha t} \operatorname{sen} \beta t| \leq \frac{L\omega}{\beta} \int_t^{t_0} e^{\alpha(t-\xi)} \frac{e^{(\alpha-\tau)\xi s}}{(\alpha-\tau)^s} e^{(\alpha-\tau)\xi} d\xi$$

$$\leq L \frac{\omega}{\beta(\alpha-\tau)^s} e^{\alpha t} \int_t^{t_0} e^{[\alpha s - \tau(s+1)]\xi} d\xi \leq \frac{L\omega}{\beta(\alpha-\tau)^s [\alpha s - \tau(s+1)]} e^{\alpha t} e^{[\alpha s - \tau(s+1)]t_0} ,$$

e tenuto conto della (20), poichè per t_0 negativo e in valore assoluto sufficientemente grande il fattore $e^{[\alpha s - \tau(s+1)]t_0}$ è infinitesimo, ed è anche $e^{-2\alpha t_0} > 1$, ne viene che $i(t)$ *per* $t \to -\infty$ *è oscillante, ed ha la rappresentazione analitica*

$$i(t) = e^{\alpha t}[A \operatorname{sen}(\beta t + l) + \mu\theta(t)] , \qquad (t \leq t_0),$$

con A, μ, L *costanti,* $0 < \mu < A$, $|\theta(t)| < 1$.

Meccanica. — *Discontinuità sul fronte d'onda delle azioni gravitazionali.* Nota (*) del Corrisp. Bruno Finzi.

Le varietà caratteristiche delle equazioni gravitazionali einsteiniane furono determinate con procedimento diretto da Levi-Civita in due Note dell'Accademia dei Lincei (1). Tali caratteristiche sono ipersuperficie, a tre dimensioni, del continuo riemanniano quadridimensionale costituente lo spazio-tempo. Ad esse corrisponde nello spazio geometrico tridimensionale una propagazione ondosa, in cui le superficie d'onda avanzano normalmente con la velocità della luce. Si ha in tal modo conferma del seguente principio basilare nella teoria della relatività: le azioni gravitazionali si propagano con la velocità della luce (2).

La ricerca di Levi-Civita comporta una laboriosissima discussione sulla caratteristica algebrica della matrice di un sistema di dieci equazioni lineari in dieci incognite, sistema che non viene esplicitamente risolto, forse perchè una svista, consistente nell'omissione di un fattore 2 (3) fa perdere una semplificazione.

L'importanza dell'argomento mi induce a riprendere, rendendola molto più agile, la magistrale ricerca del Levi-Civita: ottenuto il sistema lineare traducente

(*) Presentata nella seduta dell'8 gennaio 1949.

(1) T. Levi-Civita, *Caratteristiche e bicaratteristiche delle equazioni gravitazionali di Einstein*. «Rend. Lincei», vol. XI, pp. 3-11, 113-121 (1930).

(2) A. Einstein, «Sitz. d. preuss. Akad. d. Wiss.», p. 688 (1916); *Ueber Gravitationswellen*. «Sitz. d. preuss. Akad. d. Wiss.», p. 154 (1918).

(3) Nella formula (15) di Levi-Civita (loco citato) il fattore $\{p_i p_k - Hg_{ik}\}$ deve essere sostituito dal fattore $\{p_i p_k - 2Hg_{ik}\}$.

le condizioni a cui debbono soddisfare le discontinuità gravitazionali attraverso generiche ipersuperficie dello spazio–tempo, risolvo esplicitamente tale sistema mediante un opportuno cambiamento di variabili; ovvia ne risulta così la sua discussione, ed immediata la determinazione delle varietà caratteristiche delle equazioni gravitazionali einsteiniane. Ne segue facilmente la determinazione delle discontinuità sul fronte d'onda secondo il quale si propagano le azioni gravitazionali.

1. PROPAGAZIONE DELLE AZIONI GRAVITAZIONALI. – Siano $x^0\ x^1\ x^2\ x^3$ le coordinate generali di un evento elementare. Se la costante c rappresenta la velocità della luce nel vuoto, rispetto ad un osservatore solidale col cielo delle stelle fisse, che si vale di un orologio normale, poniamo $x^0 = ct$ ed interpretiamo x^0 come coordinata temporale. Interpretiamo invece $x^1\ x^2\ x^3$ come coordinate spaziali. Lo spazio–tempo nei fenomeni gravitazionali è un continuo riemanniano quadridimensionale, completamente individuato dalla seguente forma differenziale quadratica che ne costituisce la metrica:

$$(1) \qquad ds^2 = g_{pq}\, dx^p\, dx^q \ (4).$$

È sempre possibile scegliere il riferimento in modo tale da dare alla (1) la forma seguente:

$$(1') \qquad ds^2 = V^2\, dt^2 - dl^2, \quad \text{essendo} \quad dl^2 = \sum_1^3{}_{ik}\, a_{ik}\, dx^i\, dx^k.$$

Nella (1′) V rappresenta la velocità della luce (variabile in generale da posto a posto e da istante ad istante) e $dl^2 > 0$ il quadrato della distanza fra due punti infinitamente vicini dello spazio geometrico tridimensionale.

Consideriamo nello spazio–tempo le ipersuperficie Σ, di equazione

$$(2) \qquad \tau\,(x^0\ x^1\ x^2\ x^3) = \text{cost.},$$

le quali lo dividono in due regioni diversamente incurvate dalla materia e dall'energia presenti. Alle precedenti ipersuperficie dello spazio–tempo corrispondono nello spazio geometrico tridimensionale, di metrica $dl^2 = \sum_1^3{}_{ik}\, a_{ik}\, dx^i\, dx^k$, delle superficie mobili σ che hanno equazione (2) e che dividono in ogni istante lo spazio in due regioni diversamente perturbate da azioni gravitazionali. Le ipersuperficie Σ dello spazio–tempo e le superficie σ dello spazio geometrico siano luoghi di discontinuità.

Qualora il sistema differenziale che regge i fenomeni gravitazionali fosse normale, un'ipersuperficie generica dello spazio–tempo sarebbe di continuità, e non potrebbe fungere da ipersuperficie Σ di discontinuità: tale compito potrebbe riserbarsi soltanto ad alcune particolari ipersuperficie costituenti le varietà caratteristiche. Ma, come vedremo, il sistema differenziale precedente non è normale,

(4) In questa formula e nelle successive è sottinteso il segno di sommatoria da 0 a 3, in cui si saturano indici di covarianza (posti in basso) con indici di controvarianza (posti in alto).

e quindi sono ammissibili discontinuità anche attraverso ipersuperficie generiche dello spazio–tempo. Fra di esse ve ne sono però alcune particolari che concedono discontinuità più late delle altre: queste sono le varietà caratteristiche, ed è precisamente ad esse che corrisponde nello spazio geometrico il propagarsi per fronti d'onda delle azioni gravitazionali.

Posta nella forma (2) l'equazione di uno di tali fronti d'onda, la velocità u con la quale questo avanza normalmente, con la quale cioè si propagano le azioni gravitazionali, è [5]:

$$(3) \qquad u = \frac{\left|\frac{\partial \tau}{\partial t}\right|}{\sqrt{\sum_{ik}^{3} a^{ik}\, \tau_{/i}\, \tau_{/k}}} \quad [6].$$

2. Discontinuità gravitazionali. – Le equazioni gravitazionali, che stabiliscono il legame fra il tensore fondamentale g_{pq}, che compare nella (1), e il tensore energetico T_{pq}, corrispondente alla distribuzione di materia nello spazio e nel tempo, sono le seguenti:

$$(4) \qquad G_{pq} - \frac{1}{2} G g_{pq} + \chi T_{pq} = 0 \qquad (p, q = 0, 1, 2, 3),$$

dove χ è la costante universale di gravitazione nella teoria einsteiniana, G_{pq} è il tensore di Riemann contratto

$$G_{pq} = g^{lh} R_{plhq} \qquad (p, q = 0, 1, 2, 3)$$

e $G = g^{pq} G_{pq}$ ne è l'invariante lineare. I tensori g_{pq}, G_{pq}, T_{pq} sono doppi simmetrici, individuati quindi nello spazio–tempo (dove $p, q = 0, 1, 2, 3$) da dieci componenti distinte.

Moltiplicando ambo i membri della (4) per g^{pq} e sommando rispetto ad entrambi gli indici da 0 a 3, osservando che $g^{pq} g_{pq} = 4$, ricordando che l'invariante lineare del tensore energetico è eguale al prodotto di c^2 per la densità k in condizione di riposo della materia, si ha:

$$G = \chi c^2 k.$$

La (4) diviene perciò:

$$(5) \qquad G_{pq} - \frac{1}{2} \chi c^2 k g_{pq} + \chi T_{pq} = 0 \qquad (p, q = 0, 1, 2, 3).$$

Poichè le componenti R_{plhq} del tensore di Riemann sono costruite con le componenti del tensore fondamentale e con le loro derivate ordinarie prime e seconde, le (5) costituiscono dieci equazioni alle derivate parziali di secondo ordine nelle dieci componenti del tensore fondamentale.

Consideriamo un'ipersuperficie di discontinuità Σ. Attraverso ad essa potremo ritenere continue le componenti g_{pq} del tensore fondamentale cronotopico, le loro

(5) Cfr. T. Levi–Civita, *Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa*. Bologna, pp. 33-34 (1931).

(6) In questa formula e nelle successive gli indici di derivazione tensoriale sono preceduti da una lineetta inclinata.

derivate ordinarie prime, e quindi i simboli di Christoffel $\{ph, l\}$, nonchè la densità k e le varie componenti del tensore energetico T_{pq}. Discontinue dovranno invece ritenersi le derivate seconde ordinarie delle componenti del tensore fondamentale, e discontinue quindi, *a priori*, le componenti R_{plhq} del tensore di Riemann e quelle G_{pq} del tensore di Riemann contratto.

Se la lettera Δ premessa ad un simbolo indica la discontinuità attraverso Σ della quantità rappresentata da tale simbolo, si ha:

$$\Delta G_{pq} = g^{lh}\,\Delta R_{plhq} = g^{lh}\left[\Delta\frac{\partial}{\partial x^q}\{ph, l\} - \Delta\frac{\partial}{\partial x^h}\{pq, l\}\right] =$$

$$= \frac{g^{lh}}{2}\left[\Delta\frac{\partial^2 g_{pl}}{\partial x^h\,\partial x^q} + \Delta\frac{\partial^2 g_{hl}}{\partial x^p\,\partial x^q} - \Delta\frac{\partial^2 g_{ph}}{\partial x^l\,\partial x^q} - \Delta\frac{\partial^2 g_{pl}}{\partial x^q\,\partial x^h} - \Delta\frac{\partial^2 g_{ql}}{\partial x^p\,\partial x^h} + \Delta\frac{\partial^2 g_{pq}}{\partial x^l\,\partial x^h}\right] =$$

$$= \frac{g^{lh}}{2}\left[\Delta\frac{\partial^2 g_{pq}}{\partial x^l\,\partial x^h} + \Delta\frac{\partial^2 g_{hl}}{\partial x^p\,\partial x^q} - \Delta\frac{\partial^2 g_{ph}}{\partial x^l\,\partial x^q} - \Delta\frac{\partial^2 g_{ql}}{\partial x^p\,\partial x^h}\right].$$

Ma, scrivendo la (5) da una banda e dall'altra di Σ, e facendo la differenza fra le due relazioni così ottenute, si ricava:

$$\Delta G_{pq} = 0,$$

e quindi

$$(6) \qquad g^{lh}\left[\Delta\frac{\partial^2 g_{pq}}{\partial x^l\,\partial x^h} + \Delta\frac{\partial^2 g_{hl}}{\partial x^p\,\partial x^q} - \Delta\frac{\partial^2 g_{ph}}{\partial x^l\,\partial x^q} - \Delta\frac{\partial^2 g_{ql}}{\partial x^p\,\partial x^h}\right] = 0.$$

Osserviamo ora che semplici considerazioni di carattere geometrico impongono alle discontinuità attraverso Σ delle derivate seconde delle componenti del tensore fondamentale di verificare le seguenti relazioni:

$$(7) \qquad \Delta\frac{\partial^2 g_{pq}}{\partial x^l\,\partial x^h} = \lambda_{pq}\,\tau_{/l}\,\tau_{/h} \qquad (p, q, l, h = 0, 1, 2, 3),$$

essendo $\lambda_{pq} = \lambda_{qp}$ $(p, q, = 0, 1, 2, 3)$ dieci moltiplicatori *a priori* arbitrari [7]. Noti i λ_{pq}, la (7) dà le discontinuità attraverso Σ.

Ponendo le (7) nelle (6), riconosciamo che i dieci moltiplicatori λ_{pq} debbono soddisfare alle seguenti dieci equazioni lineari omogenee:

$$(8) \qquad g^{lh}\,\tau_{/l}\,\tau_{/h}\,\lambda_{pq} + \tau_{/p}\,\tau_{/q}\,g^{lh}\,\lambda_{lh} - \tau_{/q}\,\tau^{/h}\,\lambda_{ph} - \tau_{/p}\,\tau^{/h}\,\lambda_{qh} = 0$$
$$(p, q = 0, 1, 2, 3).$$

Si noti che, in virtù della sua genesi, il primo membro della (8) è costituito da una generica componente del tensore doppio simmetrico $2\,\Delta G_{pq}$, e si può anche scrivere:

$$\lambda_{rs}\left\{\tau_{/l}\,\tau^{/l}\,g^r_p\,g^s_q + \tau_{/p}\,\tau_{/q}\,g^{rs} - \tau_{/q}\,\tau^{/s}\,g^r_p - \tau_{/p}\,\tau^{/s}\,g^r_q\right\} = 2\,\Delta G_{pq}.$$

Questa mostra che i dieci moltiplicatori λ_{rs} sono le componenti covarianti di un tensore doppio simmetrico, il quale composto col tensore quadruplo le cui componenti sono racchiuse entro le graffe, dà il tensore doppio simmetrico di componenti $2\,\Delta G_{pq}$. Il sistema (8) ha pertanto carattere tensoriale nello spazio–tempo.

(7) Cfr. T. LEVI-CIVITA, loco secondo citato, pp. 56-60.

3. Risoluzione del sistema (8) nel caso generico. – Risolviamo il sistema lineare omogeneo (8) nelle dieci componenti del tensore simmetrico λ_{pq} $(p, q = 0, 1, 2, 3)$, il quale, in virtù delle (7), individua le discontinuità attraverso Σ.

A tal fine trasformiamo il sistema (8) in un altro più semplice, mediante un opportuno cambiamento di variabili. Risolto questo, basterà ritornare alle primitive variabili con le solite formule del calcolo tensoriale, per ottenere la soluzione del sistema originario.

Passiamo dalle variabili $x^0\, x^1\, x^2\, x^3$ alle seguenti:

$$\bar{x}^0 = \tau(x^0\, x^1\, x^2\, x^3) \quad , \quad \bar{x}^i = x^i \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{9}$$

Soprassegnando ciò che si riferisce alle nuove variabili, si ha:

$$\bar{\tau}_{/0} = \frac{\partial \tau}{\partial \bar{x}^0} = 1 \quad , \quad \bar{\tau}_{/i} = \frac{\partial \tau}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial \bar{x}^0}{\partial \bar{x}^i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{10}$$

Consideriamo l'invariante

$$H = \frac{1}{2} g^{lh} \tau_{/l} \tau_{/h}. \tag{11}$$

Avremo:

$$H = \bar{H} = \frac{1}{2} \bar{g}^{lh} \bar{\tau}_{/l} \bar{\tau}_{/h} = \frac{1}{2} \bar{g}^{oo}. \tag{12}$$

In virtù delle (10) e (12), il sistema (8), grazie al suo carattere tensoriale, si trasformerà così:

$$\begin{cases} \bar{g}^{oo} \bar{\lambda}_{oo} + \bar{g}^{lh} \lambda_{lh} - 2 \bar{g}^{ho} \bar{\lambda}_{oh} = 0 \\ \bar{g}^{oo} \bar{\lambda}_{oi} - \bar{g}^{ho} \bar{\lambda}_{ih} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3) \\ \bar{g}^{oo} \bar{\lambda}_{ik} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3), \end{cases}$$

e le nuove incognite sono: $\bar{\lambda}_{oo}$, $\bar{\lambda}_{oi}$, $= \bar{\lambda}_{io}$ $(i = 1, 2, 3)$, $\bar{\lambda}_{ik} = \bar{\lambda}_{ki}$ $(i, k = 1, 2, 3)$. Osservando che

$$\bar{g}^{lh} \bar{\lambda}_{lh} = \bar{g}^{oo} \bar{\lambda}_{oo} + 2 \sum_1^3{}_i \bar{g}^{io} \bar{\lambda}_{io} + \sum_1^3{}_{ik} \bar{g}^{ik} \bar{\lambda}_{ik}$$

$$\bar{g}^{ho} \bar{\lambda}_{oh} = \bar{g}^{oo} \bar{\lambda}_{oo} + \sum_1^3{}_i \bar{g}^{io} \bar{\lambda}_{io}$$

$$\bar{g}^{ho} \bar{\lambda}_{ih} = \bar{g}^{oo} \bar{\lambda}_{io} + \sum_1^3{}_k \bar{g}^{ko} \bar{\lambda}_{ik},$$

il sistema diviene:

$$\begin{cases} \sum_1^3{}_{ik} \bar{g}^{ik} \bar{\lambda}_{ik} = 0 \\ \sum_1^3{}_k \bar{g}^{ok} \bar{\lambda}_{ik} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3) \\ \bar{g}^{oo} \bar{\lambda}_{ik} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3), \end{cases} \tag{13}$$

e risulta contenere le sole sei incognite $\bar{\lambda}_{ik} = \bar{\lambda}_{ki}$ $(i, k = 1, 2, 3)$.

Nel caso generico in cui l'invariante H, dato dalla (11), è diverso da zero,

$$H \neq 0,$$

sarà pure, per la (12), $\bar{g}^{00} \neq 0$, e il sistema (13) si ridurrà alle sole seguenti sei equazioni indipendenti:

$$\bar{\lambda}_{ik} = 0 \qquad (\bar{\lambda}_{ik} = \bar{\lambda}_{ki}\ ,\ i,k = 1,2,3). \tag{14}$$

La soluzione generale del sistema (13) si otterrà dunque dando valori arbitrari ai quattro moltiplicatori $\bar{\lambda}_{00}\ \bar{\lambda}_{01}\ \bar{\lambda}_{02}\ \bar{\lambda}_{03}$ che non vi compaiono e valori nulli ai sei moltiplicatori $\bar{\lambda}_{ik} = \bar{\lambda}_{ki}$, per $i,k = 1,2,3$.

Per ottenere i valori dei moltiplicatori λ_{pq} ($\lambda_{pq} = \lambda_{qp}\ ,\ p,q = 0,1,2,3$) che soddisfano all'originario sistema (8) nel caso generico $H \neq 0$, basta ritornare alle primitive variabili $x^0\ x^1\ x^2\ x^3$. Si ha:

$$\lambda_{pq} = \bar{\lambda}_{lh}\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^p}\frac{\partial \bar{x}^h}{\partial x^q} \qquad (p,q = 0,1,2,3), \tag{15}$$

e quindi, ricordando le (9) e le (14):

$$\begin{cases} \lambda_{00} = \bar{\lambda}_{00}\,\tau_{/0}\,\tau_{/0} \\ \lambda_{0i} = \bar{\lambda}_{00}\,\tau_{/0}\,\tau_{/i} + 2\,\bar{\lambda}_{0i}\,\tau_{/0} \qquad (i = 1,2,3) \\ \lambda_{ik} = \bar{\lambda}_{00}\,\tau_{/i}\tau_{/k} + \lambda_{0k}\,\tau_{/i} + \bar{\lambda}_{i0}\,\tau_{/k} \qquad (i,k = 1,2,3). \end{cases} \tag{15'}$$

Le formule (15'), nelle quali $\bar{\lambda}_{00}\ ,\ \bar{\lambda}_{01}\ ,\ \bar{\lambda}_{02}\ ,\ \bar{\lambda}_{03}$ sono suscettibili di valori arbitrari, danno esplicitamente, per $H \neq 0$, la soluzione generale del sistema lineare omogeneo (8) nelle dieci incognite λ_{pq} ($\lambda_{pq} = \lambda_{qp}\ ;\ p,q = 0,1,2,3$). Esse mostrano che nel caso generico in cui sia $H \neq 0$, la caratteristica algebrica della matrice del sistema (8) è

$$K = 6.$$

Risultando così $K < 10$, potremo affermare che il sistema differenziale costituito dalle equazioni gravitazionali (4) o (5) non è normale.

4. EQUAZIONE DELLE VARIETÀ CARATTERISTICHE. – Supponiamo ora nullo l'invariante H dato dalla (11):

$$H = 0.$$

In tal caso è, per la (12), pure nullo $\bar{g}^{00}$ e quindi le dieci equazioni lineari omogenee (13) si riducono alle sole quattro seguenti:

$$\begin{cases} \sum_{ik}^{1\,2\,3} \bar{g}^{ik}\,\bar{\lambda}_{ik} = 0 \\ \sum_{k}^{1\,2\,3} \bar{g}^{0k}\,\bar{\lambda}_{ik} = 0 \qquad (i = 1,2,3), \end{cases} \tag{16}$$

in cui compaiono le sole sei incognite $\bar{\lambda}_{ik} = \bar{\lambda}_{ki}$ $(i,k = 1,2,3)$.

La caratteristica algebrica della matrice di questo sistema è

$$K = 4,$$

e pure eguale a 4 è la caratteristica algebrica della matrice dell'originario sistema (8), quando sia $H = 0$.

Le ipersuperficie Σ dello spazio–tempo, d'equazione (2), per le quali risulti $H = 0$, sono dunque tali da abbassare la caratteristica algebrica della matrice del sistema (8) a cui soggiacciono le discontinuità. Queste ipersuperficie concedono perciò ai fenomeni gravitazionali discontinuità più late di quelle concesse da generiche ipersuperficie dello spazio–tempo: esse sono le caratteristiche (nel senso di Hadamard) del sistema differenziale non normale costituito dalle equazioni gravitazionali einsteiniane (4) o (5) [8].

L'equazione differenziale delle varietà caratteristiche si ottiene scrivendo la condizione $H = 0$ e ponendo per l'invariante H il suo valore (11). Si ha così:

$$g^{lh}\,\tau_{/l}\,\tau_{/h} = 0. \tag{17}$$

È questa l'equazione alle derivate parziali di primo ordine a cui deve soddisfare la funzione $\tau(x^0\,x^1\,x^2\,x^3)$ perchè essa, eguagliata ad una costante, dia l'equazione (2) di una varietà caratteristica delle equazioni gravitazionali einsteiniane [9].

Nel riferimento (1′) la (17) si scrive:

$$\frac{1}{V^2}\left(\frac{\partial\tau}{\partial t}\right)^2 - \sum_{ik}^{1,2,3} a^{ik}\,\tau_{/i}\,\tau_{/k} = 0. \tag{17′}$$

Da questa e dalla (3) si trae immediatamente, come mostrò Maria Pastori [10], l'eguaglianza

$$u = V, \tag{18}$$

in virtù della quale si verifica che le azioni gravitazionali non sono istantanee, ma si propagano con la velocità della luce.

5. Discontinuità sul fronte d'onda. – Le discontinuità sul fronte d'onda d'equazione (2), secondo il quale si propagano le azioni gravitazionali, si ottengono determinando in primo luogo la funzione τ soluzione della (17) o (17′), e scrivendo poi le (7). In queste ultime si porranno al posto dei moltiplicatori $\lambda_{pq} = \lambda_{qp}$ $(p, q = 0, 1, 2, 3)$ quelli dati dalle (15). Essendo ora $H = 0$, verranno meno le (14) e dalle (15) e dalle (9) non si trarranno le (15′) (valide per $H \neq 0$ e conseguentemente $\bar{\lambda}_{ik} = 0$ $(i, k = 1, 2, 3)$), bensì le seguenti:

(8) T. Levi-Civita, loco primo citato, cfr. la fine del § 1.

(9) Qualora si volesse integrare col metodo delle bicaratteristiche l'equazione alle derivate parziali di primo ordine (17), basterebbe valersi del sistema (differenziale ordinario) canonico che ha per funzione hamiltoniana la H data dalla (11), nella quale si pongano i momenti cinetici p_h al posto delle derivate parziali $\tau_{/h}$.

(10) M. Pastori, *Propagazione delle azioni gravitazionali ed elettromagnetiche*. « Rend. Ist. lombardo », vol. LXXII, 1939.

$$(19)\qquad \begin{cases} \lambda_{oo} = \bar{\lambda}_{oo}\,\tau_{/o}\,\tau_{/o} \\ \lambda_{oi} = \bar{\lambda}_{oo}\,\tau_{/o}\,\tau_{/i} + 2\,\bar{\lambda}_{oi}\,\tau_{/o} & (i = 1,2,3) \\ \lambda_{ik} = \bar{\lambda}_{oo}\,\tau_{/i}\,\tau_{/k} + \bar{\lambda}_{ok}\,\tau_{/i} + \bar{\lambda}_{io}\,\tau_{/k} + \bar{\lambda}_{ik} & (i,k = 1,2,3). \end{cases}$$

In queste formule i moltiplicatori $\bar{\lambda}_{pq}$ $(p,q = 0,1,2,3)$ debbono soddisfare al sistema (16) a cui si riduce il sistema (13) per $H = 0$. Ciò significa che $\bar{\lambda}_{oo}\,\bar{\lambda}_{o1}\,\bar{\lambda}_{o2}\,\bar{\lambda}_{o3}$ sono arbitrari, mentre i rimanenti sei moltiplicatori $\bar{\lambda}_{ik}$ $(i,k = 1,2,3)$ soddisfano alle quattro equazioni lineari che costituiscono il sistema normale (16). I coefficienti di questo sistema sono noti, perchè

$$\bar{g}^{ik} = g^{pq}\,\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p}\,\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q} = g^{ik} \qquad (i,k = 1,2,3)$$

$$\bar{g}^{ok} = g^{pq}\,\frac{\partial \bar{x}^o}{\partial x^p}\,\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^q} = g^{ok}\,\tau_{/o} + \sum_1^3{}_i\, g^{ik}\,\tau_{/i} \qquad (k = 1,2,3),$$

e, nel riferimento (1'), posto $\tau^k = \sum_1^3{}_i\, a^{ik}\,\tau_{/i}$, risulta:

$$\bar{g}^{ik} = -\,a^{ik} \quad (i,k = 1,2,3) \quad , \quad \bar{g}^{ok} = -\,\tau^k \quad (k = 1,2,3).$$

Per risolvere il (16), che scriviamo

$$(20)\qquad \begin{cases} \sum_1^3{}_{ik}\, a^{ik}\,\bar{\lambda}_{ik} = 0 \\ \sum_1^3{}_k\, \tau^k\,\bar{\lambda}_{ik} = 0 & (i = 1,2,3), \end{cases}$$

basterà fissare ad arbitrio due delle sei incognite $\bar{\lambda}_{ik} = \bar{\lambda}_{ki}$, e ricavare, con la regola di Cramer, dal sistema (20) i valori delle rimanenti quattro.

Geodesia. — *Sull'interpretazione geodetica del residuo della equazione di Laplace.* Nota (*) del Corrisp. GIOVANNI BOAGA.

Fra gli azimut (α), le longitudini (λ) e le latitudini (φ), astronomiche e geodetiche, di un vertice trigonometrico, intercorre la seguente relazione:

$$(1)\qquad \alpha_a - \alpha_g = (\lambda_a - \lambda_g)\cdot \operatorname{sen} \varphi_g$$

denominata *equazione di Laplace.*

Il verificarsi o meno della (1) mette in evidenza la misura del grado di precisione delle operazioni astronomiche e geodetiche relative alle singole stazioni; essa può venire utilizzata per il controllo delle varie misure.

Tenendo conto soltanto degli errori medi degli azimut astronomici e delle longitudini, pure astronomiche, il residuo della (1), definito dalla:

$$(2)\qquad (\alpha_a - \alpha_g) - (\lambda_a - \lambda_g)\cdot \operatorname{sen} \varphi_g = v$$

(*) Presentata nella seduta dell'8 gennaio 1949.

dovrebbe, teoricamente, risultare compreso nei limiti $\pm 1''$; ne consegue che il più o meno grande valore numerico di v può fornire, stazione per stazione, *la misura della minore o maggiore precisione del collegamento geodetico che ha portato ai valori* α_g , λ_g.

In Italia, fra le latitudini 36° 42′ e 45° 28′, si hanno venti equazioni (2) corrispondenti ai vertici (punti di Laplace) elencati con le loro denominazioni nella Tabella annessa, dove sono pure riportati i vari termini della (2).

I residui v sono calcolati col riferimento geodetico *ellissoide di Bessel orientato a Genova* (Istituto Idrografico della Marina); essi oscillano, in valore assoluto, fra 6″,69 e 0″,02. Importi dello stesso ordine si riscontrano per esempio nelle equazioni di Laplace per n. 18 stazioni relative alla rete trigonometrica austriaca (1).

N.	Stazione	Qualità dei vertici	$\alpha_a - \alpha_g$	$(\lambda_a - \lambda_g) \operatorname{sen} \varphi_g$	v	m_α	m_ε	m_g
1	Milano	I ord.	+ 2″,57	— 2″,86	+ 5″,43	± 0″,25	± 0″,33	± 5″,40
2	Padova	(*)	+ 6 ,67	+ 5 ,81	+ 0 ,86	,30	,37	0 ,78
3	Torino	(*)	+ 25 ,95	+ 27 ,35	— 1 ,40	,10	,23	1 ,38
4	Monte Castello . . .	III ord.	+ 1 ,83	+ 4 ,17	— 2 ,34	,60	,64	2 ,25
5	Tortona	I »	— 12 ,44	— 7 ,05	— 5 ,39	,50	,54	5 ,36
6	Parma	I »	— 9 ,49	— 3 ,60	— 5 ,89	,21	,30	5 ,88
7	Eremo di Cherasco .	I »	+ 23 ,86	+ 25 ,06	— 1 ,20	,30	,37	1 ,11
8	Bologna	(*)	— 3 ,10	— 2 ,47	— 0 ,63	,17	,27	0 ,56
9	Genova	I ord.	— 0 ,05	0 ,00	— 0 ,03	,27	,34	—
10	Firenze	(⁂)	— 5 ,98	+ 0 ,69	— 6 ,67	,29	,36	6 ,66
11	Arcetri	(*)	— 5 ,41	+ 0 ,43	— 5 ,84	,17	,27	5 ,83
12	Torre Scapezzano . .	II ord.	— 1 ,04	— 1 ,16	+ 0 ,12	,48	,52	—
13	Pisa	(*)	— 6 ,07	— 6 ,19	+ 0 ,12	,27	,34	—
14	Monte Conero . . .	I ord.	— 0 ,84	— 0 ,89	+ 0 ,05	,41	,46	—
15	Livorno	(**)	— 6 ,86	— 5 ,41	— 1 ,45	,26	,29	1 ,42
16	Termoli	I ord.	+ 3 ,38	— 1 ,74	+ 5 ,12	,33	,39	5 ,10
17	Monte Mario	I »	— 0 ,97	— 1 ,83	+ 0 ,86	,29	,35	0 ,78
18	Guardia Vecchia . . .	I »	+ 1 ,62	— 0 ,08	+ 1 ,70	,19	,28	1 ,68
19	Cagliari	I »	— 5 ,19	— 2 ,01	— 3 ,18	,30	,37	3 ,16
20	Pachino	I »	+ 8 ,09	+ 6 ,51	+ 1 ,58	,31	,36	1 ,54

(*) Osservatorio, (⁂) Sede dell'Istituto Geografico Militare, (**) Sede dell'Accademia navale.

(1) Cfr. K. Ledersteger, *Das Lotabweichungssystem der österreichisch-ungarischen Militärtriangulierung.* « Nach. aus Reichsvermessungsdienst », Berlin, 1943.

È stato inoltre calcolato, stazione per stazione, *l'errore complessivo* m_c (riportato nella colonna (8) della Tabella), dovuto alle osservazioni di azimut e di longitudine, mediante la:

$$m_c = \pm \sqrt{m_\alpha^2 + m_\lambda^2 \cdot \operatorname{sen}^2 \varphi}$$

attribuendo agli m_α gli errori medi provenienti dalle osservazioni (vedi colonna (7)) e ad m_λ costantemente l'importo $\pm 0'',30$. I risultati ottenuti per m_c sono compresi nell'intervallo $\pm 0'',64 \div \pm 0'',23$.

Confrontando, stazione per stazione, i risultati trovati per m_c con i residui v, si deduce che in generale si ha $m_c < v$, sicchè con la

$$m_g^2 = v^2 - m_c^2$$

è lecito calcolare *il contributo degli errori dovuti al collegamento geodetico ed alla conseguente compensazione*, in quanto nella differenza messa in evidenza nel primo membro della (2) si elimina tutto ciò che è dovuto alla variazione della verticale, rimanendo in evidenza soltanto quella parte che ha condotto ai valori geodetici α_g, λ_g.

Nell'ultima colonna dello specchio annesso sono riportati, per tutti i punti di Laplace considerati, gli importi degli errori m_g.

Facciamo osservare adesso che l'azimut geodetico α_g di un lato qualunque della rete, si ottiene linearmente dall'azimut di un arco di geodetica spiccata dal punto di propagazione (Genova I. I. M.), che assegna l'orientamento della rete, e da un numero più o meno grande di angoli (misurati e compensati) dei triangoli della rete stessa, oltre alle convergenze dei meridiani calcolate nei vertici dei lati compresi fra il punto di propagazione ed il vertice considerato, attraverso i quali si sviluppa la poligonale per raggiungere tale vertice.

Ne consegue allora, considerando trascurabili gli errori delle convergenze dei meridiani, che l'azimut geodetico α_g è affetto da un errore m_α proveniente dall'errore medio m_o dell'azimut che assegna l'orientamento della rete, e da un numero di errori angolari $m_1, m_2, \cdots, m_n$ eguale al numero n degli angoli considerati. In simboli:

$$m_\alpha^2 = \sum_{i=0}^{n} m_i^2$$

e posto in generale $m_i = m$ con $i = 1, 2, 3, \cdots, n$, si deduce:

$$m_\alpha = \pm \sqrt{m_o^2 + n \cdot m^2} \cong \pm m\sqrt{n} \tag{3}$$

e da qui il

TEOREMA. – *L'errore di un azimut geodetico cresce col crescere della radice quadrata del numero n degli angoli della rete adoperati per la determinazione dell'azimut stesso.*

L'errore medio m di un angolo compensato è, come è noto, superiore all'errore medio risultante dalle osservazioni. Assumendo per tutti gli angoli della rete $m = \pm 1'',20$ e per errore dell'azimut che determina l'orientamento della rete $m_o = \pm 0'',12$ si hanno i seguenti risultati, molto suggestivi:

$n = 5$	$m_\alpha = \pm 2'',69$
10	3 ,80
20	5 ,37
30	6 ,58

Si osserva per esempio che per arrivare ai *punti di Laplace* delle stazioni *Tortona* (I) e *Firenze* (Oss.) si devono considerare rispettivamente $n = 22$ ed $n = 34$ angoli. In base alla (3) gli *errori medi degli azimut geodetici*, per dette stazioni, risultano degli importi $\pm 5'',63$ e $\pm 6'',99$ assai prossimi ai *residui delle corrispondenti equazioni di Laplace.*

Abbiamo voluto mettere in evidenza queste constatazioni soprattutto per giustificare gli importi, talvolta assai rilevanti, dei residui delle equazioni di Laplace e per richiamare l'attenzione degli studiosi sul fatto che *le equazioni di Laplace non servono tanto per controllare l'esattezza delle determinazioni astronomiche, quanto per mettere in luce gli errori dei collegamenti geodetici (errori nelle longitudini dei vertici della rete e negli azimut geodetici delle linee che li congiungono) e quindi stabilire il grado di torsione della rete avvenuta dopo la compensazione.*

Fisica. — *Osservazioni alla nota di Radicati e Gamba su «Un nuovo metodo per misurare la velocità della luce»*. Nota (*) del Corrisp. ALESSANDRO AMERIO.

Nel fascicolo 6° del IV volume di questi «Atti» è comparsa una breve critica di L. A. Radicati e di A. Gamba sul metodo da me proposto per la misura della velocità di propagazione della luce e soprattutto per una possibile applicazione a un'esperienza comparativa tra la teoria della relatività e la teoria classica della propagazione della luce (1).

In sostanza essi dicono:

I. – Il metodo proposto è essenzialmente quello di Fizeau.

II. – Per quanto si riferisce all'esperimento comparativo fra le due teorie «il procedimento . . . sarebbe valido se fosse lecito ritenere nota la velocità di propagazione delle onde radio da A a B . . .» ecc.

Per la prima parte osservo che è ben noto che il metodo Karolus e Mittelstaedt altro non è che il più brillante ed efficace perfezionamento del metodo di Fizeau (2) e certo se il metodo da me proposto fosse rivolto alla sola misura della velocità della luce e permettesse soltanto questa, potrebbe ritenersi solo una complicazione del metodo di Fizeau, Karolus e Mittelstaedt.

Ma esso permette parecchio di più e tra l'altro soprattutto di fornire tutti i mezzi per poter studiare l'andamento di un raggio di luce che si pro-

(*) Presentata nella seduta dell'11 dicembre 1948.

(1) «Rend. Acc. Lincei», ser. VII, vol. II, p. 238 e 736; vol. IV, p. 736.

(2) Vedi: AMERIO, *Fisica Sperimentale*, Principato, fin dalla I edizione (1934).

paghi in un sol verso, cioè ad esempio da una stazione B ad altra A, (vedi Note citate) in quanto che un'onda radio lanciata da A verso B apre in quest'ultima stazione la via ad un raggio di luce diretto verso A e permette di *poter misurare il tempo* che esso impiega ad andare da B ad A, *anche se le onde radio non hanno una velocità nota*. Inoltre esso si presta a importanti esperimenti che col semplice metodo di Fizeau, anche nel perfezionamento di Karolus e Mittelstaedt non si potrebbero fare e di uno di essi dirò tra poco. Ma fra questi esperimenti, secondo me, il più importante è certo quello per cui il metodo fu ideato che è di permettere, *secondo la teoria classica*, la misura del rapporto $\frac{v}{c}$ (v velocità della Terra, c quella della luce) anzichè del rapporto assai minore $\frac{v^2}{c^2}$ come si potrebbe col metodo di Fizeau, Karolus e Mittelstaedt, sempre secondo la stessa teoria, se la precisione delle misure lo consentisse.

In quanto al secondo punto osservo che è *quasi* giusto quanto dicono i due autori sopracitati, che cioè per la validità del metodo sia necessario conoscere la velocità di propagazione delle radioonde; dico *quasi* perchè basta conoscere il rapporto delle due velocità come vedremo.

Ora nelle mie precedenti Note ammetto che questa velocità sia quella stessa della luce. Ciò nel vuoto è una delle più dirette conseguenze della teoria elettromagnetica della luce e d'altra parte le osservazioni astronomiche escludono che nello spettro visibile delle stelle variabili più lontane si presenti una traccia di dispersione della luce, nè vedo una base teorica che ci induca ad ammetterne l'esistenza per onde più lunghe.

Quindi se l'esperienza si facesse nel vuoto, l'obbiezione cadrebbe e ciò significa che teoricamente, il metodo non è discutibile e che la sua attuazione non sarebbe altro che una questione di mezzi. Ma si dirà: per ragioni di praticità l'esperienza si dovrà fare nell'aria e quì la dispersione esiste realmente.

A questo riguardo osservo che questa dispersione è piccola per la luce e decresce rapidamente col crescere della lunghezza d'onda per cui la velocità passando da $\lambda = 0{,}65\ \mu$ (riga C dell'idrogeno) a $\lambda = 0{,}8\ \mu$ varia solo di 10^{-7} e che per le onde relativamente lunghe occorrenti per l'esperienza proposta siamo fuori dalle zone di assorbimento dell'aria. In conseguenza non mi pare molto probabile una variazione dell'ordine di 10^{-5} quale sarebbe tollerabile per le misure prospettate. Tuttavia, dato che passando dalle onde luminose e ultrarosse alle radioonde si attraversano varie zone di assorbimento, una sicura previsione teorica non è possibile e poichè invece l'esperienza ha sempre ragione e dice su ogni specifico argomento l'ultima parola, ecco che il metodo si presta a risolvere la questione e perciò ad eliminare i dubbi sopra esposti.

Infatti se la luce nell'aria ha una velocità differente (supponiamo minore) di quella delle radioonde, e si procede aumentando gradatamente la frequenza, si arriverà per questa ad un valore tale che la fase di massima ampiezza dell'onda che ha aperto alla luce la via nella cellula di Kerr della stazione

A, arrivi in B prima della luce stessa e lo sfasamento potrà essere tale che in B la cellula non sia più attivata quando vi giunge la luce e che quindi questa *non passi*.

Se allora si aumenterà gradatamente detta frequenza, si potrà fare in modo che contemporaneamente alla luce giunga nella stazione B, in fase di massima ampiezza, l'onda successiva a quella che le ha aperta la via in A e quindi la luce torni a passare. Così sarà possibile stabilire *in quale rapporto staranno le due velocità.*

Non credo valga la pena che io mi dilunghi sulle modalità sperimentali da seguire per risolvere la questione.

Chiamiamo a il rapporto tra la velocità della luce e quella delle onde radio. Supponiamo allora che le onde radio abbiano la velocità v_1 e la luce la velocità v_2; sia per ipotesi $v_1 > v_2$ e consideriamo il caso in cui la luce che

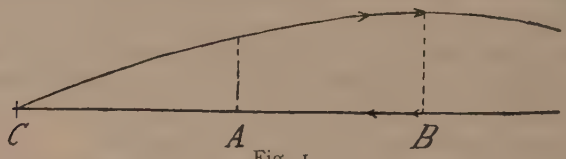


Fig. 1.

Fig. 2.

parte da B venga intercettata in A; per semplicità sia questo il caso che si presenta coll'onda più lunga cioè, secondo la teoria esposta nella prima Nota citata, quello in cui $\lambda = 8\,AB$. Per l'ipotesi fatta, l'eguaglianza sarà solo approssimata.

Non è il caso che più convenga sperimentalmente, ma è il più semplice a considerare.

La figura 1 rappresenta questo caso quando la radioonda è in fase di massima ampiezza in B e quindi apre la via alla luce diretta verso A. Poichè la velocità della radio onda è maggiore di quella della luce sarà $\lambda > 8\,AB$. Nell'istante considerato il nodo di quell'onda sia C; sarà $CA > AB$. Se in A la luce che proviene da B viene intercettata, vuol dire che quando essa giunge in A, qui sarà pervenuto il nodo della radioonda (fig. 2). Avremo che nello stesso tempo t in cui la luce percorre il tratto BA con la velocità v_2, la radioonda percorre il tratto CA con la velocità v_1. Perciò quando la velocità v della Terra è normale ad AB,

$$\frac{AB}{CA} = \frac{v_2}{v_1}$$

e indicando con T il periodo della radioonda, ossia con $\frac{T}{4}$ il tempo da questa impiegato pel tratto CA + AB, poichè t è il tempo impiegato dalla luce ad andare da B ad A e quindi anche dalla radioonda per andare da C ad A, sarà

$$CA + AB = \frac{1}{4} T v_1$$

$$CA = t v_1$$

e perciò

$$\frac{CA + AB}{CA} = \frac{1}{4}\frac{T}{t} = 1 + \frac{AB}{CA} = 1 + \frac{v_2}{v_1}.$$

Poichè abbiamo indicato con a il rapporto $\frac{v_2}{v_1}$ sarà

$$t = \frac{1}{4}\frac{T}{1 + a}$$

e quindi

$$v_2 = \frac{AB}{t} = \frac{4}{T} AB (1 + a)$$

Analogamente si procederebbe se la velocità delle radioonde fosse minore di quella della luce o adoperando onde più corte di quella ora considerata.

In questi casi si troverebbe che per n intiero la luce che proviene da B *passa* per A se

$$t = \frac{2n}{4}\frac{T}{1 + a}$$

e *non passa* se

$$t = \frac{2n + 1}{4}\frac{T}{1 + a}$$

ciò che concorda con quanto si è già detto nella prima Nota se è $v_1 = v_2$.

Petrografia. — *Sui costituenti minori di alcune rocce argillose appenniniche e sul loro probabile significato.* Nota (*) del Socio PAOLO GALLITELLI.

Le ricerche sulle argille della formazione argilloso-ofiolitifera appenninica, iniziate con un contributo del C. N. R. in collaborazione con E. Montanaro Gallitelli fin dal 1942 e condotte da quest'ultima per la parte geologico-paleontologica, e dallo scrivente per la parte chimico-petrografica, portarono, a partire dal 1943, alla pubblicazione di alcuni risultati parziali di carattere prevalentemente geologico-paleontologico (1). In questi ultimi tempi, poi, E. Montanaro Gallitelli,

(*) Presentata nella seduta dell'8 gennaio 1949.

(1) E. MONTANARO GALLITELLI, *Per la geologia delle argille ofiolitifere appenniniche.* Nota I. *L'argilla scagliosa di Varana (Modena).* « Mem. Soc. Tosc. Sc. Nat. », vol. 52 (1943). - Nota II. *Foraminiferi dell'argilla scagliosa di Varana.* Id. id. - Nota III. *Foraminiferi dell'argilla scagliosa di Castelvecchio (Modena).* Id. id., vol. 54 (1947).

durante i rilevamenti sul terreno, ebbe modo di osservare la graduale trasformazione di rocce diabasiche in materiale tipicamente argilloso, e ne diede comunicazione in una Nota pubblicata nei « Rendiconti » di questa Accademia (2), rilevando la frequenza del fenomeno e affacciando l'ipotesi di una possibile locale e parziale genesi di argilloscisti ofiolitiferi da disfacimento sottomarino di rocce diabasiche.

Questa osservazione, che non mi risulta sia stata fatta finora da altri almeno in questa forma precisa, presenta notevole interesse per la formazione argilloso–ofiolitifera appenninica, in particolare quando il problema venga esaminato alla luce delle osservazioni eseguite sui depositi argillosi raccolti nelle campagne oceanografiche dell'immediato anteguerra e pubblicate in questi ultimi anni (3). A me, poi, ha offerto l'occasione per iniziare una serie di indagini intese a stabilire le modalità e le condizioni nelle quali si può compiere l'argillificazione dei diabasi e di altre rocce della stessa famiglia (4).

Nello sviluppo di queste ricerche sono stato indotto a prendere in considerazione, fra l'altro, le analogie e le differenze che passano fra la composizione delle rocce diabasiche appenniniche e quella di alcune argille scagliose, fissando in particolare l'attenzione sui costituenti minori di queste rocce nella speranza di poter trarre, anche per questa via, dati che ci illuminassero sulla più probabile origine dei lembi argillosi studiati.

Si trattava perciò di compiere un'accurata analisi spettrografica di alcune rocce ofiolitiche e delle argille scagliose inglobanti, esaminando inoltre, per confronto, almeno un'argilla che per età ed origine potesse ritenersi diversa da quelle prima ricordate.

Questa ricerca è stata possibile per il vivo e cordiale interessamento del Padre prof. Alois Gatterer, che ha posto a mia completa disposizione i grandi spettrografi del Laboratorio Astrofisico della Specola Vaticana da Lui diretto, e tutta l'attrezzatura sperimentale occorrente per queste ricerche. All'illustre Scienziato, che ancora una volta è venuto incontro ai miei desideri con una larghissima e squisita ospitalità, esprimo il mio più vivo ringraziamento.

Le rocce scelte per questa ricerca sono rappresentate dal diabase di Campotrera (Valle del Ceresola, provincia di Reggio Emilia), dal suo prodotto naturale argilloso di disfacimento; dall'argilla scagliosa rossa che affiora in un piccolo lembo a contatto con le rocce ofiolitiche di Varana (Appennino modenese) e dall'argilla grigia che circonda l'argilla rossa ed il nucleo ofiolitico della stessa località; dalle argille scagliose rossa e grigia di Castelvecchio che fanno parte della stessa formazione, ma distano 19 km. dalle più vicine rocce diabasiche. Oltre a

(2) E. Montanaro Gallitelli, *Argillificazione del diabase e genesi di alcune argille scagliose rosse appenniniche.* « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. II, p. 815. Roma (1947).

(3) E. Montanaro Gallitelli, *Tentativo di interpretazione genetica di certe argille appenniniche alla luce di reperti oceanografici.* Intern. Geological Congress. XVIII Session, Section G. Geology of Sea and Ocean Floors. London, 1948.

(4) P. Gallitelli, *Sui rapporti fra diabasi e argille della formazione argilloscistosa appenninica. Esperienze ed osservazioni* Intern. Geol. Congress. XVIII Session. Section Geology and Mineralogy of Clays. London, 1948.

questi campioni della formazione, ritenuta attualmente sopracretacea, ho preso in esame per confronto una marna argillosa da dilavamento subaereo, scelta nelle tipiche « argille azzurre » plioceniche, a Fiorano Modenese. Tutte queste rocce argillose sono state oggetto delle osservazioni di E. Montanaro Gallitelli e risultano perciò note anche dal punto di vista paleontologico (5).

Le ricerche spettrografiche sono state condotte con il metodo consueto, e cioè sulle rocce finemente polverizzate e introdotte in un foro praticato nel carbone negativo dell'arco alimentato a corrente continua. Il campo spettrale esaminato si estende tra 2000 e 7580 Å, essendosi fotografate le porzioni dello spettro comprese fra 2000 e 3900 Å, fra 3850 e 4690 Å, fra 4100 e 7580 Å rispettivamente con gli spettrografi Zeiss Qu 24, Zeiss a tre prismi 650/1300, e G. H. Steinheill (6).

Come sempre accade quando si esaminano materiali a composizione complessa, gli spettrogrammi appaiono ricchissimi di righe. La grande dispersione degli spettrografi usati, che riduce al minimo la sovrapposizione di linee di elementi diversi, e l'utilizzazione di un comparatore Zeiss che consente la massima precisione nelle misure di lunghezze d'onda per confronto con le linee dello spettro del ferro, hanno consentito di identificare con sicurezza le righe ultime di un certo numero di elementi. I risultati raggiunti sono, per brevità, raccolti nella seguente tabella.

	Diabase Campotrera	Residuo argilloso disfacimento diabase	Argilla Varana		Argilla Castelvecchio		Marna Fiorano Modenese
			rossa	grigia	rossa	grigia	
Cu	+	+	+	+	+	+	+
Ni	+	+	+	+	+	+	+
Cr	+	+	+	+	+	+	+
Co	+	+	+	+ ?	+	+	+ ?
V	+	+	+	+	+	+	+
Sr	+	+	+	+	+	+	+
Ba	+	+	+	+	+	+	+
Li	+	+	+	+	+	+	+
Sc	+	+	+	+	+	+	ass.
Yb	+	+	+	+	+	+ ?	ass.

+ = presente ass. = assente.

(5) E. MONTANARO GALLITELLI, lav. cit.

(6) Le condizioni di funzionamento degli spettrografi sono le seguenti: larghezza della fenditura 0,006–0,008 mm., corrente continua 130 v. 5–10 a. Per la zona dello spettro compresa fra 2000 e 3000 Å, si sono usate lastre fotomeccaniche Ferrania; per quella compresa fra 3850 e 4690 Å, lastre Eastman-Kodak G III; per quella fra 4100 e 7580 Å, lastre Eastman-Kodak 103 u.

Nelle rocce prese in esame, oltre agli elementi rivelati dall'analisi chimica – e cioè Si Ti Al Fe Mn Ca Mg Na K P C S Zr Cl [7] – compaiono perciò anche tracce più o meno abbondanti di Cu Cr Ni Co V Sr Ba Li Sc Yb [8]. Di questi, Cu Cr Ni Co V Sr Ba erano già stati osservati in altre rocce sedimentarie appenniniche da Carobbi e Pieruccini [9]. Nonostante le più accurate indagini, non sono riuscito a svelare la presenza di altri elementi oltre a quelli indicati.

Un fatto che colpisce subito nell'esame di questi risultati è che fra dieci costituenti minori, sette, e precisamente, Cu Cr Ni Co Li Sc Yb, fanno parte, in modo più o meno deciso, del gruppo isomorfogeno del ferro e del magnesio. È infatti ben noto che anche il Li, come il Cu, il Cr, il Ni, il Co, si ritrova con una certa frequenza nelle rocce eruttive derivate da magmi basici, e che lo Sc, tutt'altro che raro nei minerali di magnesio e di ferro, è spesso accompagnato da Yb e da altre terre rare con diametro ionico relativamente piccolo.

Tra gli altri elementi che non fanno parte del gruppo isomorfogeno anzidetto, il V ha una posizione particolare, perchè, se da un lato come V^{+3}, fa parte del gruppo isomorfogeno del Fe^{+3} e si trova con una certa frequenza nelle rocce eruttive basiche, dall'altro è frequente nei sedimenti ove si accumula per un processo biochimico.

Il Ba, e lo Sr sono di solito scarsissimi nelle rocce eruttive basiche, mentre risultano tutt'altro che scarsi nelle rocce argillose essendo facilmente assorbiti nelle melme insieme al potassio.

Se ora passiamo a considerare la relativa abbondanza di questi elementi nelle rocce esaminate, si nota anzitutto che nel prodotto naturale di disfacimento del diabase di Campotrera si ritrovano, come era da aspettarsi, tutti i costituenti minori del diabase e in quantità che, almeno se si giudica dall'intensità e dal numero delle linee osservate, non sembrano essere molto diverse nelle due rocce.

Passando alle argille scagliose rossa e grigia di Varana – che sono a contatto con rocce ofiolitiche – ed alle argille scagliose rossa e grigia di Castelvecchio che, come si disse, pur appartenendo alla stessa formazione distano 19 km. dalle masse diabasiche più vicine, si nota che in esse le righe del V del Ba e dello Sr sono più numerose e più intense che nella roccia diabasica: ciò fa pensare che in esse si abbia un maggiore contenuto in questi elementi. Invece Cu Ni Cr Co Li Sc Yb non sono, in media, più abbondanti nelle argille che nel diabase. Il maggior contenuto di V Ba Sr delle argille scagliose rispetto al diabase non meraviglia, quando si tenga presente la capacità di assorbimento delle argille per gli ioni di grande raggio e l'accumulo biochimico del vanadio, cui già si è fatto cenno.

(7) E. Montanaro Gallitelli, *Argillificazione del diabase*, ecc.

(8) Tra gli elementi identificati non ho compreso il boro, perchè la sua identificazione risultava oltremodo dubbia, essendo contenuto in quantità sensibile nei carboni utilizzati.

(9) G. Carobbi e R. Pieruccini, *Sopra i costituenti minori di alcune rocce sedimentarie di Passo delle Radici (Appennino tosco-emiliano)*. «Spectrochimica Acta», vol. II, p. 32. Berlin, 1941.

Più interessante è il fatto che nella marna pliocenica da dilavamento subaereo – che è pure relativamente ricca di V Ba Sr e contiene tracce sensibili di Cu Cr Ni Co Li – mancano completamente Sc ed Yb. Questo fatto non va trascurato, in quanto è oggi noto che gli elementi presenti in tracce nelle rocce eruttive acide di tipo sienitico e granitico differiscono notevolmente dagli elementi che si incontrano nelle rocce gabbriche e peridotitiche. Ora, il fatto che lo Sc e l'Yb si ritrovino nella roccia diabasica, nel suo prodotto naturale di disfacimento e nelle argille scagliose rossa e grigia di Varana e di Castelvecchio, che appartengono alla formazione argilloso–ofiolitifera appenninica, mentre le più accurate ricerche non ne hanno svelato neppure tracce nella marna pliocenica, costituiscono una prova che tali elementi si ritrovano oggi nelle argille scagliose delle località ricordate essendovi stati portati dai prodotti di disfacimento delle rocce diabasiche inglobate.

Questa probabile origine dello scandio e dell'itterbio nelle argille esaminate trova conferma nei risultati dello studio della composizione mineralogica di queste rocce. Osservazioni microscopiche provano infatti che nelle argille scagliose rosse di Castelvecchio e di Varana sono presenti anche alcuni minerali tipici delle rocce diabasiche, che mancano totalmente nella marna pliocenica da dilavamento subaereo. Ciò prova che le argille scagliose dei piccoli lembi argillosi studiati contengono effettivamente i prodotti di disfacimento di rocce diabasiche, i quali dalle osservazioni sul terreno e di laboratorio, mostrano essere essi stessi di natura argillosa.

Questo non vuol dire, come è ovvio, che tutti i costituenti minori del gruppo isomorfogeno del ferro e del magnesio presenti nelle argille derivino dalle rocce diabasiche inglobate. Una tale generalizzazione non mi sembra corrispondere a realtà, in quanto anche la marna pliocenica, nella quale non sono riconoscibili i prodotti di disfacimento del diabase, contiene pure tracce di Cu Ni Cr Co Li. Si può però pensare che con i prodotti di disfacimento delle rocce ofiolitiche inglobate si sia avuto un arricchimento di costituenti minori nelle argille scagliose inglobanti, ciò che sembra confermato dalle quantità stimate nelle singole rocce.

Da ultimo, non è privo di interesse notare che le rocce argillose più ricche in bario, mostrano anche un alto contenuto in cloro. Questo fatto deve essere messo in rapporto con l'alto potere di scambio dei minerali argillosi che possono trattenere tra i foglietti del loro reticolo ioni diversi, con una spiccata preferenza per quelli dotati di grande raggio ionico, quali appunto Ba^{+2} e Cl^{-1}.

Chimica organica. — *Contributi allo studio della struttura dei chinoni e delle forme chinoidi.* – VI. *Energie medie di risonanza ed energie minime di eccitazione elettronica nelle forme naftochinoniche* (*). Nota di Giov. Battista Bonino ed Eolo Scrocco, presentata (**) dal Socio G. B. Bonino.

In precedenti lavori (1) uno di noi in collaborazione con M. Rolla ha calcolato con il metodo degli orbitali e con approssimazioni diverse i valori dei livelli di energia per l'orto– e per il para–benzochinone deducendo pure gli indici di legame relativi agli elettroni mobili p_z delle due forme. Analoghi calcoli sono stati proseguiti dagli Autori di questa Nota per le varie forme naftochinoniche, sia utilizzando l'approssimazione che abbiamo indicato nei precedenti lavori con il simbolo [A] sia utilizzando l'approssimazione proposta da Coulson (2) e che avevamo indicato con il simbolo [C]. Come si sa, quest'ultima approssimazione tiene conto delle differenze di elettronegatività degli atomi di ossigeno e di carbonio del legame C = O chinonico. In questa approssimazione, applicata dal noto chimico–fisico inglese (2) al calcolo degli indici di legame dell'orto– e del para–benzochinone, si tien conto di un unico valore dell'integrale di risonanza β_{CC} per i legami tra carbonio e carbonio nell'anello chinonico e si utilizza un valore $\beta_{CO} = 2\,\beta_{CC}$ per il legame C = O chinonico.

Coulson giustifica quest'ultimo valore in base a considerazioni sulle energie di legame semplice e doppio CC e CO. Così, mentre nell'approssimazione [A] i termini diagonali del determinante secolare si pongono tutti eguali $(\rho = (E_0 - E)/\beta$, con E_0 energia dell'elettrone sulla funzione d'onda imperturbata, E energia dell'elettrone sulla funzione d'onda perturbata « molecolare » e si tengono per E_0 i valori relativi ad un generico atomo di carbonio), nel caso dell'approssimazione di Coulson per i termini diagonali del determinante secolare relativi agli atomi di ossigeno si tiene invece conto di un termine corretto $(\rho + a)$ con $a = 2$. Quest'ultimo valore della correzione del termine diagonale per gli ossigeni è dedotto da Coulson dai valori dei potenziali di ionizzazione rispettivamente degli atomi di carbonio e di ossigeno.

Precedenti Autori russi e francesi (3) avevano trattato della risoluzione delle equazioni secolari di alcune forme naftochinoniche seguendo però l'approssimazione [A]. Questa approssimazione però non può, come già è stato osservato e discusso in nostri precedenti lavori, costituire una unica e suffi-

(*) Lavoro eseguito al Centro Studi di Chimica–fisica del C.N.R. presso l'Istituto Chimico « G. Ciamician » dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta dell'11 dicembre 1948.

(1) Vedi in questi « Rendiconti », anno 1947 e 1948 le Note I–V.

(2) Coulson, « Trans. Farad. Soc. », vol. 42, p. 106 (1946).

(3) A. Pullmann, Berthier, B. Pullman, « Bull. Soc. Chim. France », fasc. 3–4, p. 450 (1948) e bibliografia riportata in questo lavoro.

ciente base di discussione. Noi abbiamo perciò risolto il problema del calcolo delle forme naftochinoniche utilizzando l'approssimazione di Coulson ed abbiamo anche completato la serie di calcoli degli Autori citati, calcoli per i quali era stata utilizzata l'approssimazione [A].

Mentre ci riserviamo di pubblicare questi nostri calcoli in modo più completo ed estensivo sviluppando tutte le discussioni che ad essi si possono ricollegare, ci limitiamo in questa Nota a riportare soltanto alcuni dei risultati più significativi e cioè i valori dei vari livelli di legame, di non legame e di antilegame, i valori delle energie medie di interazione degli elettroni mobili p_z, i valori delle energie minime di eccitazione pro elettrone.

Nella tabella I e nel diagramma della figura 1 si possono rilevare queste energie medie di risonanza pro elettrone e le energie minime di eccitazione elettronica per tutte le forme naftochinoniche descrivibili con formule chimico-organiche non aventi carattere di radicale libero. Abbiamo per maggiore comodità del lettore riprodotto anche i valori dei livelli e delle energie di eccitazione del para- e dell'orto-benzochinone secondo i risultati dei calcoli da noi eseguiti con l'approssimazione di Coulson.

Dai dati della tabella si può rilevare che le energie medie di risonanza degli elettroni p_z in tutte le forme esemplificate non differiscono moltissimo fra di loro e nelle loro variazioni da forma a forma non rendono affatto conto delle profonde differenze di « stabilità chimica » che si riscontrano per le diverse forme.

Se viceversa si considerano le energie minime di eccitazione ε^* pro elettrone p_z si possono classificare le varie forme chinoniche in due categorie e cioè in una prima per la quale le energie di eccitazione risultano maggiori di $0{,}8\,|\beta_{CC}|$ e che sono caratterizzate da una normale stabilità chimica; in una seconda categoria cadrebbero viceversa i vari chinoni la cui energia minima di eccitazione pro elettrone risulta inferiore a $0{,}8\,|\beta_{CC}|$. Caratteristica dei corpi di questa categoria è la grande instabilità; instabilità che si accentua formalmente al diminuire di ε^* tanto che quei naftochinoni caratterizzati dai valori minimi di queste energie di eccitazione o sono estremamente instabili o non si possono affatto preparare.

Così mentre l'ortobenzochinone ($\varepsilon^* = 0{,}76\,|\beta_{CC}|$) è nettamente meno stabile chimicamente del parabenzochinone ($\varepsilon^* = 1{,}00\,|\beta_{CC}|$) notiamo che la forma 2-3-naftochinonica, alla quale i nostri calcoli attribuirebbero una energia di eccitazione che è la più piccola della serie ($\varepsilon^* = 0{,}29\,|\beta_{CC}|$), è ritenuta tanto instabile dai chimici che per esempio Fieser e Collaboratori [4] ne affermano senz'altro l'impossibilità pratica di preparazione.

Per l'1-5-naftochinone, al quale corrisponderebbe una energia minima di eccitazione di $\varepsilon^* = 0{,}58\,|\beta_{CC}|$, Fieser e Collaboratori [5] ammettono la possibilità pratica di formazione, se pure concludono che il prodotto formato abbia una vita estremamente breve.

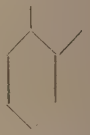
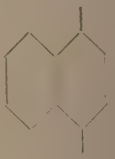
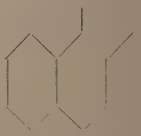
(4) FIESER e Collaboratori, « Journ. of American Chemical Society », *58*, 5219 (1930). « Annalen », *533*, 72 (1938).

(5) FIESER e Collaboratori, « Annalen », *533*, 72 (1938).

TABELLA I.

Energie di risonanza ed energie minime di eccitazione.

(Approssimazione di Coulson).

	Energia media di legame per elettrone p_z: $(\bar{\varepsilon}+\alpha)/\lvert\beta_{CC}\rvert$	Minima energia di eccitazione $\varepsilon^*/\lvert\beta_{CC}\rvert$	Schemi molecolari
1-4 benzochinone . . .	— 2.287684	1	
1–2 benzochinone . . .	— 2,291058	0,765976	
1–4 naftochinone . . .	— 2,024560	1,128296	
1–2 naftochinone	— 2,023213	0,898823	
2–6 naftochinone	— 1,987968	0,629695	
1–5 naftochinone	— 2,002301	0,584814	
2–3 naftochinone	— 1.987268	0,291468	

Il 2–6–naftochinone, per il quale abbiamo calcolato una energia minima di eccitazione pari a $\varepsilon^* = 0{,}62\,|\beta_{CC}|$, si può preparare praticamente e si presenta in aghi rossi [6] ma è assai instabile, tanto che difficilmente si conserva per più di un giorno nelle ordinarie condizioni di laboratorio.

L'1–4–naftochinone, è cioè l'α–naftochinone ordinario, mostra invece una maggiore stabilità chimica, come è noto, e ad esso invero compete una

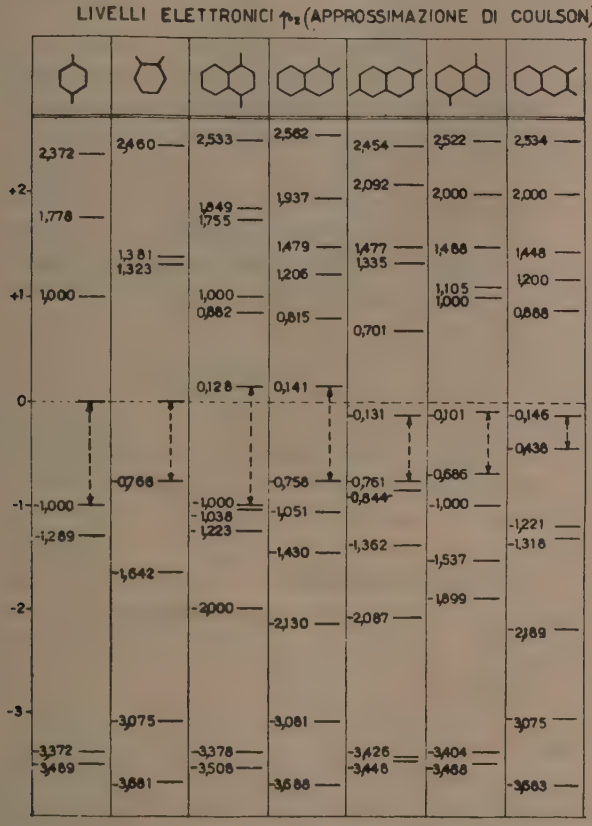


Fig. 1.

energia di eccitazione superiore e cioè $\varepsilon^* = 1{,}12\,|\beta_{CC}|$. Si può osservare invece che l'1–2–naftochinone, al quale i nostri calcoli attribuiscono una energia di eccitazione pari a $0{,}89\,|\beta_{CC}|$ (e cioè inferiore a quella dell'α–naftochinone, se pure sempre superiore al valore critico empirico di $0{,}8\,|\beta_{CC}|$) ha una stabilità chimica certamente inferiore a quella dell'α–naftochinone.

Nelle considerazioni sovra esposte abbiamo usato la parola «stabilità chimica» non certo nel senso di stabilità termodinamica. Quest'ultima, caso

(6) Vedi BEILSTEIN, *7*, 733.

mai, avrebbe dovuto esser messa in relazione con le energie medie di interazione degli elettroni p_z. Abbiamo attribuito al termine stabilità chimica nè più nè meno che l'ordinario significato chimico organico empirico. Questo significato potrebbe essere invece ricollegato a considerazioni chimico-cinetiche alle quali in linea generale potrebbero anche non essere estranee le considerazioni sulle energie minime di eccitazione elettroniche.

Però non abbiamo ancora sufficienti elementi per stabilire se l'instabilità chimica delle forme chinoniche caratterizzate dai bassi valori dell'energia elettronica di eccitazione sia proprio dovuta alla più facile eccitazione elettronica della molecola (ed i valori delle energie di eccitazione sovracalcolati risultano effettivamente dell'ordine di grandezza delle energie di attivazione della cinetica chimica); ovvero se tali caratteri di instabilità chimica non siano da riferire ad altri fattori legati pur sempre alle proprietà degli orbitali p_z e tali da rendere più facile alla molecola il raggiungimento di uno stato attivato. E ciò anche se si dovesse considerare la molecola come confinata adiabaticamente sempre sulla stessa superficie di potenziale caratterizzata dallo stato quantico fondamentale per ciò che riguarda lo stato degli elettroni mobili p_z.

Su questo delicato punto ritorneremo in un prossimo lavoro in modo più approfondito e con nuovi elementi di discussione.

Ringraziamo il dott. Paolo Chiorboli per il valido aiuto che ci ha prestato nella esecuzione dei molteplici calcoli numerici che sono stati necessari per la risoluzione delle equazioni secolari relative alle sovradescritte forme chinoniche.

Chimica delle fermentazioni. — *Ricerche sulla fermentazione citrica con mutanti indotti di «Aspergillus niger»* [*]. Nota di Adolfo Quilico, Luigi Panizzi e Niccolò Visconti di Modrone, presentata [**] dal Corrisp. A. Quilico.

È noto come i recentissimi sviluppi della genetica dei microrganismi, oltre ad aver portato a risultati di grande interesse teorico per la biologia, si siano dimostrati di notevole importanza pratica per le loro applicazioni nel campo fermentativo. Essi offrono infatti la possibilità di arrivare attraverso mutazioni indotte per azione dei raggi X, delle radiazioni ultraviolette, o di alcune sostanze chimiche come l'iprite e le azotoipriti, a ceppi dotati di proprietà biochimiche nuove dipendenti dalla deviazione o dall'arresto ad uno stadio intermedio della catena delle reazioni essenziali o accessorie che normalmente si svolgono nell'organismo studiato, o presentanti in grado accentuato alcune delle sue caratteristiche biochimiche [1].

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale del Politecnico, Centro di Chimica Industriale del C.N.R.

(**) Nella seduta dell'11 dicembre 1948.

(1) A. Hollaender, «Annals of the Missouri Bot. Garden», *32*, 170 (1945).

Tra gli esempi già noti di applicazioni in questo campo ricorderemo: l'ottenimento di ceppi di *Penicillium notatum* ad alta resa in *penicillina* nella fermentazione in superficie o sommersa [2], di mutanti di *Aspergillus terreus* capaci di fornire elevati rendimenti in *acido itaconico* [3], di razze di lieviti capaci di utilizzare determinati substrati ecc.

Nel caso da noi ora considerato della fermentazione citrica ad opera dell'*Aspergillus niger*, l'applicazione dei metodi sopra indicati si presentava assai promettente per la risoluzione dei seguenti problemi:

1° Miglioramento delle attitudini fermentative di ceppi già buoni produttori di acido con la tecnica usuale di fermentazione in superficie.

2° Ottenimento di razze adatte alla produzione di acido su substrati ritenuti finora inutilizzabili o poco convenienti per le basse rese con essi realizzabili.

3° Ricerca di mutanti capaci di fornire buoni rendimenti in acido citrico con la nuova tecnica della fermentazione sommersa.

Le prime notizie sulle modificazioni indotte da diverse forme di energia raggiante nelle proprietà biochimiche dell'*Aspergillus niger*, sono contenute nel lavoro di E. Kresling ed E. Stern [4] (1936) i quali, facendo agire l'emanazione del Ra su culture giovani in mezzo liquido della muffa notarono un aumento nella quantità di acido citrico prodotto; tale effetto non si ha invece nell'irradiazione con raggi ultravioletti. Dalle spore ricavate dalle culture irradiate si ottennero ceppi dotati di nuove caratteristiche morfologiche e biochimiche ma in nessun caso le nuove razze fornirono rese in acido superiori a quelle del ceppo di partenza. Analoghe esperienze vennero compiute qualche anno dopo da R. Nakazawa e M. Simo [5]. I risultati di queste prove appaiono però difficilmente interpretabili e utilizzabili per la tecnica seguìta di far agire le radiazioni sui miceli preformati anzichè sulle spore isolate e per la scelta poco felice dei ceppi di partenza (capaci di produrre altri acidi oltre il citrico) e del terreno di cultura. A tutt'altro scopo e cioè all'ottenimento e allo studio di mutanti morfologici sono infine indirizzate le ricerche più recenti (1940) di R. A. Steinberg e C. Thom [6], nelle quali sono state utilizzate come agenti mutageni differenti sostanze chimiche.

Considerati lo sviluppo e l'importanza economica che ha ormai assunto la produzione dell'acido citrico per via biologica [7], abbiamo ritenuto interessante riprendere questo studio; nel presente lavoro diamo i primi risultati

(2) K. B. Raper, «Ann. New York Acad. Sci.», *47*, 41 (1945); A. Hollaender e E. Zimmer, «Genetics», *30*, 8 (1945).

(3) A. Hollaender, K. B. Raper e R. D. Coghill, «Am. Journ. Bot.», *1945*; K. B. Raper, R. D. Coghill e A. Hollaender, «Am. Journ. Bot.», *1945*.

(4) E. Kresling ed E. Stern, «Centr. für Bakt.», Abt. II, *95*, 327 (1936).

(5) R. Nakazawa e M. Simo, «J. Agr. Chem. Soc. Japan», *14*, 895 (1938); *15*, 547 (1939); «Rept. Proc. 3d Int. Congr. Microbiol.», *1939*, 753. Vedi «Chem. Abstracts», *1940*, 3308, 5246.

(6) R. A. Steinberg e C. Thom, «J. Heredity», *31*, 61 (1940).

(7) Vedi la rassegna di H. W. von Loesecke in «Chem. and Engin. News», *13*, 192 (1945).

delle nostre ricerche, che avevano il preciso scopo di stabilire se, con l'impiego dei raggi X e dell'azotoiprite fosse possibile arrivare a mutanti di *Aspergillus niger* capaci di fermentare con alte rese il saccarosio ad acido citrico.

Poichè era a presumere che avremmo potuto più facilmente raggiungere lo scopo partendo da un ceppo che fosse già buon produttore di acido, abbiamo saggiate le attitudini fermentative dei ceppi di *Aspergillus niger* di differenti provenienze di cui disponevano. Le prove sono state condotte a 28°, su *liquido di Currie* normale al 14 % di saccarosio, ripartito in bevute di Jena da 300 cm^3 contenenti 100 cm^3 di substrato. La semina in tutte le prove riportate nel presente lavoro, venne fatta con 0,5 cm^3 di una sospensione di spore (da cultura in provetta) in H_2O sterile, contenente da 2 a 6 milioni di spore per cm^3. I risultati sono riportati nella Tabella I che dà le rese massime in acido sullo zucchero impiegato, osservate per i vari ceppi:

TABELLA I.

Potere fermentativo su liquido di Currie di vari ceppi.

N.	Resa massima sullo zucchero impiegato %	Età della cultura a resa max	Peso micelio gr.	Zucchero residuo	Acido ossalico	Provenienza del Ceppo usato
1	23,0	12	1,029	4,08	+ +	A. niger 7.193[1]
2	2,5	13	1,182	non det.	+ +	A. niger van Tieghem radium strain 3/1[2]
3	42,0	11	0,845	2,6	—	A. niger 1015[3]
4	7,7	11	1,488	n. d.	+	A. niger Istituto Pasteur (Parigi)
5	26,0	13	0,890	n. d.	—	A. niger B_6^4
6	32,0	13	0,841	4,79	—	A. niger 6.276[3]
7	2,6	11	1,202	n. d.	—	A. niger van Tieghem 3.2[2]
8	4,7	13	1,484	n. d.	+	A. niger B_3^4
9	1,6	11	2,565	n. d.	—	A. niger van Tieghem radium strain 1.1[2]
10	0,75	13	2,237	n. d.	—	A. niger van Tieghem mutante fusca
11	23,0	13	1,278	n. d.	—	A. niger A.[4]
12	0,88	13	2,183	2,97	—	A. niger B_4^4

1. Lister Institute London.
2. Central bureau für Schimmelcultures Baarn.
3. American Type Culture Collection. Washington.
4. Istituto Sieroterapico Milanese.

Accanto a ceppi buoni o discreti produttori di acido (3, 6) se ne hanno di quelli cattivi o cattivissimi (9, 10, 12); come si è in altri casi osservato, le rese in acido sono grossolanamente in ragione inversa al peso del micelio, mentre non esiste nessuna apparente relazione tra il potere acidificante e la comparsa dell'acido ossalico. In base a queste prove, abbiamo scelto il ceppo N. 3 (1015 della American Type Culture Collection di Washington) del quale si sono più accuratamente esaminate le proprietà fermentative, specie per quel che si riferisce all'influenza del modo di aggiunta dell'HCl (prima o dopo della sterilizzazione) che è, come è noto, un componente normale del liquido di Currie.

Tabella II.

*Influenza dell'*HCl *sulla produzione di acido.*

	N	Giorni	Peso micelio gr.	Zucchero residuo	Rese % sul totale	Rese % sul consumato	Acido ossalico	*Osservazioni*
Senza HCl	1	10	0,39	12,2	9,9	41,0	—	Nascita rapida e regolare, sporificazione abbondante e precoce.
	2	11	0,35	12,5	8,7	39,0	—	
	3	12	0,34	12,5	10,3	46,5	—	
Aggiunto prima	4	10	0,37	10,0	14,5	38,5	—	Nascita alquanto ritardata, micelio liscio a grandi ondulazioni poco sporificato.
	5	11	0,36	9,8	17,3	44,5	—	
	6	12	0,51	8,0	28,2	56,2	—	
	7	14	0,57	8,0	28,6	56,8	—	
Aggiunto dopo	8	10	0,39	8,5	35,3	73,0	—	Nascita regolare, micelio granuloso, reticolato, poco sporificato.
	9	11	0,36	5,9	40,8	64,6	—	
	10	12	0,51	7,4	41,5	77,0	—	
	11	13	0,40	6,7	43,5	74,6	—	

Dalla Tabella II risulta evidente per il ceppo studiato l'influenza favorevole di un'aggiunta di HCl dopo la sterilizzazione, che è stata adottata per tutte le prove successive. Il ceppo in esame può quindi fornire in 12–14 giorni su liquido di Currie rese in acido citrico del 40–42 % sullo zucchero impiegato, senza produrre acido ossalico.

Il primo problema da risolvere per il proseguimento di questo studio era di trovare un metodo rapido per la valutazione del potere acidificante dei mutanti ottenuti per irradiazione con i raggi X o per azione dell'azoto-iprite. Si trattava infatti di scegliere tra qualche migliaio di colonie ottenute dalle singole spore sopravvissute all'azione dell'agente mutageno, quelle che

risultassero più attive nella produzione di acido citrico senza dover ricorrere alla tecnica usuale della titolazione dei liquidi di cultura.

Abbiamo potuto raggiungere lo scopo ricorrendo alle culture su terreno solido di agar–Currie al quale era stato aggiunto un indicatore (0,2 cm³ di soluzione all'1 % per scatola Petri) appartenente alla seguente serie che copre un intervallo di pH tra 0,2 e 5,4:

TABELLA III.

Indicatori usati per culture su piastra.

INDICATORE	Intervallo di pH del viraggio	Viraggio da neutro ad acido
Verde di bromocresolo	5,4–3,8	bleu → giallo
Rosso Congo	5,2–3,0	rosso → bleu viola
Metilarancio	4,4–3,1	giallo aranc. → rosso
Bleu timolo	2,8–1,2	giallo → rosso
Rosso o. cresolo	1,8–0,2	giallo → rosso

La Tabella IV mostra i risultati ottenuti con il ceppo 3 originario (1015 A.T.C.C. Wash.) seminato su piastre contenenti ciascuna un indicatore della serie sopra indicata, mantenute in termostato a 28°:

TABELLA IV.

Azione delle colonie sugli indicatori.

Giorni dalla semina	Sviluppo delle colonie	Viraggio degli indicatori
1	—	—
2	visibili	Virato il verde di bromocresolo, inizia l'arancio di metile
3	sviluppate	Virato l'arancio di metile, inizia il Rosso Congo
4	ben sviluppate	» il Rosso Congo, inizia il bleu di timolo
5	ben sviluppate	» il bleu di timolo, inalterato il rosso cresolo

Il ceppo scelto è quindi capace di far virare dopo un tempo sufficiente (4 5 giorni tutti gli indicatori della serie salvo il rosso di cresolo; ceppi cattivi produttori di acido non dànno il viraggio del bleu di timolo o lo dànno molto più lentamente. Si comprende che il metodo impiegato,

per l'inevitabile concomitanza dei due fenomeni *produzione* di acido e *diffusione* dell'acido nel terreno di cultura, può fornire una valutazione solo approssimata del potere acidificante dei differenti ceppi, dando soprattutto un'idea della *rapidità* con la quale ha luogo la produzione di acido, rivelata dal precoce viraggio prodotto da colonie della stessa età [8]. I ceppi buoni produttori di acido sono in genere anche rapidi produttori di acido e d'altra parte nella valutazione pratica delle attitudini fermentative di un ceppo, la rapidità d'azione è fattore di primaria importanza. Comunque sia, il metodo si è mostrato di effettiva utilità, specie quando con l'esercizio si è arrivati ad apprezzare anche le differenti nuances del viraggio di un determinato indicatore [9], e di esso ci siamo serviti per la scelta dei mutanti come è sotto descritto.

Venne preparata una sospensione di spore del ceppo in esame per scuotimento di culture in provetta su terreno solido di 15–20 giorni di età con soluzione fisiologica sterile al 0,85 % di NaCl addizionata di laurilsolfonato sodico come disperdente. Al conteggio mostrò di contenere circa 600.000 spore/cm³. La sospensione, ripartita in fialette chiuse alla fiamma venne irradiata con raggi X provenienti da un tubo di Coolidge ad anticatodo di W; in queste condizioni si ebbero sopravvivenze controllate dell'ordine di 0,1–1 %. Dopo opportuna diluizione con soluzione fisiologica sterile, si prepararono con essa una quarantina di scatole Petri al bleu di timolo che fornirono complessivamente circa 2000 colonie; tra queste ne furono scelte 24 che presentavano un viraggio particolarmente netto e precoce dell'indicatore contenuto nel substrato [10]. La determinazione del potere fermentativo su liquido di Currie normale condotta nel modo solito per 12 giorni a 28° permise di classificarle come indica la Tabella V sotto il punto di vista della produzione di acido citrico [11]:

(8) È da attribuire alla diffusione dell'acido nel substrato il fatto che anche con ceppi di forte potere acidificante non si sia mai riusciti a provocare il netto viraggio del rosso di cresolo.

(9) Questa tecnica delle piastre è stata in seguito da noi perfezionata e resa più sensibile con l'impiego di terreni solidi di esile spessore contenenti $CaCO_3$ precipitato, ove la comparsa attorno alle colonie di aloni trasparenti di differenti dimensioni nettamente visibili sul fondo opaco della piastra permette assai bene di seguire la produzione di acido. Su di essa riferiremo in seguito.

(10) Accanto a colonie manifestamente identiche al ceppo di partenza si isolarono numerosi mutanti che presentavano differenze più o meno spiccate nei caratteri morfologici (pigmentazione delle spore, colore e rugosità del micelio, dimensioni dei conidiofori ecc.) o biochimici (mancata produzione di acido). Tra i primi particolarmente interessanti un mutante nettamente pigmentato in giallo, un altro con spore di colore ocraceo, mentre il ceppo di partenza ha micelio bianco e spore di color nero.

(11) Queste prove vennero condotte su liquido di Currie di una stessa preparazione per eliminare l'influenza di eventuali piccole differenze accidentali del terreno suscettibili di dare già di per sè variazioni di rese. Un altro controllo del potere fermentativo del ceppo originale su terreno di altra preparazione aveva dato:

15° giorno su 4 bevute 42 % (media di 36, 49, 48, 37 %)
16° giorno su 3 bevute 35 % (media di 35, 38, 32 %).

TABELLA V.

Distribuzione delle rese in acido citrico nelle 24 culture da spore irradiate prescelte.

Rese % sullo zucchero impiegato	Numero di culture
Tra il 30–40	5
» » 40–50	8
» » 50–60	4
» » 60–70	3
» » 70–80	4
	24

Scartate le 13 culture che mostravano rendimenti inferiori al 50 %, le rimanenti 11 vennero sottoposte a successivi trapianti. Soltanto per due di esse, che denomineremo ceppi A e B, il miglioramento assai netto del potere acidificante rispetto al ceppo originario si mantenne nei trapianti successivi, come mostrano le Tabelle VI e VII:

TABELLA VI.

Rese in acido citrico ottenute coi ceppi X, A e B, al 2° trapianto.

Giorni:	9°	10°	11°	12°	13°	14°	*Osservazioni*
Ceppo A_2:							
Resa %	30	—	81	77	70	71	Misure fatte su 1 o 2 bevute
Peso micelio, gr	—	—	—	1,505	1,197	1,113	
Ceppo B_2:							
Resa %	—	72	78	58	85	83	Misure fatte su 1 o 2 bevute
Peso micelio, gr	—	—	—	1,214	1,310	1,160	

Tabella VII.

Rese in acido citrico ottenute col ceppo X, B al 3° trapianto in confronto al ceppo originale (11).

Giorni:	10°	11°	12°	13°	14°	*Osservazioni*
Ceppo B_3:						
Resa %	48	61	56	63	66	Le rese rappresentano le medie di tre bevute analizzate, per le quali sono dati i pesi di micelio
Peso micelio, gr.	1,075 1,076 1,253	1,171 1,214 1,066	1,107 — —	1,296 1,516 1,471	1,351 0,920 1,436	
Ceppo originale:						
Resa %	26	39	25	36	38	Analisi su singole bevute
Peso micelio, gr.	1,094	1,010	1,115	1,336	1,259	

Nella Tabella VIII sono raccolti i risultati delle prove condotte col 5° e col 7° trapianto rispettivamente dei ceppi A e B di confronto con il ceppo originale e su due mutanti dello stesso ceppo cattivi produttori di acido:

Tabella VIII.

Rese in acido citrico dei ceppi X, A e B al 5° e al 7° trapianto ecc.

Giorni:	11°	13°	15°	17°	Giorni:	11°	13°	15°	17°
Ceppo A_5:					Mutante giallo 1 (10° trapianto)				
Resa %	34,9	57,0	63,4	76,0	Resa %	2,7	4,0	8,5	4,2
Peso micelio, gr.	0,795 0,785	0,949 1,053	1,061 0,979	— —	Peso micelio, gr.	1,348 0,361	0,515 0,872	— —	— —
Ceppo B_7:					Mutante morfologico				
Resa %	29,5	38,0	60,0	60,0	Resa %	19,0	17,3	9,5	13,0
Peso micelio, gr.	0,555 0,719	0,840 0,877	0,828 0,949	— —	Peso micelio, gr.	0,774 0,640	0,760 0,919	0,681 0,716	— —
Ceppo originario:									
Resa %	23,8	33,5	34,5	38,0					
Peso micelio, gr.	1,144 1,204	1,676 1,247	1,428 1,682	— —					

Nonostante le oscillazioni dovute a cause accidentali non dominabili e che si manifestano del resto anche per il ceppo di partenza nelle differenti serie di prove, appare confermato l'ottenimento e l'isolamento di razze X presentanti un potere acidificante notevolmente superiore a quello del ceppo originario. Le rese in acido citrico realizzabili con i ceppi A e B si aggirano infatti tra una volta e mezza e il doppio di quello ottenibili in pari condizioni dal ceppo di partenza. Per quanto il numero dei trapianti finora eseguiti (7 in un periodo complessivo di 5 mesi) non sia elevato, le razze ottenute sembrano mantenere sensibilmente invariato il loro potere fermentativo: prove sistematiche di sufficiente durata permetteranno di chiarire questo punto.

Esperienze in corso con l'azotoiprite hanno già dimostrato l'efficienza di questo agente mutageno per l'ottenimento di razze di *Aspergillus niger* ad alto potere fermentativo. È in corso la pubblicazione da parte di uno di noi (Visconti) del lavoro genetico preparatorio a queste ricerche.

Ringraziamo la Società Montecatini che ha contribuito a fornire i mezzi per queste indagini.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. – *Relazioni tra il metodo della trasformata multipla di Laplace e il metodo di M. Riesz per l'integrazione di equazioni di tipo iperbolico.* Nota II (*) di LUIGI AMERIO, presentata dal Socio M. PICONE.

2. *a*) È dovuto a M. Riesz (2) un interessante metodo di integrazione dell'equazione delle onde:

$$(22) \qquad \Delta(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \cdots - \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} = f(x_1, \cdots, x_m)$$

con il quale si perviene alla soluzione del problema di Cauchy senza fare uso del concetto di *parte finita* di alcuni integrali, introdotto da Hadamard nelle sue classiche ricerche (3).

Il Riesz si vale, nel suo metodo, di una generalizzazione dell'integrale di Riemann–Liouville:

$$I^{\alpha} f(x) = \frac{2^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t)\,(x-t)^{\alpha-1}\,dt \qquad (\alpha > 0).$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 9 ottobre 1948.

(2) M. RIESZ, *L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy pour l'équation des ondes*. «Sem. Mat. de Padova – Conferenze a la Reunion internat. des Mathematic.», 1937-1938).

(3) J. HADAMARD, *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*. Paris, Hermann, 1932.

Mantenendo le notazioni della Nota I, sia $g(P)$ una funzione continua in ω e poniamo

$$(23) \qquad I^{\alpha} g(P) = \frac{1}{H_m(\alpha)} \int_{\omega_P} g(Q)\, r^{\alpha-m}(P-Q)\, d\omega,$$

dove $Q(y_1, \cdots, y_m)$ è il punto rispetto alle cui coordinate si effettua l'integrazione, $r(P-Q)$ la distanza secondo Lorentz dei punti P, Q e

$$H_m(\alpha) = \pi^{\frac{m-2}{2}} 2^{\alpha-1} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha+2-m}{2}\right).$$

L'integrale (23) esiste per $\alpha > m-2$ ed è funzione analitica del parametro α. Si dimostrano inoltre le relazioni fondamentali

$$I^{\alpha} I^{\beta} = I^{\alpha+\beta} \quad , \quad \Delta I^{\alpha+2} = I^{\alpha}.$$

Per i valori $\alpha \leq m-2$ l'integrale a secondo membro della (23) non esiste in generale: le funzioni $I^{\alpha} g(P)$ può però definirsi per prolungamento analitico, sotto convenienti ipotesi di regolarità per $g(P)$ e per l'ipersuperficie S. *Si trova in particolare* (ammettendo l'esistenza delle derivate degli ordini $\leq \frac{m+1}{2}$ o $\leq \frac{m}{2}$ a seconda che m sia dispari o pari)

$$(24) \qquad \Delta^{\alpha} g(P) = g(P).$$

Ciò premesso, se u è un integrale della (22) ed è $\alpha > m-2$, si ricava [4], per la formula di Green,

$$(25) \qquad I^{\alpha} u(P) = \frac{1}{H_m(\alpha-2)} \int_{\omega_P} f(Q)\, r^{\alpha-2-m}(P-Q)\, d\omega +$$

$$- \frac{1}{H_m(\alpha-2)} \int_{S_P} \left(\frac{\partial u(Q)}{\partial \nu}\, r^{\alpha-2-m}(P-Q) - u(Q) \frac{\partial r^{\alpha-2-m}(P-Q)}{\partial \nu} \right) dS,$$

dove ν è la conormale in Q a S, orientata verso l'interno di ω, S_P la parte di S contenuta nel semicono retrogrado col vertice in P. Se vogliamo risolvere il problema di Cauchy per la (22), risultano assegnati su S i valori u e $\frac{\partial u}{\partial \nu}$: il secondo membro della (25) è perciò noto. È allora nota per $\alpha > m-2$ la funzione $I^{\alpha} u(P)$ e quindi, per prolungamento analitico rispetto al parametro α, si ottiene, in virtù della (24), la soluzione $u(P)$.

6. Come risulta dalla precedente esposizione, il metodo di Riesz rientra in quel procedimento generale di integrazione che il Picone chiama *metodo delle trasformate* [5]. Infatti, in luogo della $u(P)$ si ottiene in un primo tempo, mediante la (25), la sua trasformata

$$(26) \qquad I^{\alpha} u(P) = \frac{1}{H_m(\alpha)} \int_{\omega_P} u(Q)\, r^{\alpha-m}(P-Q)\, d\omega;$$

(4) M. RIESZ, loc. cit. (3), p. 6.

(5) M. PICONE, *Appunti di Analisi Superiore*, Rondinella, Napoli, 1940, p. 447.

successivamente si inverte la $I^{\alpha} u(P)$ e si perviene, per la (24), alla formula risolutiva

$$u(P) = I^{0} u(P).$$

L'inversione si effettua (sotto convenienti ipotesi di derivabilità rispetto alle variabili x_h) mediante prolungamento analitico della $I^{\alpha} u(P)$ a partire da un valore $\alpha > m - 2$ fino al valore $\alpha = 0$.

Osserviamo ora che se pensiamo definita la $u(P)$ anche nei punti esterni al dominio ω, ponendo ivi $u(P) = 0$, e la funzione $r(P)$ nei punti esterni a τ, ponendo ivi $r(P) = 0$, l'integrale a secondo membro della (26) non è altro che il *prodotto di composizione*

$$(27) \qquad u * r^{\alpha-m}(x_1, \cdots, x_m) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} u(y_1, \cdots, y_m)\, r^{\alpha-m}(x_1 - y_1, \cdots, x_m - y_m)\, dy_1 \cdots dy_m .$$

Se questo fosse noto in tutto lo spazio S_m, *risulterebbe individuata la* $u(x_1, \cdots, x_m)$. Posto infatti

$$u * r^{\alpha-m}(x_1, \cdots, x_m) = \vartheta(x_1, \cdots, x_m)$$

e prese le trasformate di Laplace di entrambi i membri (supponendo che i parametri $p_1, \cdots, p_m$ soddisfino alla (10)), si ricava

$$L(u)\, L(r^{\alpha-m}) = L(\vartheta),$$

cioè

$$L(u) = \frac{L(\vartheta)}{L(r^{\alpha-m})}.$$

Nota la funzione $L(u)$, la $u(P)$ può ottenersi, mediante l'inversione dalla trasformata, con la sola ipotesi della sommabilità di $u(P)$ in ω [6].

La (25) definisce però la funzione $u * r^{\alpha-m}$ *solamente* nei punti interni al dominio ω di integrazione e questo è sufficiente, in virtù del metodo di inversione di Riesz, per ottenere l'incognita u. Indichiamo ora come si possa egualmente ricavare tale funzione, collegando il metodo di Riesz con il metodo della trasformata di Laplace utilizzato nel § 1.

Consideriamo infatti, per maggior generalità, l'equazione (1) e risolviamo il problema di Cauchy con le condizioni (2). Sia $\psi(x_1, \cdots, x_m)$ una funzione continua in tutto lo spazio S_m con le sue derivate parziali fino all'ordine $2k$ incluso, nulla nei punti esterni al dominio τ e trasformabile assolutamente insieme a tali derivate per $(p_1, \cdots, p_m)$ soddisfacenti alla (10).

Fissato comunque nello spazio S_m il punto $P(x_1, \cdots, x_m)$ applichiamo la formula di Green alla funzione:

(6) L. Amerio, *Sulla trasformata doppia di Laplace*. « Atti R. Accad. d'Italia », vol. XII, (1941) pp. 758–59.

$$u(y_1,\cdots,y_m)\left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}-\sum_2^m{}_h\frac{\partial^2}{\partial y_h^2}+\lambda\right)^{(k)}\psi(x_1-y_1,\cdots,x_m-y_m)-$$

$$-\psi(x_1-y_1,\cdots,x_m-y_m)\left(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}-\sum_2^m{}_h\frac{\partial^2}{\partial y_h^2}+\lambda\right)^{(k)}u(y_1,\cdots,y_m)=$$

$$=u(Q)\,E_k(\psi(P-Q))-\psi(P-Q)\,E_k(u(Q)),$$

ove E_k opera sulle coordinate $y_1,\cdots,y_m$.

Se indichiamo con σ_ρ quella parte dell'ipersuperficie conica σ col vertice in R, che risulta contenuta nel dominio T_P si ha allora, per le (1) e (2),

$$(28)\qquad \int_{\omega_\rho}u(Q)\,E_k(\psi(P-Q))\,d\omega=\int_{\omega_\rho}f(Q)\,\psi(P-Q)\,d\omega+$$

$$+\sum_0^{k-1}{}_i\int_{\sigma_\rho}\Big\{E_{k-i-1}(u(Q))\,\frac{\partial E_i(\psi(P-Q))}{\partial\nu}-$$

$$-E_i(\psi(P-Q))\,\frac{\partial E_{k-i-1}(u(Q))}{\partial\nu}\Big\}\,d\sigma.$$

In particolare, se prendiamo,

$$E=\Delta\quad,\quad \psi(P)=\frac{r^{\alpha+2k-m}(P)}{H_m(\alpha+2k)}\qquad(\alpha>m),$$

ricaviamo

$$\Delta_i(\psi)=\frac{r^{\alpha+2(k-i)-m}(P)}{H_m(\alpha+2(k-i))}$$

e la (28) diventa

$$(29)\quad \frac{1}{H_m(\alpha)}\int_{\omega_\rho}u(Q)\,r^{\alpha-m}(P-Q)\,d\omega=\frac{1}{H_m(\alpha+2k)}\int_{\omega_\rho}f(Q)\,r^{\alpha+2k-m}(P-Q)\,d\omega+$$

$$+\sum_0^{k-1}{}_i\frac{1}{H_m(\alpha+2(k-i))}\int_{\sigma_\rho}\Big\{E_{k-i-1}(u(Q))\,\frac{\partial r^{\alpha+2(k-i)-1}(P-Q)}{\partial\nu}$$

$$-r^{\alpha+2(k-i)-1}(P-Q)\,\frac{\partial E_{k-i-1}(u(Q))}{\partial\nu}\Big\}\,d\sigma.$$

Questa si riduce alla (25) quando si ponga $k=1$, si tengano presenti le (2) e P si prenda interno a ω (in tale ipotesi si annullano infatti gli integrali ipersuperficiali nei secondi membri delle (25) e (29)).

Osserviamo ora che le $E_i(\psi(P-Q))$ sono nulle nei punti Q esterni al semicono retrogado col vertice in P. La (28) si scrive perciò

$$(30)\quad \{E_k(\psi)\}*u(P)=\psi*f(P)+\sum_0^{k-1}{}_i\int_\sigma\Big\{E_{k-i-1}(u(Q))\,\frac{\partial E_i(\psi(P-Q))}{\partial\nu}-$$

$$-E_i(\psi(P-Q))\,\frac{\partial E_{k-i-1}(u(Q))}{\partial\nu}\Big\}\,d\sigma=\psi*f(P)+F(P),$$

dove la funzione F (P) risulta nulla in tutti i punti P interni al dominio T_R.

Prendiamo ora le trasformate di entrambi i membri, osservando che risulta se ψ [P soddisfa a convenienti condizioni all'infinito, analogamente a quanto si è detto nel § 1)

$$\mathrm{L}(\mathrm{E}_k(\psi)) = \left(p_1^2 - \sum_2^n p_i^2 + \lambda\right) \int^* \mathrm{L}(\psi).$$

Si ha allora per la (9)

$$\left(p_1^2 - \sum_2^n p_i^2 - \lambda\right) \mathrm{L}(u) \mathrm{L}(v) = \mathrm{L}(u) \mathrm{L}(f) - \mathrm{L}(\mathrm{F})$$

e quindi, per le (8) e (9),

$$\mathrm{L}(u) \mathrm{L}(v - f * \mathrm{G}) = \mathrm{L}(\mathrm{F} * \mathrm{G}),$$

cioè

$$u * (v - f * \mathrm{G}) = \mathrm{F} * \mathrm{G}.$$

Come si è già visto nel § 1, il secondo membro è nullo entro T_k.

Procedendo come si è fatto nel § 1 si ricava di qui la soluzione u [P nei punti di ω:

$$u(\mathrm{P}) = f * \mathrm{G}(\mathrm{P}).$$

È da notare infine come la soluzione u [P si ottenga convergente sulla stessa scelta sotto larghissime condizioni la funzione ψ P

Analisi matematica. — *Sul calcolo numerico degli autovalori* (*). Nota di Nils Zeilon, presentata (**) dal Socio M. Picone.

Nella Nota presente si indica un metodo che permette il calcolo numerico degli *autovalori per eccesso* successivi a cominciare dal più piccolo numero di autovalori *per difetto*. Il metodo viene esposto nel caso più semplice della teoria classica degli autovalori, ma sembra probabile che possa ulteriormente impiegarsi, anche in condizioni più generali.

1. Sia

$$(A) \qquad \lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots, \lambda^{(n)}, \ldots$$

una successione di numeri positivi sempre divergenti avente per limite il primo autovalore λ_1 di una equazione integrale lineare regolare e reale simmetrica ordinaria precisamente $\mathrm{E}(x, y)$. È noto che a tale successione corrisponde una successione di funzioni $\varphi', \varphi'', \varphi''', \ldots, \varphi^{(n)}, \ldots$ che è inoltre generalmente assai più difficile di calcolare con la stessa accuratezza i valori per ciascun corrispondente punto x nei casi nei quali è evidente che la successione (A) converge relativamente lenta

---

(*) Presentata nella presente Nota si riferisce ad una conferenza tenuta dall'autore a Parigi presso l'Istituto Henri Poincaré per le applicazioni nel febbraio. Il manoscritto della Nota è stato dall'autore completato nell'ottobre successivo, e consegnato per mezzo di Antonio Signorini.

(**) Nella seduta del 11 gennaio 1947.

λ_1, non è sempre facile determinare esattamente il *grado di approssimazione* ottenuta.

Mi propongo di dimostrare che *è possibile trovare una successione*

$$(B) \qquad \mu', \mu'', \cdots, \mu^{(\alpha)} \cdots,$$

sempre CRESCENTE tale che ciascun suo termine sia combinazione lineare di un numero finito di termini della (A) e tale inoltre che $\lim \mu^{(\alpha)} = \lim \lambda^{(\alpha)} = \lambda$.

2. Richiamiamo succintamente alcune nozioni della teoria classica. Dato il nucleo $K(x, \xi)$, che suppongo simmetrico e definito positivo, rimane determinato l'operatore

$$Kf = \int_0^1 K(x, \xi) f(\xi) \, d\xi .$$

Gli autovalori dell'equazione integrale $\varphi - \lambda K\varphi = 0$, tutti positivi e distinti siano

$$(1) \qquad \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \cdots,$$

inoltre si suppone che questi autovalori siano ben separati, in particolare che il secondo autovalore λ_2 non sia troppo vicino a λ_1.

Alla successione $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ corrisponde la successione di funzioni ortogonali, autofunzioni del problema, $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$.

Sia ora $v_0(x)$ una funzione scelta in modo da dare presumibilmente una abbastanza buona prima approssimazione della φ_1. Ne segue che nello sviluppo

$$(2) \qquad v_0 = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \cdots \quad ; \quad \Sigma_\nu c_\nu^2 = 1 ,$$

la costante c_1 è probabilmente predominante ed ha un valore di poco inferiore all'unità, mentre tutti gli altri coefficienti hanno dei valori numerici piccoli. Formiamo, per iterazione $v_1 = Kv_0, v_2 = Kv_1, \cdots$ ecc.

Avremo delle nuove funzioni, le quali, vanno avvicinandosi sempre più ad una funzione che differisce volta a volta dalla φ_1 soltanto per un fattore costante. Infatti, poichè si ha

$$Kv_0 = \Sigma_\nu \frac{c_\nu}{\lambda_\nu} \varphi_\nu(x), \cdots \quad , \quad K^{(\alpha)} v_0 = \Sigma_\nu \frac{c_\nu}{\lambda_\nu^\alpha} \varphi_\nu(x),$$

si osserva che l'operatore K introduce delle nuove potenze delle λ_ν nei denominatori degli sviluppi delle v, e pertanto serve ad accentuare sempre più, per ogni nuova iterazione, la predominanza del primo termine della serie.

Ad ogni funzione v *corrisponde il valore per eccesso*, di λ_1, soggetto alla condizione di rendere minimo l'integrale

$$\int_0^1 [Kv - \lambda v]^2 \, dx .$$

Segue che abbiamo da calcolare una serie di integrali

$$K_0 = \Sigma_\nu c_\nu^2 = 1 \quad ; \quad K_1 = \Sigma_\nu \frac{c_\nu^2}{\lambda_\nu} \quad ; \quad K_2 = \Sigma_\nu \frac{c_\nu^2}{\lambda_\nu^2}, \cdots$$

È noto che le frazioni

$$(A') \qquad \lambda^{(0)} = \frac{K_0}{K_1} \quad ; \quad \lambda' = \frac{K_1}{K_2} \quad ; \quad \lambda'' = \frac{K_2}{K_3}, \cdots$$

formano una successione decrescente e avente per limite λ_1.

D'ora in avanti sostituiremo alla successione (A) la (A') *definita da un processo d'iterazione ben determinato.*

3. Consideriamo ora l'*errore per eccesso* dei diversi termini della (A'). Sia $\varepsilon^{(\alpha)} = \lambda^{(\alpha)} - \lambda_1$. Si ha

$$(4) \qquad \varepsilon^{(\alpha)} = \frac{\sum_1^\infty{}_\nu \frac{c_\nu^2}{\lambda_\nu^\alpha}}{\sum_1^\infty{}_\nu \frac{c_\nu^2}{\lambda_\nu^{\alpha+1}}} - \lambda_1 = \frac{\sum_2^\infty{}_\nu \frac{c_\nu^2}{\lambda_\nu^{\alpha+1}}(\lambda_\nu - \lambda_1)}{\sum_1^\infty{}_\nu \frac{c_\nu^2}{\lambda_\nu^{\alpha+1}}}.$$

Supponiamo $c_0 \neq 0$. (Nel caso contrario prendiamo invece il primo coefficiente non nullo dopo della c_1). In ogni serie, che interviene nella (4), al crescere di α, il primo termine diventa sempre più preponderante. Segue che

$$\varepsilon^{(\alpha)} \to \frac{c_2^2}{\lambda_2^{\alpha+1}}(\lambda_2 - \lambda_1)\frac{\lambda_1^{\alpha+1}}{c_1^2} \qquad (\alpha \to \infty).$$

Quindi $\varepsilon^{(\alpha)} / \varepsilon^{(\alpha+1)} \to \lambda_2 / \lambda_1$, relazione che, più semplicemente, scriviamo

$$(5) \qquad \lim \frac{\varepsilon'}{\varepsilon''} = \lim \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'''} = \cdots = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

Con un ragionamento più preciso applichiamo alla espressione $\frac{\varepsilon' K_2}{\varepsilon'' K_3} - \frac{\varepsilon'' K_3}{\varepsilon''' K_4}$ la *disuguaglianza di Schwarz*. Si ha $\frac{\varepsilon' K_2}{\varepsilon'' K_3} \geqq \frac{\varepsilon'' K_3}{\varepsilon''' K_4}$ cioè

$$(6) \qquad \frac{\varepsilon' \lambda''}{\varepsilon''} \geqq \frac{\varepsilon'' \lambda'''}{\varepsilon'''} \geqq \cdots \geqq \frac{\varepsilon^{(\alpha)} \lambda^{(\alpha+1)}}{\varepsilon^{(\alpha+1)}} \cdots \geqq \lambda_2.$$

Per le (6) il valore della λ_2 si ricava dunque come limite di una successione decrescente, i cui termini sono essenzialmente i quozienti delle prime differenze delle $\lambda^{(\alpha)}$. Queste differenze $\varepsilon^{(\alpha)}$ costituiscono una serie la cui convergenza è la stessa della serie geometrica $\Sigma_n (\lambda_1/\lambda_2)^n$.

Ci si deve quindi aspettare *che un piccolo valore numerico del quoziente* $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ *sia la condizione essenziale perchè il processo iterativo converga rapidamente.*

4. CONVESSITÀ DELLE $\varepsilon^{(\alpha)}$. Proviamo che

$$\varepsilon' - 2\varepsilon'' + \varepsilon''' \geqq 0 \,. \tag{7}$$

Segue dalle (6) che

$$\varepsilon' - 2\varepsilon'' + \varepsilon''' \geqq \frac{\lambda'''}{\lambda''} \frac{\varepsilon''^2}{\varepsilon'''} - 2\varepsilon'' + \varepsilon''' = \frac{1}{\varepsilon'''} (\varepsilon'' - \varepsilon''')^2 -$$

$$- \left(1 - \frac{\lambda'''}{\lambda''}\right) \frac{\varepsilon''^2}{\varepsilon'''} = \frac{1}{\varepsilon'''} (\varepsilon'' - \varepsilon''')^2 \left(1 - \frac{\varepsilon''^2}{\lambda''(\varepsilon'' - \varepsilon''')}\right).$$

Ma l'ultimo fattore, per le ipotesi fatte, è certamente positivo, inoltre tende verso il valore 1:

$$1 - \frac{\varepsilon''^2}{\lambda''(\varepsilon'' - \varepsilon''')} \to 1 - \frac{\varepsilon''}{\lambda''\left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)} = 1 \,.$$

Nella pratica numerica è probabile che sussistono delle condizioni più restrittive della (7). Se il processo di approssimazioni successive è abbastanza avanzato, i fattori λ'', λ''', $\cdots$ della (6) saranno sensibilmente uguali, trascurando allora gli errori di secondo ordine, si avrà probabilmente

$$\frac{\varepsilon'}{\varepsilon''} \geqq \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'''} \cdots \to \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \,,$$

e ancora si può prevedere che questa successione non è solamente monotona *ma è inoltre convessa.*

5. Ora, non conoscendo direttamente le ε', bisogna invece soltanto basarsi sullo studio delle *differenze*

$$\varepsilon' - \varepsilon'' \quad , \quad \varepsilon'' - \varepsilon''', \cdots . \tag{8}$$

Per la (7) abbiamo che esse formano una successione decrescente di numeri positivi. Inoltre si ha che

$$\frac{\varepsilon' - \varepsilon''}{\varepsilon'' - \varepsilon'''} = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon''} \frac{\left(1 - \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right)}{\left(1 - \frac{\varepsilon'''}{\varepsilon''}\right)} \to \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{\left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)}{\left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \,,$$

cioè

$$\lim \frac{\varepsilon' - \varepsilon''}{\varepsilon'' - \varepsilon'''} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \,.$$

Per le applicazioni occorre però precisare il comportamento dei quozienti

$$q' = \frac{\varepsilon' - \varepsilon''}{\varepsilon'' - \varepsilon'''} \,. \tag{9}$$

Sia Γ un numero positivo qualunque e consideriamo le quantità

$$Q' = \frac{\lambda'' \lambda'''}{\Gamma^2} q', \tag{10}$$

si ha allora che

$$\lim Q' = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\Gamma^2}. \tag{11}$$

Ora, per un calcolo elementare

$$\varepsilon' - \varepsilon'' = \frac{K_1 K_3 - K_2^2}{K_2 K_3} = \frac{1}{K_2 K_3} \Sigma_\mu \Sigma_\nu \frac{c_\mu^2 c_\nu^2}{\lambda_\mu \lambda_\nu} \left(\frac{1}{\lambda_\mu} - \frac{1}{\lambda_\nu} \right)^2,$$

di modo che

$$Q' = \frac{\Sigma_\mu \Sigma_\nu \frac{c_\mu^2 c_\nu^2}{\lambda_\mu \lambda_\nu} \left(\frac{1}{\lambda_\mu} - \frac{1}{\lambda_\nu} \right)^2}{\Gamma^2 \Sigma_\mu \Sigma_\nu \frac{c_\mu^2 c_\nu^2}{\lambda_\mu^2 \lambda_\nu^2} \left(\frac{1}{\lambda_\mu} - \frac{1}{\lambda_\nu} \right)^2} = \frac{\Sigma_\mu \Sigma_\nu \frac{c_\mu^2 c_\nu^2}{\lambda_\mu \lambda_\nu} \left(\frac{1}{\lambda_\mu} - \frac{1}{\lambda_\nu} \right)^2}{\Gamma^2 K_3 K_4 (\varepsilon'' - \varepsilon''')}.$$

Ponendo

$$Q' = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\Gamma^2} + \Theta'$$

si ha

$$\Theta' = \frac{\Sigma_\mu \Sigma_\nu \frac{c_\mu^2 c_\nu^2}{\lambda_\mu \lambda_\nu} \left(1 - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_\mu \lambda_\nu} \right) \left(\frac{1}{\lambda_\mu} - \frac{1}{\lambda_\nu} \right)^2}{\Gamma^2 K_3 K_4 (\varepsilon'' - \varepsilon''')} \tag{12}$$

Giova notare che in queste espressioni le serie doppie contengono solamente termini positivi. Quindi, formando i quozienti

$$Q'' \frac{\Theta'}{\Theta''} \quad , \quad Q''' \frac{\Theta''}{\Theta'''}, \dots, \tag{13}$$

si trovano delle espressioni alle quali si può applicare la disuguaglianza di Schwarz.

Si ha

$$Q'' \frac{\Theta'}{\Theta''} \geqq Q''' \frac{\Theta''}{\Theta'''} \geqq \dots.$$

Possiamo quindi enunciare il teorema seguente: *La successione delle quantità* (13) *è decrescente e convessa* (*in giù*).

6. Sia $Q' - 1 = L + \Theta' = \xi'$, e consideriamo la successione

$$\frac{1}{\xi'}, \frac{1}{\xi''}, \dots \tag{14}$$

Per provare che *anche essa è convessa*, prendiamo le differenze di secondo ordine

$$\Delta_2' = \frac{\xi'' - \xi'''}{\xi'' \xi'''} - \frac{\xi' - \xi''}{\xi' \xi''} = - \frac{1}{\xi' \xi'' \xi'''} (\xi' \xi''' - \xi''^2)$$

si trova che

$$-\Delta_2' \geqq \frac{1}{(Q'-1)(Q''-1)(Q'''-1)} \cdot G,$$

dove il fattore G è uguale a

$$\frac{L}{\Theta'''}(\Theta''-\Theta''')^2\left(1-\frac{\Theta''^2}{\Theta''-\Theta'''}\frac{L+\Theta'''}{LQ'}\right)$$

Per definizione $L=\frac{\lambda_1\lambda_2}{\Gamma^2}-1$, numero certamente positivo (per una scelta conveniente della Γ); di più l'ultima parentesi tende verso il valore 1 per $\alpha=\infty$; si riconosce d'altra parte che essa deve sempre rimanere vicina a questo valore. Siamo dunque in grado di affermare che *la successione delle* (14), *manifestamente costituita da numeri positivi e crescenti, è pure convessa* (*in giù*).

7. COSTRUZIONE DI SUCCESSIONI DI VALORI PER DIFETTO. – Per risolvere ora il nostro problema, partiamo dalla seguente ovvia osservazione. Dato che $\lim\lambda'=\lim\lambda''=\cdots=\lambda_1$, se prendiamo una qualunque combinazione lineare, sia

$$l'=\frac{a'\lambda'+a''\lambda''}{a'+a''}$$

delle λ', λ'', è chiaro che $\lim l'=\lambda_1$.

Poniamo $a''=p$, $a'=-1$, $p>1$; si trova

$$l'=\lambda_1+\frac{p\varepsilon''-\varepsilon'}{p-1},$$

e l' è un valore per eccesso, o per difetto, secondo che $p\gtrless\varepsilon'/\varepsilon''$.

Talvolta è facile affermare con sicurezza che un certo numero $a>1$ è minore di λ_1 (1). In tal caso basta prendere $p=a$; la successione

$$l'=\frac{a\lambda''-\lambda'}{a-1} \qquad (15)$$

darà certamente, per ogni valore della α, un valore per difetto. È pure facile dimostrare, cosa infatti quasi evidente, che la successione delle (15) è crescente.

8. Maggiore interesse presenta forse l'impiego del teorema del n. 6. Poniamo quindi $p'=Q'$, $p''=Q''$, $\cdots$, le Q essendo definite dalla (10). Per il numero Γ è allora naturale di scegliere uno dei valori per eccesso conosciuti: segue allora dalla (11) che i valori ottenuti *debbono avvicinarsi al limite* λ_1 *mantenendosi al disotto di* λ_1.

(1) Come è, per esempio, sempre possibile nel caso dei problemi tipo Sturm-Liouville.

Per il calcolo effettivo numerico è però generalmente lecito d'introdurre una modifica della (11). Mettiamo $\Gamma = \lambda_1$, ed invece delle Q' introduciamo semplicemente le q'. Questo nell'enunciato del n. 6, introduce certi errori relativi, di secondo ordine, ma non c'è dubbio che questi errori sono, nella maggior parte dei casi, trascurabili. Arriviamo allora alla successione

$$(C) \qquad \lambda(q') = \lambda'' - \frac{\lambda' - \lambda''}{q' - 1} \quad , \quad \lambda(q'') = \lambda''' - \frac{\lambda'' - \lambda'''}{q'' - 1}, \ldots$$

ossia

$$\lambda(q') = \frac{q'\lambda'' - \lambda'}{q' - 1}.$$

La serie dei valori (C) è d'un interesse particolare, giacchè essa in un certo senso costituisce il confine fra i campi delle successioni per eccesso e quelle per difetto.

Per le differenze si trova

$$(16) \qquad \lambda(q') - \lambda(q'') = (\lambda'' - \lambda''')\left(-\frac{1}{q' - 1} + \frac{1}{q'' - 1}\right),$$

formula che fa vedere come le $\lambda(q')$ s'avvicinano molto rapidamentz alla λ_1, dato che il fattore

$$-\frac{1}{q' - 1} + \frac{1}{q'' - 1} = \frac{q' - q''}{(q' - 1)(q'' - 1)}$$

tende verso 0 per $\frac{\varepsilon'}{\varepsilon''} \to \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$.

La (C) è ancora decrescente. Se invece prendiamo

$$(B') \qquad \mu' = \frac{1}{1 - s}(\lambda(q') - s\lambda''); \qquad (0 < s < 1)$$

abbiamo certamente, per ogni fissato valore di s, costruito *una successione che tende verso il limite* λ_1 *mantenendosi al disotto di* λ_1. Formando ancora le differenze

$$(18) \qquad \mu' - \mu'' = \frac{1}{1 - s}(\lambda'' - \lambda''')\left(-\frac{1}{q' - 1} + \frac{1}{q'' - 1} - s\right),$$

è evidente che finalmente, se il processo iterativo è abbastanza avanzato, si ha $\mu' - \mu'' \cong -\frac{s}{1 - s}(\lambda'' - \lambda''')$, cioè, le (18) rimangono crescenti.

Ora ricordiamo esplicitamente il teorema del n. 7. Ammettendo la convessità delle $\frac{1}{q' - 1}$ segue che una volta che il fattore $-\frac{1}{q' - 1} + \frac{1}{q'' - 1} - s$ *è diventato negativo, esso lo rimane per ogni iterazione successiva*, cioè il termine $-s$ rimane maggiorante e determina il segno negativo del fattore.

Se s è un numero piccolo è possibile che alcuni dei primi termini della (18) siano ancora positivi; la successione delle (B') comincia allora con l'essere

decrescente. Si perviene così al seguente criterio finale: studiando i valori successivi di una successione del tipo (B'), *dal momento che un valore minimo è raggiunto ed i valori cominciano a crescere si può asserire di trovarsi nel campo dei valori per difetto, e che tutti i valori seguenti sono anch'essi dei valori per difetto.*

9. Indichiamo brevemente come si presenti l'aspetto pratico del calcolo numerico.

Prendiamo come *primo esempio* il caso di π^2 determinato come autovalore dell'equazione differenziale $v'' + \lambda v = 0$. L'esempio è naturalmente semplicissimo ma serve nondimeno assai bene ad illustrare gli aspetti della teoria. In questo caso, come è ben noto, l'autovalore è fissato dalle condizioni $v(0) = v(1) = 0$. È evidente che conviene assumere $v_0(x) = x(1-x)$ e l'operazione K equivale alla determinazione successiva delle funzioni

$$Kv_0 = v_1 = \frac{1}{12}(x - 2x^3 + x^4) \quad ; \quad v_2 = \frac{1}{12}\left(\frac{x}{10} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^6}{30}\right).$$

Formando quindi i quozienti successivi

$$K_1 = \frac{\int v_0 v_0'' \, dx}{\int v_0^2 \, dx} \quad , \quad K_2 = \frac{\int v_0^2 \, dx}{\int v_0 v_1 \, dx}, \cdots$$

si trova facilmente la tavola dei differenti valori $\lambda', \lambda'', \cdots; q', q'', \cdots$, e $\lambda(q'), \lambda(q''), \lambda(q''')$. È notevole il fatto che occorrono e bastano due iterazioni per definire una successione $\lambda(q')$ di fortissima convergenza.

$\lambda' = 10{,}000\cdots$		
$\lambda'' = 9{,}882352941\,2$	$q' = 10{,}333333568$	$\lambda(q') = 9{,}869747899$
$\lambda''' = 9{,}870967741\,9$	$q'' = 9{,}380091206$	$\lambda(q'') = 9{,}869609059$
$\lambda^{IV} = 9{,}869753979\,8$	$q''' = 9{,}123891204$	$\lambda(q''') = 9{,}869604573$
$\lambda^{V} = 9{,}869620948\,5$		

Osserviamo ancora che i valori q' della tavola dànno già una certa approssimazione del quoziente $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, il cui valore esatto è 9 (corrispondente a $9\pi^2$ cioè alla funzione trigonometrica $\sin 3\pi x$; per ragioni evidenti di simmetria le funzioni $\sin 2\pi x$, $\sin 4\pi x$, ecc. . . , mancano negli sviluppi delle v_0, v_1, v_2).

Calcoliamo finalmente i valori μ' della formula (1). Prendiamo per la costante s il valore 0,004 e troviamo:

$$\mu' = 9{,}869698\cdots \quad , \quad \mu'' = 9{,}869603\,57 \quad , \quad \mu''' = 9{,}869603\,97\cdots$$

Abbiamo dunque trovato un valore μ'' minimo.

Si deve quindi avere

$$9{,}86960397 < \pi^2 < 9{,}869604573.$$

Infatti si sa che

$$\pi^2 = 9{,}86960440\ldots \ [2].$$

10. Come *secondo esempio*, presentiamo, senza entrare nei particolari, il calcolo della vibrazione più bassa della membrana ellittica, la cui frontiera è data dall'ellisse $x^2 + 4y^2 = 1$. Procedendo sempre per approssimazioni successive, partiamo dalla funzione $v_0 = x^2 + 4y^2 - 1$. La v_1 sarà allora determinata dalle condizioni

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) v_1 = v_0 \quad ; \quad v_1 = 0 \qquad \text{per} \quad x^2 + 4y^2 - 1 = 0,$$

e così via via per le funzioni seguenti. Calcolando anche la v_2, si trovano i valori seguenti:

$$\lambda' = 14{,}000\ldots$$

$$\lambda'' = 14{,}4493412 \qquad q' = 4{,}253 \qquad \lambda(q') = 14{,}285507$$

$$\lambda''' = 14{,}322858 \qquad q'' = 3{,}383 \qquad \lambda(q'') = 14{,}269781$$

$$\lambda^{IV} = 14{,}285474 \qquad q''' = 2{,}888 \qquad \lambda(q''') = 14{,}266174$$

$$\lambda^{V} = 14{,}272532.$$

Ora, se si prende per la s il valore 0,1, si trova la successione

$$\mu' = 14{,}26667 \quad , \quad \mu'' = 14{,}26267 \quad , \quad \mu''' = 14{,}26403$$

Si conclude che

$$14{,}26403 < \lambda_1 < 14{,}26617 \ [3].$$

Mi propongo in un successivo lavoro di dare al metodo esposto un più ampio sviluppo, applicandolo ad altri problemi di calcolo di autovalori. Mi è gradito esprimere al prof. Mauro Picone i sensi della mia viva riconoscenza per avere Egli messo cortesemente a mia disposizione i mezzi di calcolo e risultati importanti di precedenti esperienze, eseguite nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(2) Eseguendo tre iterazioni si otterrebbero altre tre cifre significative esatte.

(3) Vengono così confermate le prime tre cifre significative date dalla sig.na Maria Laura Ettore per λ_1 nella Nota: *Calcolo della frequenza più bassa di una membrana vibrante con contorno fisso avente la forma di ellisse* concernente un lavoro compiuto nell'Istituto nazionale per le Applicazioni del Calcolo (Cfr. pubblic. n. 140 seconda serie) di questo Istituto).

Geometria. — *Sulle superficie di Kummer e di Weddle.* Nota di ALDO ANDREOTTI, presentata (*) dal Socio F. SEVERI.

1. La jacobiana del sistema ∞^3 delle quadriche di S_3 per 6 punti dati, cioè il luogo dei vertici dei coni di 2° ordine per quei punti, è, com'è noto, una superficie del 4° ordine con 6 punti doppi nei 6 punti base, contenente la cubica gobba per quei 6 punti, le 15 rette che li uniscono 2 a 2 e le 10 rette d'intersezione delle coppie di piani pei medesimi.

Questa superficie, nota col nome di *superficie di Weddle* (1), non è, come riconobbe il Darboux (2), che una trasformata birazionale della classica *superficie di Kummer*. Anzi si dimostra che si può addirittura passare dall'una all'altra superficie mediante una certa trasformazione cremoniana fra i relativi spazi la cui natura è precisata nel n. 3 (3).

Orbene la ragione profonda di questo fatto nonchè la genesi della trasformazione cremoniana suddetta, viene messa in luce, dalla considerazione del sistema ∞^2 delle serie lineari g_3^1 appartenenti ad una retta doppia di genere 2.

Ed invero, se si assume come immagine della retta doppia una cubica gobba Γ, con 6 punti di diramazione, *le* ∞^2 *serie lineari* g_3^1 *della retta doppia, sono segate su* Γ *dai piani tangenti ai coni quadrici che passano pei 6 punti di diramazione* (4). Ne viene che la superficie di Weddle, W, avente i suoi punti doppi nei punti di diramazione di Γ essendo descritta dai vertici di quei coni, risulta riferita birazionalmente alla varietà delle g_3^1 di quella retta doppia. Di qui discendono subito l'equivalenza birazionale di W e della superficie di Kummer K inerente alla curva C rappresentata doppiamente su Γ,

(*) Nella seduta dell'11 dicembre 1948.

(1) Che per primo ebbe a considerarla. Ved. WEDDLE, «Cambridge and Dublin Mathematical Journal», t. V, p. 69 (1850).

(2) DARBOUX, « Bulletin des Sciences mathématiques », t. 1, p. 348 (1870).

(3) Ved. R. W. H. T. HUDSON, *Kummer's quartic surface*, «Cambridge, University Press», p. 166 (1905). Cfr. anche G. HUMBERT, «Journal de Mathématique», ser. IV, t. IX, p. 466 (1893); DARBOUX, loc. cit.

(4) È questo un caso particolare di un teorema dimostrato in una mia Memoria dal titolo: *Le serie lineari sopra una retta multipla ed in particolare sopra una retta doppia*, « Annali di Mat. », ser. IV, t. 27 (1948). Nel caso in esame, la dimostrazione si riduce ad una facile verifica. Risulta infatti per essere la g_3^1 d'indice 2 sulla « retta » doppia Γ, che i piani individuati dai suoi gruppi, inviluppano un cono quadrico. Viceversa, dato un cono di 2° ordine, e sia $x_0 x_2 - x_1^2 = 0$, luogo delle rette unenti il punto (0001) al punto $(1, \lambda, \lambda^2, 0)$ variabile su $x_3 = 0$; affinchè i suoi piani tangenti $\lambda^2 x_0 - 2\lambda x_1 + x_2 = 0$, seghino su Γ, data parametricamente colle $x_i = x_i(t)$ $(i = 0, 1, 2, 3)$, l'immagine d'una g_3^1 occorre e basta che la funzione $\lambda(t)$ definita da $\lambda^2 x_0(t) - 2\lambda x_1, (t) + x_2(t) = 0$ sia diramata solo nei punti di diramazione di Γ, ossia che il discriminante $\Delta(t) = x_1^2(t) - x_0(t) x_2(t)$ si annulli in quei 6 punti. Ciò prova l'asserto perchè $\Delta(t)$ coincide, meno il segno, col primo membro dell'equazione del cono ove x_i si sostituisca con $x_i(t)$ $(i = 0, 1, 2, 3)$.

le proprietà di tale trasformazione e la possibilità di esser subordinata da una trasformazione cremoniana fra gli spazi di W e K.

2. Il modo più rapido di conseguire lo scopo è quello di fissare l'attenzione sulla corrispondenza birazionale fra la superficie di Jacobi J (5) relativa a C, considerata come varietà delle coppie di punti di C, e la varietà delle g_3^1 di C, che associa una g_3^1 di C ed un punto P di J quando la coppia di punti di C omologhi di P insieme ad uno fissato D_1 dei punti doppi $D_1, \cdots, D_6$ della g_2^1 (canonica) dà un gruppo di g_3^1.

In tal modo, per l'osservazione fatta al n. 1, W risulta in corrispondenza birazionale coi gruppi d'una involuzione del second'ordine di J generatavi dalla trasformazione di prima specie corrispondente alla g_4^2 doppia della g_2^1 canonica. Di qui l'equivalenza di W e K.

Approfondendo lo studio di questa trasformazione, indicando con M un punto *variabile* su C e con le stesse lettere munite di apice i punti omologhi di Γ, si ha che:

a) i 6 punti doppi di K corrispondenti alla serie canonica e alle coppie $D_1 D_i$ $(i = 2, \cdots, 6)$ di C, si mutano rispettivamente nei punti doppi D_1', D_i' $(i = 2, \cdots, 6)$ di W;

b) i rimanenti 10 punti doppi di K, corrispondenti alle 10 coppie $D_i D_j$ $(i, j = 2, \cdots, 6; i \neq j)$ vanno nelle 10 rette di W intersezione delle coppie di piani $D_1' D_i' D_j'$, $D_h' D_k' D_l'$ (1, i, j, h, k, l diversi fra loro);

c) la conica di K corrispondente alle coppie $D_1 M$, si muta nella Γ su W;

d) le rimanenti 15 coniche di K vanno nelle 15 rette $D_i' D_j'$ $(i, j = 1, \cdots, 6; i \neq j)$ di W.

Le *a*), *b*), *c*), sono evidenti; quanto alla *d*) si osservi che la cosa è immediata per le 5 coniche di K corrispondenti alle coppie $D_i M$ $(i = 2, \cdots, 6)$; esse si mutano rispettivamente nelle rette $D_1' D_i'$.

Le rimanenti 10 coniche di K corrispondono alle coppie trasformate delle $D_i M$ mediante le $g_4^2 = D_1 + D_i + D_j + D_h$ (1, i, j, h diversi fra loro). Ora se PQ è la coppia trasformata di $D_i M$, risulta: $D_1 + P + Q + D_j + D_h + M \equiv 2 (D_1 + D_j + D_h)$ dato che $M + P + Q$ e $D_1 + D_j + D_h$ sono corresiduali di D_i rispetto alla g_4^2 considerata. Pertanto.

$$D_1 + P + Q \equiv D_j + D_h + \bar{M}$$

ove $\bar{M}$ è il coniugato di M rispetto alla serie canonica $|2 D_1|$. Ciò dimostra che il cono di S_3 corrispondente alla $|D_1 + P + Q|$ ha un piano tangente per $D_j' D_h'$ e quindi il vertice su $D_j' D_h'$. Ciò dimostra la *d*).

(5) Per le superficie di JACOBI e di KUMMER considerate, come qui facciamo, quali immagini, la prima della varietà delle coppie di punti di C e la seconda di un'involuzione generata da una trasformazione di prima specie su quella, si veda ad esempio: SEVERI, *Serie, sistemi di equivalenza e corrispondenze algebriche sulle varietà algebriche*, a cura di F. CONFORTO ed E. MARTINELLI, Roma, ed. Cremonese, p. 353 (1942); o anche la Memoria di ENRIQUES-SEVERI, *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques*. « Acta Mathematica », t. 32, 33 p. 283 e sgg. (1909-10) prix Bordin 1907.

3. Ciò posto determiniamo il sistema lineare di curve di K che dà come immagine proiettiva W.

Tale sistema ha 10 punti base semplici nei 10 punti doppi di K di cui in *b*) al n. 2, cioè nei punti doppi di K fuori della conica γ omologa di Γ.

L'ordine n delle curve del sistema è 6. Infatti esso è uguale all'ordine delle curve di W omologhe delle sezioni piane di K dato che nel passaggio da K a W nessuna curva si muta in un punto. Tra quest'ultime v'è la γ contata 2 volte cui corrisponde il doppio di Γ cioè una curva del 6° ordine [6].

Dimostriamo che questo sistema di sestiche su K è segato dal sistema ∞^3 omaloidico [7] di cubiche per le coniche γ_1, γ_2, γ_3 omologhe delle rette $D'_2 D'_3$, $D'_1 D'_2$, $D'_3 D'_1$. Ed invero quel sistema di sestiche è completo dato che la serie caratteristica è la g_4^2 canonica; d'altra parte fra quelle sestiche v'è la $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ cui corrisponde la sezione di W col piano $D'_1 D'_2 D'_3$.

Si conclude che *la corrispondenza birazionale fra* K *e* W *posta al n.* 2 *può subordinarsi con una trasformazione cremoniana fra i relativi spazi, la quale muta piani e rette del primo spazio in superficie cubiche e cubiche gobbe del secondo e viceversa* [8].

4. Portando a coincidere due, D_5, D_6, ad esempio, dei punti doppi della g_2^1 di C, in un punto nodale D*, che compaia *ex novo* sulla curva C* limite di C, la superficie *iperellittica di Kummer* relativa a C, si porta su una superficie *quasi iperellittica di Plücker* K* relativa a C* e alla coppia neutra costituita dai due punti sovrapposti in Q [9].

Le g_3^1 di C vanno nelle g_3^1 neutre di C* rispetto alla detta coppia; la W, come immagine delle g_3^1 della retta doppia considerata, si porta in una superficie W* con un punto triplo in Q' (ove vengono a coincidere i due punti doppi

(6) Ciò si vede anche considerando una qualunque altra sezione λ, tangente a K; per esempio quella corrispondente alle coppie PM con P fisso su C. I piani per D'_1 P' segano sulla curva Λ omologa di λ, la g_2^1 canonica dato che ogni piano D'_1 P' M' è tangente a due dei coni pei 6 punti D. Sulla rigata delle rette individuate dai gruppi di g_2^1, che è d'ordine $n-3$, si ha $\Lambda \equiv 2R + G_\delta$ essendo R una sezione piana e G_δ un gruppo di $\delta \geq 0$ generatrici. Di qui $n = [\Lambda, R] = 2[R, R] + \delta = 2(n-3) + \delta$, onde $n = 6 - \delta$. Ma Λ è di genere effettivo 2 e di genere virtuale 3. Quindi $\delta = 0$ e $n = 6$.

(7) Come si vede dalla rappresentazione piana d'una di quelle superficie.

(8) *Non è* invece *possibile passare da* K *a* W *con una trasformazione cremoniana quadratica.* Invero il sistema omaloidico di quadriche che darebbe luogo alla trasformazione, segherebbe su K un sistema ∞^3 di grado 4, genere 3 e coi punti base (eventuali) nei punti doppi di K (dato che una superficie del 4° ordine, qual'è W, non ha curve eccezionali). Ora di tali sistemi ve ne sono di due tipi; il sistema (C^8) segato dalle quadriche per 6 punti doppi (non complanari) di K e il sistema (C^6) segato dalle quadriche per una conica di K ed uno dei punti doppi fuori di questa. Nel primo caso il sistema di quadriche non è omaloidico; nel secondo la trasformata di K ha più di 6 punti doppi.

(9) Ved la Memoria di SEVERI, *Funzioni quasi abeliane.* «Pontificia Accademia Scientiarum» Scripta Varia, 4, p. 306 e sgg. (1947) ove lo studio di questa superficie è ampiamente illustrato ed inquadrato nello studio generale delle varietà quasi abeliane.

D'_5 , D'_6 di W) immagine del sistema delle g^1_3 neutre, appartenenti alla retta doppia limite della precedente.

Tra K* e W* si hanno le relazioni limiti delle precedenti; in particolare si passa da K* a W* mediante una trasformazione cremoniana ottenuta col sistema di superficie del 3° ordine passanti per le coniche γ'^*_1 , γ'^*_2 , γ'^*_3 limiti di γ_1 , γ_2 , γ_3 .

La retta nodale di K* si trasforma così, nel punto triplo di W* ed i 3 punti cuspidali giacenti su γ'^*_1 , γ'^*_2 , γ'^*_3 in 3 rette per quello, le comiche segate su K* dai piani per la retta nodale mutansi in cubiche gobbe su W* ecc. ecc.

5. Le considerazioni svolte per W possono in parte estendersi alle W_{2r} $(r = 1, 2, \cdots)$ luogo dei vertici degli S_0-coni di un S_{3r} i cui iperpiani tangenti segano sopra una Γ^{3r} razionale normale immagine d'una retta doppia di genere $2r$, le g^r_{3r} lineari della retta doppia [10]. Queste W_{2r} risultano (per le considerazioni analoghe a quelle del n. 2) trasformate birazionali di *varietà di Wirtinger* [11], immagini di involuzioni di 2° ordine sulla *varietà di Jacobi* relativa alla curva rappresentata doppiamente su Γ.

Geometria. — *Una questione di geometria Riemanniana connessa a un problema di ottica geometrica.* Nota di VITTORIO DALLA VOLTA, presentata [*] dal Socio A. SIGNORINI.

1. L'oggetto della presente Nota ha origine da una questione proposta dal prof. Signorini, riguardante l'inversione del seguente teorema di Ottica Geometrica:

Si consideri un mezzo isotropo eterogeneo, di indice di rifrazione $n(x, y, z)$, *funzione delle coordinate del generico punto P; si chiami inoltre* SPAZIO DI FERMAT *la varietà di Riemann a tre dimensioni, individuata dall'elemento lineare ds tale che:*

$$ds^2 = n^2(x, y, z)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \qquad (1.1)$$

Orbene, se lo spazio di Fermat (1.1) *ha curvatura Riemanniana costante, i fronti d'onda epicentrali sono sferici* (*come nel caso di un mezzo omogeneo*) o, in altri termini, *se lo spazio di Fermat ha curvatura costante, nella rappresentazione conforme di esso sullo spazio euclideo, alle sfere di quest'ultimo corrispondono sfere geodetiche* [1].

Prendendo le mosse da tale questione, mi sono posto il problema di determinare, più in generale, quali siano le varietà di Riemann R_n, a un numero qualsiasi di dimensioni, rappresentabili conformemente sull'S_n euclideo con *conservazione delle ipersfere*; e ho trovato che *se e solo se la* R_n *ha curvatura costante, è possibile rappresentarla conformemente sullo* S_n *euclideo in modo che le ipersfere si mutino in ipersfere.*

(10) Ved. il mio citato lavoro, n. 6.

(11) WIRTINGER, *Untersuchungen über thetafunctionen*, Leipzig, Teubner (1895).

(*) Nella seduta dell'8 gennaio 1949.

(1) Seguendo la denominazione di BIANCHI, chiamo *sfera geodetica* di centro O e raggio r, *il luogo dei punti che hanno da* O *distanza geodetica costante, uguale ad* r.

Osservo subito che la sufficienza della condizione si può ritenere nota in base alle proprietà conosciute della rappresentazione conforme sull'S_n delle R_n a curvatura costante [2].

2. Ho riconosciuto invece la *necessità* della costanza della curvatura, K_0, applicando i risultati trovati da Fubini in un lavoro del 1909 [3] in cui si studiano le *trasformazioni di contatto* (nel senso di Lie) fra due varietà Riemanniane ad n dimensioni, R_n, $\bar{R}_n$, che mutano le ipersfere di una nelle ipersfere dell'altra. Il risultato di Fubini è il seguente:
Siano:

$$ds^2 = g_{hk}\,dx^h\,dx^k \quad ; \quad d\bar{s}^2 = \bar{g}_{hk}\,d\bar{x}^h\,d\bar{x}^k \text{ [4]} \quad (h, k = 1, \cdots, n)$$

i quadrati degli elementi lineari rispettivamente di R_n e di $\bar{R}_n$. Individuiamo inoltre un'ipersfera di R_n con le coordinate x^i del suo centro e con il suo raggio x^0; e analogamente siano $\bar{x}^i$, $\bar{x}^0$ le coordinate del centro e il raggio di un'ipersfera di $\bar{R}_n$; una corrispondenza fra le ipersfere delle due varietà sarà rappresentata dalle formule

$$\bar{x}^\alpha = \bar{x}^\alpha(x^0, x^1, x^2, \cdots, x^n) \text{ [5]}. \tag{2.1}$$

Affinchè la (2.1) provenga da una trasformazione di contatto fra R_n, $\bar{R}_n$, è necessario e sufficiente che essa muti ipersfere tangenti in ipersfere tangenti; ossia, detto *fascio* l'insieme delle ipersfere tangenti in un punto, la (2.1) dovrà far corrispondere fasci a fasci; se poi alle ipersfere di raggio nullo corrispondono ipersfere di raggio nullo, la (2.1) è subordinata addirittura da una *trasformazione puntuale* fra R_n, $\bar{R}_n$ (essendo omologhi i centri di sfere di raggio nullo corrispondenti).

Ora, il Fubini trova che *affinchè esista una trasformazione di contatto (o, in particolare, puntuale) del tipo voluto, è necessario e sufficiente che sussista una trasformazione conforme (data dalle* (2.1)*) fra le due metriche (indefinite) ad* $n+1$ *dimensioni:*

$$ds'^2 = g_{hk}\,dx^h\,dx^k - (dx^0)^2 \quad : \quad d\bar{s}'^2 = \bar{g}_{hk}\,d\bar{x}^h\,d\bar{x}^k - (d\bar{x}^0)^2. \tag{2.2}$$

3. In base a quanto precede, il nostro problema è evidentemente ricondotto al seguente:

È dato un ds^2 conforme a quello Euclideo, e che potremo scrivere senz'altro nella forma:

$$ds^2 = \frac{1}{U^2}\sum_i^n (dx^i)^2 \tag{3.1}$$

(2) Ved. per esempio: L. BIANCHI, *Lezioni di Geometria Differenziale*, vol. II, parte II (dell'ultima edizione), capp. XXVI-XXVII.

(3) G. FUBINI, *Sulle rappresentazioni che conservano le ipersfere*. «Ann. di Mat.», ser. III, t. 16 (1909), pp. 141-160. Ved. anche un lavoro dello stesso Autore, dal titolo: *Sulla teoria delle ipersfere e dei gruppi conformi ecc.* «Rend. Ist. Lomb.» (2), 38 p. 178 (1905).

(4) Secondo l'uso, si sottintende il segno di sommazione rispetto a un indice ripetuto in alto e in basso, nel corso di una stessa espressione.

(5) D'ora in poi, gl'indici *greci* assumono i valori $0, 1, \cdots, n$; mentre quelli *latini* assumono i valori $1, 2, \cdots, n$.

(essendo U una funzione delle x^i – non costante, per escludere il caso banale delle similitudini – continua e derivabile fino all'ordine che occorre nel seguito). Quale forma deve avere U affinchè

$$(3.2) \qquad ds'^2 = ds^2 - (dx^0)^2$$

sia conforme a

$$(3.3) \qquad d\bar{s}'^2 = \sum_1^n{}_i (d\bar{x}^i)^2 - (d\bar{x}^0)^2 \,?$$

Dovrà quindi potersi determinare una funzione V delle $n+1$ variabili x^i, x^0, tali che la forma

$$(3.4) \qquad (UV)^{-2} \cdot \sum_1^n{}_i (dx^i)^2 - V^{-2} (dx^0)^2$$

sia riducibile al tipo

$$(3.5) \qquad \sum_1^n{}_i (d\bar{x}^i)^2 - (d\bar{x}^0)^2 .$$

Affinchè ciò sia possibile, è necessario e sufficiente che le componenti del tensore di Riemann costruito per la (3.4) siano tutte nulle.

Ora, poichè la (3.4) è di tipo *ortogonale*, dovremo considerare solamente i seguenti tipi di componenti, $'R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ in ognuno dei quali gl'indici assumono valori diversi [6]: $'R_{\alpha\beta\gamma\delta}$; $'R_{\alpha\beta\beta\gamma}$; $'R_{\alpha\beta\beta\alpha}$. Scritta poi la (3.4) sotto la forma:

$$'g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$$

è, per la (3.4):

$$(3.6) \qquad 'g_{ii} = (UV)^{-2} \;\; ; \;\; 'g_{\alpha\beta} = 0 \;\; ; \;\; 'g_{00} = -V^{-2} \qquad (\alpha \neq \beta).$$

Distinguendo allora i casi in cui uno o più degli indici di $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ assumono il valore zero, dovremo in definitiva considerare le seguenti equazioni:

$$(3.7) \qquad 'R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0 \;\; ; \;\; 'R_{hihk} = 0 \;\; ; \;\; 'R_{oihk} = 0 \;\; ; \;\; 'R_{hook} = 0 \;\; ;$$
$$'R_{hihh} = 0 \;\; ; \;\; 'R_{hooh} = 0 .$$

4. Applicando le note formule [7] che forniscono le componenti del tensore di Riemann per una forma quadratica del tipo ortogonale (3.4), si trova immediatamente che la prima delle (3.7) è identicamente soddisfatta, mentre le altre si riducono alle seguenti

$$(4.1_1) \qquad \partial_{hk} (UV) = 0$$

$$(4.1_2) \qquad V_{ok} = 0$$

$$(4.1_3) \qquad \partial_{kk} (UV) - U_{kk} V = 0$$

$$(4.1_4) \qquad UV\, \partial_{hh} (UV) + UV\, \partial_{ii} (UV) - \sum_1^n{}_m [\partial_m (UV)]^2 + V_o^2 = 0$$

(6) Vi è notoriamente una notevole discordanza fra i vari AA. sulla maniera di porre gl'indici delle componenti del tensore di Riemann; io mi attengo alla notazione che si trova in L. P. Eisenhart, *Riemannian Geometry*, Princeton University Press, Princeton 1926.

(7) Ved. per esempio il libro sopra citato di Eiserhart, p. 44.

$$(4.\,1_5)\qquad UV\,\partial_{hh}(UV) - U_{hh}\,UV^2 - \sum_1^n{}_m\,[\partial_m(UV)]^2 + \sum_1^n{}_m\,U_m\,\partial_m(UV)\cdot V - \\ - (V_{oo}\,V - V_o^2) = 0$$

nelle quali l'indice α in basso indica derivazione rispetto alla variabile x^α, e si è posto

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \quad ; \quad \partial_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial x^{\alpha\beta}}.$$

Ora, confrontando le $(4.\,1_1)$, $(4.\,1_3)$ si ha subito che deve essere

$$(4.\,2)\qquad U_{hk} = 0.$$

Inoltre, se dalla generica $(4.\,1_4)$ si sottrae l'analoga che si ha ponendo j al posto di i, si ha, dividendo per UV evidentemente non nullo,

$$(4.\,3)\qquad \partial_{ii}(UV) = \partial_{jj}(UV)$$

cioè $\partial_{ii}(UV)$ non dipende dall'indice i.

Ma risulta dalla $(4.\,1_5)$ (in cui si legga i al posto di h) che anche $UV\,\partial_{ii}(UV) - U_{ii}(UV)^2$ è un'espressione indipendente dall'indice i; cosicchè è:

$$(4.\,4)\qquad U_{ii} = U_{jj}$$

per tutti i valori degl'indici i, j.

Ora, dalla (4. 1) si ha immediatamente che U deve essere della forma

$$(4.\,5)\qquad U = \sum_1^n{}_i\,\underset{i}{u}(x^i),$$

in cui ogni $\underset{i}{u}$ è *funzione della sola variabile* x^i. Ma allora la (4. 2) ci dice ovviamente che ognuna delle $\underset{i}{u}$ è un *polinomio di secondo grado*, in cui il coefficiente di $(x^i)^2$ è lo stesso per ogni valore di i; cosicchè possiamo scrivere:

$$(4.\,6)\qquad U = a\sum_1^n{}_i\,(x^i)^2 + 2\,b_i\,x^i + c.$$

E questa ci dice, come è notissimo, che la nostra varietà di Riemann (3. 1) è a *curvatura Riemanniana costante*. Questo fatto è quindi condizione *necessaria per l'integrabilità del sistema* (4. 1); ma per l'osservazione alla fine del n. 1, esso è anche *sufficiente*. Si può quindi enunciare:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una varietà di Riemann (3. 1) *sia rappresentabile conformemente su un iperspazio euclideo con conservazione delle ipersfere è che la sua curvatura Riemanniana sia costante.*

5. Nei §§ 3–5 del lavoro sopra citato, Fubini determina tutte le coppie di superficie che si corrispondono con conservazione di cerchi (geodetici), trovando che – se non sono costituite da superficie simili – esse devono essere composte di *superficie a curvatura costante*; il risultato viene raggiunto con metodo compli-

cato e approfittando solo indirettamente del teorema generale da lui stabilito. Lo stesso fatto segue però immediatamente, dal teorema qui dimostrato, se si ricorda che *ogni superficie è rappresentabile conformemente sul piano euclideo*, cosicchè, per $n = 2$, il risultato del n. 4 vale per *tutte* le superficie.

Un'altra conseguenza dello stesso teorema è la seguente: alla fine del § 1, Fubini enuncia il seguente risultato: *Una trasformazione biunivoca fra i punti di due varietà di Riemann, che porti ipersfere in ipersfere, è necessariamente conforme.* Allora, dal teorema del numero precedente segue immediatamente che le *uniche varietà di Riemann che possono porsi in corrispondenza con un iperspazio euclideo, in modo che ipersfere vadano in ipersfere, sono quelle a curvatura costante.*

Geometria. — *Trasformazioni puntuali fra due piani proiettivi in una coppia di punti corrispondenti a direzioni inflessionali di specie superiore indeterminate.* Nota di CARMELO LONGO, presentata (*) dal Socio E. BOMPIANI.

1. Una trasformazione puntuale regolare in una coppia di punti corrispondenti è approssimata da una proiettività, in generale, solo fino all'intorno del 1° ordine ed ha tre direzioni inflessionali di specie 1 (ossia tali che ad elementi di flesso ordinario tangenti ad esse corrispondano pure elementi di flesso ordinario): se e solo se queste direzioni sono indeterminate la trasformazione è approssimata fino a tutto l'intorno del 2° ordine (almeno) da una proiettività (1).

Questo caso è stato di recente studiato dal VAONA (2) il quale ha poi generalizzato i suoi risultati al caso in cui la trasformazione sia approssimata da una proiettività fino all'intorno d'ordine $s - 2$ (nel qual caso sono indeterminate le direzioni inflessionali di specie $s - 2$, cioè tali che ad un flesso del tipo $y = mx + [s]_x$, ove $[s]_x$ indica termini d'ordine $\geq s$ in x, corrisponda un flesso dello stesso tipo).

Per una trasformazione puntuale i due fatti: 1° l'avere tutte le direzioni inflessionali fino a quella di specie $s - 2$ indeterminate; 2° l'essere approssimata fino a tutto l'intorno d'ordine s da una proiettività, per $s > 2$ *non* sono equivalenti: dal secondo segue il primo, ma non viceversa.

Vale quindi la pena di esaminare come si possa approssimare con trasformazioni algebriche una trasformazione approssimata da proiettività fino all'intorno d'ordine h e per cui siano indeterminate le direzioni inflessionali di specie $s - 2$ ($s \geq h$).

(*) Nella seduta dell'8 gennaio 1949.

(1) E. BOMPIANI, *Sulle trasformazioni puntuali fra piani proiettivi.* « Memorie Acc. d'Italia », 1942; M. VILLA, *Trasformazioni quadratiche osculatrici ad una corrispondenza puntuale fra piani proiettivi.* Note I e II, « Rend. Acc. d'Italia », 1942. Per altri lavori intorno alle trasformazioni puntuali vedi quelli citati in: M. VILLA, *Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari.* Note I, II, III, IV, « Rend. Acc. Lincei », 1948.

(2) Di questo lavoro il VAONA ha dato comunicazione nel recente III° Congresso dell'U. M. I. (Pisa, settembre 1948); esso viene pubblicato in questi « Rendiconti ».

Ottengo i seguenti risultati: *Una trasformazione puntuale fra due piani proiettivi, regolare in due punti corrispondenti* O *ed* O′ *per la quale tutte le direzioni inflessionali fino a quelle di specie* $s-2$ *sono indeterminate, ma non lo sono quelle di specie* $s-1$, *ed inoltre tale che sia approssimata da una proiettività fino all'intorno d'ordine* h, *ammette trasformazioni algebriche* $T(1, k-1)$ *che l'approssimano fino a tutto l'intorno d'ordine* k $(h \leq k \leq s)$ *e per ogni direzione inflessionale di specie* $s-1$, *ammette una trasformazione algebrica* $T(1, s)$ *che l'approssima lungo quella direzione fino all'intorno d'ordine* $s+1$.

Per mezzo di queste trasformazioni algebriche osculatrici dò un significato degli invarianti relativi ai vari ordini (3).

2. TRASFORMAZIONI ALGEBRICHE OSCULATRICI. – Sia T una trasformazione puntuale fra due piani proiettivi π e π', regolare negli intorni di due punti corrispondenti O ed O′.

Riferiamo i due piani a due sistemi di coordinate proiettive (x, y, z) per π ed (x', x', z') per π', di cui O ed O′ siano i punti di coordinate $(0, 0, 1)$.

Supponiamo che la T sia approssimata fino all'intorno d'ordine h $(h \geq 2)$ da una proiettività Ω: se assumiamo nel piano π come rette $x=0$, $y=0$, $y=x$ e $z=0$ le corrispondenti in Ω delle rette di π', $x'=0$, $y'=0$, $z'=0$, le equazioni della T sono del tipo:

$$x' = \alpha x + [h+1]_{xy}$$
$$y' = \alpha y + [h+1]_{xy}$$

ove con $[h+1]_{xy}$ si sono indicati i termini di grado maggiote di h in x e y.

Per la T sono evidentemente indeterminate tutte le direzioni inflessionali fino a quelle di specie $h-2$: se ora supponiamo che siano indeterminate anche le direzioni inflessionali fino a quelle di specie $s-2$ con $s > h$, le equazioni della T sono del tipo:

$$(1) \quad \begin{cases} x' = \alpha x[1 + \varphi_h(x,y) + \varphi_{h+1}(x,y) + \cdots + \varphi_{s-1}(x,y)] + \\ \qquad + \alpha\varphi_{s+1}(x,y) + [s+2]_{xy} \\ y' = \alpha y[1 + \varphi_h(x,y) + \varphi_{h+1}(x,y) + \cdots + \varphi_{s-1}(x,y)] + \\ \qquad + \alpha\psi_{s+1}(x,y) + [s+2]_{xy} \end{cases}$$

con le φ_k forme di grado k nelle x, y.

Le $s+2$ direzioni inflessionali di specie $s-1$ sono date dall'equazione:

$$x\psi_{s+1}(x,y) - y\varphi_{s+1}(x,y) = 0.$$

Se fra queste ve ne sono tre distinte esse si potranno assumere come $x=0$, $y=0$, $y=x$: con ciò si ha

$$\varphi_{s+1}(x,y) = x\vartheta_s(x,y) \quad , \quad \psi_{s+1}(x,y) = y\chi_s(x,y)$$

(3) Si noti che i risultati qui esposti sono diversi da quelli del VAONA anche nel caso $s=h$ perchè egli non si occupa di trasformazioni algebriche approssimanti quella data.

con

$$\chi_s(x, y) = \vartheta_s(x, y) + (y - x)\zeta_{s-1}(x, y)\ ^{(4)}.$$

Le equazioni della T possono perciò scriversi:

$$x' = \alpha y\,[1 + \varphi_h + \cdots + \varphi_{s-1} + \vartheta_s] + [s + 2]$$

$$y' = \alpha y\,[1 + \varphi_h + \cdots + \varphi_{s-1} + \vartheta_s + (y - x)\zeta_{s-1}] + [s - 2]$$

ovvero:

$$x' = \alpha x\,[1 + \varphi_h + \cdots + \varphi_{s-1} + \chi_s + (x - y)\zeta_{s-1}] + [s + 2]$$

$$y' = \alpha y\,[1 + \varphi_h + \cdots + \varphi_{s-1} + \chi_s] + [s + 2].$$

Supposto ora $k \leq s$ determiniamo le forme $\psi_j(x, y)$ in modo che si abbia:

$$(1 + \varphi_h + \cdots + \varphi_{k-1})(1 + \psi_h + \cdots + \psi_{k-1}) = 1;$$

in particolare si ha:

$$\psi_h \equiv -\varphi_h \quad , \quad \psi_{h+1} \equiv -\varphi_{h+1}, \cdots, \psi_{2h-1} \equiv -\varphi_{2h-1} \quad ,$$

$$\psi_{2h} \equiv -\varphi_h^2 - \varphi_{2h}, \cdots, \psi_{k-1} \equiv -\varphi_{k-1} + \{\varphi_{k-1}\}$$

ove $\{\varphi_{k-1}\}$ rappresenta un'espressione dipendente dalle φ_j con $j < k - 1$.

Posto allora

$$\Psi_{k-1} = z^{k-1} + \psi_h z^{k-h-1} + \cdots + \psi_{k-1}$$

le equazioni:

$$x' = \frac{\alpha x z^{k-2}}{\Psi_{k-1}} \quad , \quad y' = \frac{\alpha y z^{k-2}}{\Psi_{k-1}}$$

rappresentano una trasformazione algebrica $(1, k-1)$, che indicheremo con $T(1, k-1)$, la quale approssima la T fino a tutto l'intorno d'ordine k. I punti base della $T(1, k-1)$ sono i $k-1$ punti d'intersezione, ciascuno contato $k-2$ volte, della $\Psi_{k-1} = 0$ con la retta $z = 0$, ossia i $k-1$ punti impropri che hanno per direzioni le direzioni delle rette $\psi_{k-1} = 0$.

Per $k = s + 1$ si hanno due trasformazioni $T_x(1, s)$ e $T_y(1, s)$ che approssimano la T fino all'intorno d'ordine $s + 1$ rispettivamente lungo le direzioni $x = 0$ ed $y = 0$: per queste, indicate con $\psi_{s,x}$ e $\psi_{s,y}$ la forma ψ_s nelle relative Ψ_s si ha:

$$\psi_{s,y} = \psi_{s,x} + (y - x)\zeta_{s-1}. \tag{2}$$

Quindi: *data una trasformazione puntuale* T *fra due piani proiettivi, regolare negli intorni di due punti corrispondenti, per la quale tutte le direzioni inflessionali sono indeterminate fino a quelle di specie* $s - 2$, *esiste una proiettività* Ω *che l'approssima fino a tutto l'intorno d'ordine* h, *con* $h \geq 2$ *e vi sono trasformazioni algebriche* $T(1, k-1)$ *che l'approssimano fino a tutto l'intorno d'ordine* k *con*

(4) Nel caso che delle $s + 2$ direzioni inflessionali ve ne sono solamente due distinte, scelte queste come $x = 0$ ed $y = 0$ si ha:

$$\chi_s(x, y) = \vartheta_s(x, y) + ax^{\mu} y^{s-\mu}.$$

Nel caso poi che tutte le $s + 2$ direzioni coincidano con $y = 0$, si ha:

$$x\chi_s = \varphi_{s+1} + ay^{s+1}.$$

$h \leq k \leq s$; *inoltre, per ciascuna delle* $s+2$ *direzioni inflessionali di specie* $s-1$, *esiste una trasformazione* $T(1, s)$ *che l'approssima lungo quella direzione fino a tutto l'intorno d'ordine* $s+1$ [5].

3. INVARIANTI DELLA TRASFORMAZIONE PUNTUALE. – Se nel piano π cambiamo la retta all'infinito ($z = 0$) ed il punto unità sulla $y = x$, le formole di trasformazione sono del tipo:

$$(3) \qquad x = \frac{\rho\,\bar{x}}{1 - u\bar{x} - v\bar{y}} \quad , \quad y = \frac{\rho\,\bar{y}}{1 - u\bar{x} - v\bar{y}};$$

le corrispondenti formole di trasformazione in π', tenuto conto del modo di cambiarsi della retta dell'infinito sono

$$(3') \qquad x' = \frac{\alpha\rho\,\bar{x}'}{\bar{\alpha} - u\bar{x}' - v\bar{y}} \quad , \quad y' = \frac{\alpha\rho\,\bar{y}'}{\bar{\alpha} - u\bar{x}' - v\bar{y}'}.$$

Per effetto delle precedenti trasformazioni le equazioni (1) della T si trasformano nelle seguenti:

$$(4) \qquad \bar{x}' = \bar{\alpha}\,\bar{x}\,[1 + \rho^h\,\varphi_h(\bar{x}, \bar{y}) + \{\rho^{h+1}\,\varphi_{h+1}(\bar{x}, \bar{y}) + \rho^h\,(u\bar{x} + v\bar{y})\,\varphi_h(\bar{x}, \bar{y})\}] + \cdots$$

ed analoga per la $\bar{y}'$.

Distinguiamo ora i seguenti casi: 1° $h < s-1$; 2° $h = s-1$; 3° la trasformazione T è approssimata dalla Ω fino all'intorno d'ordine s, ossia $\varphi_j \equiv 0$ per $j < s$.

Primo caso: $h < s+1$.

Al variare di u e v, ossia della retta $\bar{z} = u\bar{x} + v\bar{y}$, si hanno ∞^2 trasformazioni $T(1, h+1)$ osculatrici, i cui punti base appartengono alle rette:

$$\rho\,\varphi_{h+1} + (u\bar{x} + v\bar{y})\,\varphi_h = 0:$$

possiamo allora determinare la retta all'infinito (quindi $u = v = 0$) in modo che due delle $h+1$ rette precedenti coincidano con $x = 0$ ed $y = 0$, cioè con due delle rette inflessionali di specie $s-1$ (ossia in modo che la $T(1, h+1)$ abbia due punti base su due delle rette inflessionali). Ne segue:

$$\varphi_{h+1}(x, y) \equiv xy\,\varphi_h(x, y).$$

Fatto ciò le equazioni (4) divengono

$$\bar{x}' = \bar{\alpha}\,\bar{x}\,[1 + \rho^h\,\varphi_h + \cdots + \rho^{s-1}\,\varphi_{s-1} + \rho^s\,\vartheta_s] + [s+2]$$

$$\bar{y}' = \bar{\alpha}\,\bar{y}\,[1 + \rho^h\,\varphi_h + \cdots + \rho^{s-1}\,\varphi_{s-1} + \rho^s\,\{\vartheta_s + (y - x)\,\zeta_{s-1}\}] + [s+2].$$

Queste equazioni pongono in evidenza che (in generale): *una trasformazione che sia approssimata da una proiettività* Ω *fino a tutto l'intorno d'ordine* h *ed*

(5) Una di queste $T(1, s)$ approssima la T fino a tutto l'intorno d'ordine s: la relativa direzione inflessionale, per la quale l'approssimazione è fino all'intorno d'ordine $s+1$, è una direzione *d'iperosculazione* per la T e la $T(1, s)$.

Le direzioni d'iperosculazione sono state introdotte la prima volta dal BOMPIANI nella Memoria citata al n. 1.

abbia tutte le direzioni iperinflessionali indeterminate fino a quelle di specie $s-2$, *con* $s \geqq h$, *possiede i seguenti invarianti*:

1° h *invarianti dipendenti dall'intorno d'ordine* $h+1$;

2° *altri* $h-1$ *invarianti dipendenti dall'intorno d'ordine* $h+2$;

3° *altri* $k-1$ *invarianti dipendenti dall'intorno d'ordine* k *per ogni* k *per il quale si ha* $h+3 \leqq k \leqq s$;

4° *altri* $2s$ *invarianti dipendenti dall'intorno d'ordine* $s+1$.

Una *costruzione geometrica* dei precedenti invarianti viene fornita dalle osservazioni seguenti:

I birapporti fra le tre rette inflessionali $x=0$, $y=0$ ed $y=x$, che sono tre qualsiansi delle $s+2$ rette caratteristiche, con le $k-1$ rette che proiettano da O i punti base della $T(1,k-1)$, che approssima la T fino a tutto l'intorno d'ordine, k, forniscono gli invarianti dipendenti dall'intorno d'ordine k ma non dai precedenti. Infine $2s-1$ invarianti dipendenti dall'intorno di ordine $s+1$, sono forniti dalle $s+2$ rette caratteristiche e dalle s rette che proiettano i punti base della $T_x(1,s)$: osservato poi che per la (2) le s rette che proiettano i punti base della $T_y(1,s)$ insieme alle analoghe della $T_x(1,s)$ ed alle s rette caratteristiche, fuori delle $x=0$ ed $y=0$, appartengono ad una stessa involuzione, si ha che le s rette relative alla $T_y(1,s)$ forniscono un altro invariante dipendente dall'intorno $s+1$.

Queste costruzioni pongono in evidenza l'interesse di considerare le trasformazioni $T(1,k-1)$.

Secondo caso: $h=s-1$.

Le equazioni della T sono:

$$x' = \alpha x[1+\varphi_{s-1}+\vartheta_s]+[s+2]$$

$$y' = \alpha y[1+\varphi_{s-1}+\vartheta_s+(y-x)\zeta_{s-1}]+[s+2].$$

Per effettto delle (3) e (3′) la prima di queste si trasforma nella:

$$\bar{x}' = \bar{\alpha}\bar{x}[1+\rho^{s-1}\varphi_{s-1}(\bar{x},\bar{y})+\{\rho^s\vartheta_s+\rho^{s-1}(u\bar{x}+v\bar{y})\varphi_{s-1}(\bar{x},\bar{y})\}]+[s+2].$$

Analogamente al caso precedente, considerate le ∞^2 $T_x(1,s)$ al variare di u e v, si può fare una scelta intrinseca della retta all'infinito in modo che due dei punti base della relativa $T_x(1,s)$ appartengano alle due rette caratteristiche $x=0$, $y=0$: con ciò si ha:

$$\vartheta_s(x,y) = xy\,\vartheta_{s-2}(x,y).$$

Le equazioni della T divengono:

$$x' = \alpha x[1+\varphi_{s-1}+xy\,\vartheta_{s-2}]+[s+2]$$

$$y' = \alpha y[1+\varphi_{s-1}+xy\,\vartheta_{s-2}+(y-x)\zeta_{s-1}]+[s+2].$$

In tal caso si hanno $s-1$ invarianti relativi all'intorno d'ordine s, ed altri $2s-2$ invarianti relativi all'intorno d'ordine $s+1$: per il loro significato geometrico si può procedere in modo analogo al caso precedente.

Terzo caso: le equazioni della T sono del tipo [6]:

$$x' = \alpha x[1 + \vartheta_s] + [s + 2]$$

$$y' = \alpha y[1 + \vartheta_s + (y - x)\zeta_{s-1}] + [s + 2]$$

Si hanno $2s$ invarianti dipendenti dall'intorno d'ordine $s + 1$: per il loro significato si può procedere in modo analogo al primo caso.

Osservazione: Per la determinazione intrinseca della retta $\chi = 0$, si è supposto che almeno due direzioni inflessionali fossero distinte: se queste coincidono si potrà scegliere, riferendoci per esempio al primo dei tre casi, la retta $\chi = 0$ in modo che due dei punti base della $T(1, h + 1)$ coincidano con l'unica direzione inflessionale di specie $s - 1$.

Astronomia. — *Serie oscillatorie ad autoregressione disturbata e moto polare di Chandler.* Nota I di TITO NICOLINI, presentata [*] dal Socio L. CARNERA.

1. In due precedenti ricerche [1] si è decomposto il moto polare nei due termini fondamentali, annuo e chandleriano, nel modo più conveniente suggerito dalla analogia dei battimenti. Due conseguenze importanti sono emerse dall'analisi: anzitutto i termini fondamentali variano notevolmente in ampiezza, invertendo anche, a volte, il loro rapporto reciproco; inoltre il termine di Chandler è risultato a periodo variabile, e se le variazioni non sono forti da paragonarsi a quelle di ampiezza, sono tuttavia significanti.

Questa variabilità di periodo conduce ad una concezione di periodicità alternativa rispetto a quella di G. U. Yule [2], ed in un certo senso più generale. Questo Autore ha considerato periodicità a *schema autoregressivo* [3], in cui esiste un periodo d'oscillazione proprio stabilito, mentre perturbazioni locali non fanno che alterare la fase senza compensazione successiva (mentre il periodo, superata la perturbazione locale, torna o regredisce al suo valore fisso). Invece, nei due contributi [1] citati risulta che alle perturbazioni locali seguono non solo cambiamenti di fase, ma anche variazioni vere e stabili di periodo (e di ampiezza), con salti discontinui da un intervallo al successivo.

Ma quei contributi si arrestavano a tale immediata constatazione, senza approfondirla: occorre invece tornare sull'argomento, sia per controllare ed individuare con maggior sicurezza le variazioni ed i loro caratteri, sia per

(6) È questo il caso studiato dal VAONA (vedi n. 1).

(*) Nella seduta del 13 novembre 1948.

(1) «Contr. Astron. Capodimonte», ser. II, vol. III, nn. 7 ed 8.

(2) «Phil. Trans.», A, 226, p. 267.

(3) Questa denominazione è di M. G. KENDALL, *Contributions to the Study of Oscillatory Time Series* (Cambridge U. P., 1946).

esaminare con sufficiente rigore formale la questione della loro significanza. Infatti l'errore medio del periodo P_m relativo ad un generico intervallo, fu dedotto come per le serie di tempo equidistanti (a periodo fisso), con la formola $\frac{\sigma}{n}$, n essendo il numero dei cicli dell'intervallo (in luogo della $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, adatta per una successione di periodi P affetti ancora da dispersione σ, ma indipendenti); in tal modo risultava una valutazione massima per la significanza, ed occorre rivederla.

I risultati numerici fondamentali di quelle ricerche, dai quali parte la presente, sono riportati alle prime due colonne della Tabella I. La 1ª colonna dà i passaggi osservati del moto di Chandler (cioè della traiettoria fittizia polare dedotta dal moto complessivo eliminando la componente annua) al meridiano di Greenwich (+ X); la 2ª le differenze, cioè i successivi valori del periodo di Chandler; la 3ª le semiampiezze del moto, considerando la oscillazione X (la sola deducibile dai lavori di Chandler, e molto scadente per forti errori) fino al 1890, la media delle X ed Y successivamente (il moto di Chandler è approssimativamente circolare); la 4ª colonna, date calcolate, è spiegata appresso. La serie antica, fino al 1890, contiene qui, rispetto alle T in precedenza pubblicate, qualche lievissima correzione.

I valori $\overline{P}$ dal 1890 (inizio della serie internazionale) sono smussati tenendo conto dei passaggi della traiettoria chandleriana, oltre che per + X, anche per ± Y, come spiegato al 2° riferimento [1], e naturalmente costituiscono una serie nettamente superiore alla più antica; si noti che è preferibile perequare i valori P, soggetti a variazioni, anziché le date, che sono punti di riferimento abbastanza bene stabiliti. Le ampiezze delle oscillazioni in X ed Y del termine di Chandler, sono state valutate direttamente dai residui chandleriani del moto polare calcolati di decimo in decimo di anno, e non riportati per economia di spazio.

Ora consideriamo i gruppi delle prime dieci date e delle ultime otto della colonna T, in ciascuno dei quali si riscontrerà appresso un valore P relativamente uniforme. Le medie aritmetiche dei due gruppi sono 1847.883 e 1944.499, ed il periodo medio supposto uniforme tra queste due date risulta anni 1.1783; la colonna 4ª della tabella riporta la serie di date T_c equidistanti basata su questi valori.

Si osserva subito che la differenza $T - T_c$, che può denominarsi *scarto progressivo* o *cumulativo*, va crescendo per valori positivi fino al 1918, in cui raggiunge il valore massimo di anni 0.60, per scendere successivamente a zero. Questo metodo naturale ed immediato di esaminare le differenze tra intervalli osservati e calcolati con differenza uniforme, è analogo a quello usato nella determinazione degli errori progressivi delle rivoluzioni delle viti micrometriche colle massime digressioni delle circumpolari. Nel caso presente si hanno dunque rilevanti deviazioni progressive dalla periodicità uniforme, o altrimenti detto si ha la prova più immediata ed evidente che il periodo di Chandler varia.

TABELLA I.

Dati relativi ai passaggi del polo componente di Chandler al meridiano + X.

T	P	*a*	T_c	T	P	*a*	T_c
1843.2 ?	1.16 ?	20	43.17	1890.50	1.17	19	1890.30
44.36	1.26	24	44.35	91.80	1.27	16	91.48
45.62	1.23	22	45.53	92.95	1.17	15	92.66
46.85	1.07	10 ?	46.70	94.20	1.10	14	93.84
47.92	?	?	47.88	95.25	1.25	14	95.01
?	?	?	49.06	96.50	1.25	15	96.19
50.20 ?	1.10 ?	27	50.24	97.80	1.17	13	97.37
51.30 ?	1.20	19	51.42	98.85	1.23	14	98.55
52.50 ?	1.10	22	52.60	1900.15	1.15	13	99.73
53.60	1.37	47 ?	53.77	1.30	1.22	15	1900.91
54.97	1.20	31	54.95	2.50	1.15	14	2.08
56.17	1.13	25	56.13	3.65	1.20	12	3.26
57.30	1.23	16	57.31	4.90	1.10	15	4.44
58.53	1.14	20	58.49	5.90	1.22	14	5.62
59.67	1.26	21	59.67	7.15	1.12	18	6.80
60.93	1.17	18	60.84	8.30	1.30	22	7.98
62.10	1.40	22	62.02	9.60	1.12	23	9.15
63.50 ?	1.22	18	63.20	10.70	1.18	23	10.33
64.72	1.16	17	64.38	11.95	1.30	22	11.51
65.88	1.05	18	65.56	13.20	1.15	20	12.69
66.93	1.27	21	66.74	14.30	1.25	18	13.87
68.20	1.30	19	67.91	15.60	1.18	16	15.05
69.50	1.15	22	69.09	16.80	1.12	17	16.22
70.65	1.13	30	70.27	18.00	1.25	12	17.40
71.78	1.20	20	71.45	19.10	1.22	16	18.58
72.98	1.13	21	72.63	20.35	1.12	12	19.76
74.11	1.09	21	73.81	21.50	1.10	10	20.94
75.20	1.15	25	74.98	22.60	1.17	11	22.12
76.35	1.22	25	76.16	23.75	1.30	5	23.29
77.57	1.18	29 ?	77.34	25.00	0.97	4	24.47
78.75	1.23	22	78.52	26.00	1.13	8	25.65
79.98	1.10	17	79.70	27.20	1.18	6	26.83
81.08	1.14	20	80.88	28.30	1.02	6	28.01
82.22	1.13	18	82.05	29.40	1.17	8	29.19
83.35	1.30	14 ?	83.23	30.55	1.10	8	30.36
84.65	1.25	15	84.41	31.65	1.22	9	31.54
85.90	1.17	21	85.59	32.85	1.15	8	32.72
87.07	1.23	22	86.77	34.00	1.22	8	33.90
88.30	1.20	18	87.95	35.25	1.17	9	35.08
89.50	1.00	19	80.12	36.40	1.07	8	36.25
				37.50	1.17	7	37.43
				38.60	1.23	5	38.61
				39.70	1.18	7	39.79
				41.05	1.08	7	40.97
				42.15	1.17	12	42.15
				43.30	1.20	12	43.32
				44.50	1.20	16	44.50
				45.70	1.18	18	45.68
				46.83	1.15	19	46.86
				48.00			48.04

P in anni; *a* in unità 0".01.

Il segno ? indica date incerte o dubbi locali notevoli.

T_c = date equidistanti calcolate in base ai dati dell'uguaglianza

$$\frac{1944.499 - 1847.883}{82} = 1.1783 .$$

Dell'andamento dello scarto progressivo potrebbe farsi colpa alla vecchia serie (se non si conoscesse l'abilità ed accuratezza del Chandler); ma

come può verificarsi facilmente, anche per la più precisa serie internazionale moderna, posteriore al 1890, si riscontra lo stesso effetto.

Una precisazione formale può esprimersi come segue: se le perturbazioni di fase, e quindi di P locali (dei sistemi autoregressivi), vengono considerate analoghe ad errori d'osservazione, lo scarto progressivo viene a dipendere dalla dispersione delle perturbazioni. Queste vengono a dare dei P successivi indipendenti, cioè non aventi il vincolo di seguire (salvo fluttuazioni accidentali) la serie di date equidistanti della periodicità rigida. Allora lo scarto complessivo o cumulativo per un intervallo comprendente n cicli P può presumersi da una dispersione $\sigma\sqrt{n}$, essendo σ la dispersione della distribuzione dei P; difatti è ciò che approssimativamente si osserva. Invece in un sistema a periodo rigido, con scarti dovuti a soli errori di date (o di letture se si studiano le rivoluzioni di una vite esatta), lo scarto cumulativo presunto, o più precisamente la dispersione presunta per un intervallo di n cicli, resta sempre dell'ordine σ, la deviazione media di un singolo P. Quindi, dalla determinazione che risulterà appresso per σ, si deduce che qui non si ha a che fare con errori o con perturbazioni locali di periodicità rigida, ma vi è effettivamente variazione di periodo. Nei due casi ora considerati, il periodo medio dedotto da un intervallo di n cicli è affetto da una deviazione media rispettivamente $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ e $\frac{\sigma}{n}$; il primo valore sembrerebbe quello adatto al caso presente, ma la questione è più complessa, come si vedrà con una vera e propria analisi statistica dei dati della Tabella I.

2. Alla serie dei valori P della Tabella I, applichiamo il metodo delle differenze di variata [4], frequentemente usato per avere la dispersione di una serie di valori eliminando l'effetto di un eventuale andamento sistematico. Una tale serie è generata da fluttuazioni casuali sovrapposte ad un andamento regolare (per esempio polinomiale). Si considerino le serie ottenute differenziando successivamente la data, e sia σ_i^2 la varianza (quadrato della deviazione media) della serie delle i^{me} differenze. Si valuti ora il valore ridotto $\sigma_{ri}^2 = \frac{\sigma_i^2}{\binom{2i}{i}}$; da un certo valore di i (generalmente basso) in poi, i valori σ_{ri}^2 tendono ad un limite, e questo è una stima della varianza della componente casuale della serie data.

Il valore di i dal quale in poi σ_{ri} resta circa costante, indica il grado del polinomio che potrebbe rappresentare l'andamento generale. Ora partendo dalla serie degli 89 P della Tabella I, e differenziando successivamente, si ottengono le serie delle $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_i, \cdots$ per le quali le deviazioni medie ridotte risultano rispettivamente ($i = 0$, si riferisce alla serie P originaria):

4) M. G. KENDALL, loc. cit.; l'A. esprime ivi le sue riserve sull'applicazione del metodo agli schemi autoregressivi, come pure sull'uso non critico della denominazione « Periodo » in essi.

$i =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sigma_{ri} =$	7.4	8.4	8.2	8.1	8.1	7.9	8.0	7.9	7.9

(unità 0.01 anni).

Quindi l'andamento generale si approssima ad un andamento polinomiale di 5° grado, e le fluttuazioni casuali della serie P sembrerebbero corrispondere ad una deviazione media di anni 0.079. Ma appare strano che i valori originari P, i quali oltre le fluttuazioni locali contengono l'andamento, diano un valore σ inferiore a quello ottenuto dalle colonne seguenti; questo effetto è anche rilevato in un esempio del Kendall [5], ed appare dovuto alla presenza di valori anomali P (questi dànno forti salti nella serie, e le differenze vengono ad accrescersi troppo rapidamente).

In conclusione il valore 0.079 è eccessivo, e la dispersione dovuta alle fluttuazioni accidentali, escluso l'andamento, è inferiore a 0.074. Questo fatto, dell'effetto perturbatore dei valori anomali P sulla analisi statistica, e che ha reso inefficiente il metodo delle differenze, sarà ulteriormente rilevato al numero seguente in connessione alla leptocurtosi ingiustificata della distribuzione di tutti i valori P, e indicherà l'opportunità di separare detti valori anomali dagli altri per ricercare utili informazioni statistiche.

Osservando la serie dei segni delle non riportate differenze prime Δ_1 dei P, si riscontrano 59 variazioni e 28 permanenze (32 e 15 rispettivamente dal 1890), proporzione insignificantemente maggiore di quella prevista per una sequenza casuale [6]. Dunque l'anomalia ha origine non dall'alternarsi di valori alti e bassi di P, come nel primo esempio della Nota [5], ma effettivamente dalla presenza di valori P anomali. Eliminando questi valori, cresce un po' la proporzione delle variazioni, come si vedrà al n. 4.

La non riportata tabella delle differenze permette di rilevare bene, dai punti in cui le Δ_i elevate indicano salti di segno tra valori grandi, i P maggiormente anomali; questi risultano intorno alle date: 1852.50, 62.10, 89.50, 8.30, 14.30, 25.00, 41.05.

3. Ora passiamo a considerare la distribuzione delle frequenze F di tutti i valori P: essa è data dalla Tabella II; la 3ª colonna F_1 sarà spiegata appresso.

La distribuzione si può caratterizzare, tenendo conto che si ha un numero limitato di valori P e non una vasta popolazione, a mezzo dei parametri g_1 e g_2, deducibili dalle statistiche K, che hanno la funzione dei momenti [7]. Riferendosi a notazioni e parametri di Pearson, g_1 è una stima di $\gamma_1 = \sqrt{\beta_1}$

(5) *Advanced Theory of Statistics*, II, p. 390. È facile dare esempi di serie numeriche in cui non valgono le due condizioni supposte (fluttuazioni casuali e andamento); così nelle 2 serie ···1, —1, 1, —1, ···, e ···0, 0, 0, 5, 0, 0,···, le differenze si accrescono troppo rapidamente, producendo un effetto come quello rilevato.

(6) Cfr. R. A. FISHER, in « Quart. Jour. Roy. Met. Soc. », luglio 1926.

(7) R. A. FISHER, *Statistical Methods for Research Workers* (Oliver and Boyd, Edinburg), cap. III. La U. T. E. T. ha curato la traduzione italiana della 10ª edizione (1946).

(valore per una popolazione), e g_2 una stima di γ_2 (idem); queste quantità hanno valori nulli per una curva normale, e la prima dà una stima di obliquità (cioè deviazione dalla simmetria), la seconda una stima dell'eccesso, positivo (leptocurtosi, distribuzione appuntita, cioè eccesso di valori modali ed estremi, difetto di intermedi) o negativo (platicurtosi, eccesso di valori intermedi, rispetto alla distribuzione normale).

TABELLA II.

Frequenze dei valori P *del periodo di Chandler osservato.*

P (anni)	F	F_1	P	F	F_1	P	F	F_1	P	F	F_1
0.97	1	—	1.08	1	1	1.19	—	—	1.30	5	1
98	—	—	09	1	1	20	7	7	31	—	—
99	—	—	10	7	6	21	—	—	32	—	—
1.00	1	—	11	—	—	22	7	6	33	—	—
01	—	—	12	4	4	23	6	4	34	—	—
02	1	1	13	5	5	24	—	—	35	—	—
03	—	—	14	4	2	25	5	5	36	—	—
04	—	—	15	7	6	26	2	2	37	1	—
05	1	1	16	2	2	27	2	2	38	—	—
06	—	—	17	10	10	28	—	—	39	—	—
1.07	2	2	1.18	6	5	1.29	—	—	1.40	1	—

Il calcolo può procedere analogamente a quello dei momenti (fino al 4°) della distribuzione, a mezzo dello schema con autocontrollo del Charlier [8], comprese le correzioni di Sheppard, fino alle somme s_i di quello schema; per poi passare al calcolo delle quantità S_i e K_i e quindi g_1 e g_2, σ, Media, con lo schema indicato nel testo di R. A. Fisher.

Applicato il procedimento ai valori P ed F della Tabella II, si hanno i risultati sotto indicati (seguirà subito anche la spiegazione di quelli relativi alle F_1).

	Distribuzione F	Distribuzione F_1
M (anni)	1.177	1.171
σ »	0.074	0.058
g_1 (ed ω)	+ 0.115 (0.040)	— 0.131 (0.085)
g_2	+ 0.884	— 0.317

8) YULE-KENDALL, *An Introduction to the Theory of Statistics* (Griffin, London) o ARNE FISHER, *The Mathematical Theory of Probability, ecc.* (McMillan, New York).

Come indice di obliquità, è data anche la misura frequentemente usata ω del Pearson (corrispondente alla differenza tra valore medio e valore modale divisa per la dispersione, e che per le curve dei tipi di Pearson si valuta subito in funzione delle statistiche β [9]). L'asimmetria appare quindi molto lieve, mentre l'eccesso positivo appare forte, cioè la distribuzione appare notevolmente leptocurtica. Dalla eterogeneità o variabilità dei valori P, era da attendersi il contrario. Ma a parte la scarsità di dati alle estremità della distribuzione, la leptocurtosi proviene non dall'eccesso di valori centrali, ma precisamente dai pochi estremi anomali. Infatti questi influenzano fortemente il 4° momento, da cui dipende γ_2 o g_2; per esempio, togliendo solo l'ultimo (P = 1.40), l'eccesso viene negativo.

Dal carattere negativo intrinseco di γ_2 o g_2 per il caso attuale, risulta l'opportunità di separare per alcune deduzioni statistiche i P più anomali che la confondono, da entrambi i lati della distribuzione; essi non rientrano in una analogia di deviazioni accidentali, ma sono essenzialmente perturbazioni locali. Lo scopo immediato è ora di delimitare intervalli in ciascuno dei quali P rimanga sensibilmente uniforme, senza andamento sistematico appariscente. Perciò oltre a tali P visibilmente perturbati, conviene eliminarne anche altri che appaiono di transizione da un valore medio P ad un altro, e più spesso di scarsa influenza sulle medie che ci occorrono. Essi si riconoscono sia dalle differenze successive già usate al n. 2, sia dai residui P osservati meno P medi (che risultano via via con intervalli di prova fino ad eliminazione di andamenti sistematici). Si noti che il fatto essenziale che permette la reiezione di valori P locali senza eccessivo timore di erronee conseguenze, è l'abbandono già accettato al n. 1 degli schemi di periodicità rigida; s'intende occorre procedere con accortezza, senza di che, coi pochi dati disponibili, sono sempre possibili risultati ambigui.

In base ai detti criteri, gli intervalli eliminati e di transizione tra valori medi diversi di P, sono i seguenti: 1847.95–50.20 (di cui non si conosce la data intermedia); 53.60–54.97; 62.10–63.50; 68.20–69.50; 76.35–77.57; 83.35–84.65; 89.50–90.50; 98.85–1900.15; 8.30–9.60; 15.60–16.80; 23.75–26.00; 32.80–34.00; 38.60–39.70. Allora le frequenze risultano quelle date alla colonna F_1 della Tabella II, e le caratteristiche della distribuzione quelle riportate in tabellina. Può destare sorpresa il rilievo qui fatto di troppe variazioni; per ora si noti soltanto che il periodo sembra effettivamente soggetto a varie perturbazioni, cosa del resto già ammessa dopo l'introduzione dei concetti di Yule.

Come vedesi dalla tabellina, la asimmetria è aumentata ma è ancora lieve; questo indica che le anomalie o perturbazioni di P agiscono all'incirca simmetricamente in un senso o nell'altro. Il valore g_2 indica invece ora una distribuzione sensibilmente platicurtica, cioè schiacciata relativamente ad una normale di simile σ. Questo indica che eliminati i P estremi, la serie dei valori appare più chiaramente di natura eterogenea; P varia, continuamente o ad intervalli.

(9) V. YULE–KENDALL, loc. cit., cap. 9.

Chimica. — *Contributo alle conoscenze sul metodo dell'ione pilota in polarografia quantitativa* (*). Nota di ELENA GAGLIARDO, presentata (**) dal Corrisp. G. SEMERANO.

Secondo la teoria (1), la corrente di diffusione corrispondente ai gradini delle curve polarografiche è legata alle varie grandezze sperimentali dalla espressione, verificata in seguito esaurientemente da numerosi sperimentatori (2,3,4):

$$\bar{i}_d = knD^{1/2}\, Cm^{2/3}\, t^{1/6}$$

nella quale i_d è espressa in μA, C (concentrazione dell'ossidante o del riducente, a seconda che si tratti della parte catodica o anodica del gradino) in mMole/l., D (coefficiente di diffusione corrispondente) in cm²/sec, m (velocità di efflusso del mercurio dal capillare) in mgr/sec, t (periodo di gocciolamento del mercurio) in sec e k è una costante che, nelle condizioni ordinarie di temperatura, vale 605.

La misura della concentrazione dipende quindi da numerosi fattori che vanno determinati caso per caso con un grado di precisione dipendente dalla potenza con la quale essi figurano nell'equazione di Ilkovič; particolare attenzione va quindi rivolta alla misura di $\bar{i}_d$, D e m.

In una recente pubblicazione (5), J. K. Taylor ha descritto ed esaminato da un punto di vista critico i vari metodi di analisi polarografica quantitativa finora proposti e che possono venir distinti in assoluti e di confronto.

Per quanto interessanti siano i primi, tanto dal punto di vista teorico che applicativo, certo essi non offrono attualmente quelle prospettive di elevata precisione che in qualche caso si richiedono al metodo polarografico; dalla memoria di Taylor risulta, infatti, che un rigoroso controllo dei vari fattori da cui C dipende, porta ben di rado a una precisione superiore al $\pm$ 2 % del valore di $\bar{i}_d$ o C.

Migliori possibilità offrono invece i metodi di confronto, data la maggiore facilità di mantenere costanti i vari fattori, in una serie di esperienze in cui si cambi soltanto la grandezza da determinare, che non la misura rigorosa del valore di tutti i fattori.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Fisica dell'Università. Centro di Studi per la Polarografia del C.N.R., Padova.

(**) Nella seduta dell'11 dicembre 1948.

(1) D. ILKOVIC, «Collection Czechoslov. Chem. Communs.», *6*, 498–513 (1934).

(2) J. HEYROVSKY, *Polarographie*. Wien, Springer-Verl. (1941).

(3) I. M. KOLTHOFF e J. J. LINGANE, *Polarography*. New York: Interscience Publishers (1941).

(4) J. J. LINGANE e I. M. KOLTHOFF, «J. Am. Chem. Soc.», *61*, 825–34 (1939).

(5) J. K. TAYLOR, «Anal. Chem.», *19*, 478–80, 368–72 (1947).

Senza entrare in merito alla descrizione dei vari metodi di confronto finora proposti, è da osservare che molti di essi richiedono un lavoro preliminare non indifferente, o l'uso di campioni a composizione già nota e simile a quella del materiale in esame, o una costanza eccessivamente lunga delle condizioni sperimentali che in pratica è difficilmente realizzabile senza complicare la relativa apparecchiatura; questo si dica, ad esempio, per l'uso del termostato richiesto specialmente dal metodo delle curve di taratura.

Utili prospettive di impiego ha presentato perciò il metodo così detto dello « ione pilota » proposto nel 1938 da E. Forche [6], basato sul fatto che le correnti relative di diffusione degli ioni nello stesso elettrolita base sono indipendenti dalle caratteristiche del capillare impiegato e, con buona approssimazione, dalla temperatura, per lo meno quando non si confrontino specie ioniche di mobilità a coefficente di temperatura nettamente diverso.

Il procedimento che si segue è quello di stabilire una volta per tutte il rapporto fra l'altezza del gradino della sostanza da dosare e quella di uno ione convenientemente scelto, entrambi di concentrazione nota, e di determinare quindi volta per volta quale è il valore di detto rapporto per una data e conveniente concentrazione dell'ione pilota aggiunto. Il metodo corrisponde a quello del « campione interno » della spettroscopia e permette infatti, dato che componente da dosare e aggiunta sono presenti nella stessa soluzione e il rapporto dei gradini è anche abbastanza indipendente dalla natura dell'elettrolita di fondo, di rinunciare alla costanza rigorosa di molti di quei fattori che notoriamente influenzano in modo cospicuo l'altezza dei gradini (temperatura, altezza del serbatoio di mercurio, caratteristiche del capillare, ecc.).

Ciò spiega il favore che il metodo ha incontrato da parte di alcuni sperimentatori [7,8,9,10,11], quando si possano realizzare determinate condizioni (sufficente distanza dei gradini interessati, concentrazione dell'aggiunta dello stesso ordine di grandezza di quella del componente da dosare, oppure concentrazione dell'aggiunta molto differente e rapporto ben determinato delle due sensibilità del galvanometro che si devono impiegare per avere i gradini di altezza quasi uguale e di valore massimo per quanto è consentito dal tipo di rilevamento (carta o scala), ecc.).

Secondo il Taylor il metodo avrebbe invece applicazione limitata a causa della difficoltà di avere a disposizione in ogni caso un ione pilota conveniente

(6) H. E. FORCHE, « Mikrochemie ver. Mikrochim. Acta », *25*, 217–24 (1938).

(7) F. R. DE PAOLA, « Iron Age », *158*, 36–40 (1946).

(8) J. CHOLAK e K. BAMBACH, « Ind. Eng. Chem., Anal. Ed. », *13*, 583–6 (1941).

(9) W. P. TYLER e W. E. BROWN, « Ind. Eng. Chem., Anal. Ed. », *15*, 520–3 (1943).

(10) A. S. LANDRY, « J. Ind. Hyg. Toxicol. », *29*, 168–74 (1947); « C. A. », *41*, 4736 *b*.

(11) R. LOOFBOUROW e H. A. FREDIANI, « Analyst », *73*, 384–7 (1948); « C. A. », *42*, 7651 *c*.

per il tipo di campione da analizzare, specialmente quando detto campione fornisca diagrammi tanto complessi da rendere difficile l'inserzione del gradino ben sviluppato del nuovo ione. Se però, con una opportuna scelta dell'elettrolita base si è in grado di limitare il numero dei gradini e di poter aggiungere un conveniente ione pilota, il metodo in questione dovrebbe presentare il pregio, in molti casi indispensabile, di un elevato grado di precisione.

Nel corso di alcune ricerche atte a stabilire il metodo più conveniente di determinazione del contenuto in ferro, piombo e zinco delle blende, si è trovato necessario fare ricorso anche alla tecnica dello ione pilota date le elevate percentuali dei componenti da dosare e la limitata precisione degli altri metodi polarografici.

Se un grado di esattezza del $\pm$ 2 % può infatti ritenersi soddisfacente nel dosamento di quantità inferiori all'1 %, lo stesso non si può dire per percentuali nettamente maggiori a causa della precisione generalmente presentata dagli altri metodi della chimica analitica.

Nel quadro del problema che interessava risolvere sono state eseguite alcune ricerche sul grado di precisione raggiungibile con la tecnica dello ione pilota e si riferisce in questa Nota sui risultati raggiunti.

Parte sperimentale. – Dopo un accurato esame dei potenziali di semigradino delle varie specie ioniche dalla soluzione base impiegata per il dosamento di ferro, piombo e zinco nelle blende, si è creduto conveniente di ricorrere, come ione pilota, allo ione cadmio che dà un gradino regolare e che si inserisce in buona posizione tra il gradino del piombo e quello dello zinco, con maggior vicinanza al primo piuttosto che al secondo.

Una serie di determinazioni eseguite allo scopo di meglio precisare i rapporti esistenti tra i gradini del ferro, piombo e zinco, in vista sopratutto della composizione dei campioni da analizzare e del tipo di soluzione base da impiegare, ha permesso poi di concludere che il gradino del cadmio si presta molto bene per il confronto col gradino dello zinco, ma è meno indicato per quello col gradino del piombo, data la vicinanza dei potenziali di semigradino di questi ultimi due elementi. Ciò esclude generalmente la possibilità di eseguire il confronto diretto su scala, ma non elimina invece per lo più quella del confronto tra i gradini rilevati sul diagramma fotografico. Per un esame critico delle possibilità del metodo, si è perciò fatto ricorso esclusivamente a quest'ultima tecnica di rilevamento.

Si sono verificati prima di tutto i risultati ottenuti dal Forche variando il capillare e la temperatura; la soluzione era $1{,}80 \cdot 10^{-2}$ n. in sale ferrico, $7{,}14 \cdot 10^{-3}$ n. in piombo e $3{,}92 \cdot 10^{-3}$ in cadmio; i capillari erano entrambi del tipo cilindrico, ma di diverse caratteristiche. Nel corso delle ricerche fu trovato conveniente dosare lo zinco in altra soluzione base e per questa ragione non si riferisce sul confronto zinco/cadmio.

Nella tabella seguente sono riportati, oltre alle altezze dei gradini osservati, anche i loro rapporti.

TABELLA I.

Capillare	t			m in aria	$m^{0,64}\ t^{1,6}$			$t°$	sensibilità galvano-metrica	Fe	Fe/Cd	Cd	Pb/Cd	Pb
	Fe	Pb	Cd		Fe	Pb	Cd							
I	3,27	3,70	3,47	2,037				13° C.	1/500	23,35	(1,223)	19,1	(1,576)	30,1
	3,24	3,68	3,46	2,038	1,918	1,957	1,938		(1,250)	(1,242)		(1,257)		(1,255)
	3,27	3,66	3,48	2,030					1/400	29,0	(1,208)	24,0	(1,575)	37,8
									(2,667)	(2,645)	—	—	—	—
	3,26	3,68	3,47	2,035					1/150	76,7	—	—	—	—
II	5,07	5,45	5,35					13° C.	1/500	20,25	(1,231)	16,45	(1,580)	26,0
	5,08	5,46	5,34	1,460	1,667	1,684	1,682		(1,250)	(1,240)		(1,246)		(1,250)
	5,06	5,46	5,34	1,453					1/400	25,1	(1,224)	20,5	(1,585)	32,5
	5,07	5,46	5,34	1,457					(2,667)	(2,627)		(2,644)		(2,631)
									1/150	65,95	(1,217)	54,2	(1,578)	85,5
								18° C.	1/500	21,8	(1,225)	17,8	(1,591)	28,35
									(1,250)	(1,241)		(1,242)		(1,235)
									1/400	27,05	(1,224)	22,1	(1,584)	35,0
									(2,667)	(2,625)		(2,643)		(2,637)
									1/150	71,0	(1,216)	58,4	(1,581)	92,5

Nella tabella I i periodi di gocciolamento, t, riportati nelle colonne 2, 3, 4, sono stati misurati a corrente di diffusione stabilita per i tre cationi in istudio; la velocità di efflusso del mercurio, m, che come è noto cambia molto poco col potenziale e con la natura del mezzo in cui le gocce si formano, è stato misurato in aria a circuito aperto. Le tre serie di misure riportate servono a provare che queste grandezze sono determinabili con una precisione di circa l'1 % per la t e del 0,4 % per la m, cioè in modo più esatto di quanto non sia stato assunto dal Taylor [5] nella sua valutazione della precisione raggiungibile nella misura di $\bar{i}_d$ o C (2 % e 1 % rispettivamente); e ciò senza ricorrere a particolari dispositivi sperimentali nella determinazione delle due grandezze [12]. Nelle colonne 6, 7, 8, sono riportati i valori del prodotto $m^{0,64}\ t^{1/6}$ che caratterizzano il capillare impiegato nella misura; per l'esponente della m è stato scelto, invece del teorico 2/3, il valore empirico e di poco differente 0,64 riscontrato più indicato dal Lingane e dal Loveridge [13].

Nelle colonne 10 e seguenti sono riportati, tra parentesi, i rapporti tra i valori che figurano nelle righe e nelle colonne immediatamente vicine. Essi permettono un rapido esame del grado di precisione raggiungibile nelle singole misure.

TABELLA II.

Sensibilità galvanometrica	Altezza del gradino (in mm.) $/ m^{0,64}\ t^{1/6}$					
	Fe		Cd		Pb	
	cap. 1	cap. 2	cap. 1	cap. 2	cap. 1	cap. 2
1/500	1,21	1,21	0,996	0,98	1,54	1,54
1/400	1,51	1,51	1,24	1,22	1,93	1,93

TABELLA III.

Sensibilità galvanometrica	Rapporto dell'altezza dei gradini (18°/13°)				
	Fe	Fe/Cd	Cd	Pb/Cd	Pb
1/500	1,077	0,995	1,082	1,007	1,090
1/400	1,078	1,000	1,078	0,999	1,077
1/150	1,077	0,999	1,078	1,002	1,080
Media . . .	1,077	0,998	1,079	1,003	1,082

(12) J. J. LINGANE, « Ind. Eng. Chem., Anal. Ed. », *61*, 329–30 (1944).
(13) J. J. LINGANE e B. A. LOVERIDGE, « J. Am. Chem. Soc. », *66*, 1425–31 (1944).

Nella tabella II sono indicati i valori dei rapporti fra le altezze dei gradini e i relativi prodotti $m^{0,64}\ t^{1/6}$.

La tabella III informa sulla buona costanza delle altezze relative dei gradini in funzione della temperatura.

Dall'esame dei valori riportati nelle tabelle risulta che le deviazioni medie osservate nei quozienti secondo Forche (colonne 12 e 14 della tabella I) sono sensibilmente le stesse di quelle relative al semplice cambiamento della sensibilità, cioè uguali alle deviazioni medie che risultano nella determinazione visuale dell'altezza dei gradini. Queste infatti si aggirano su qualche decimo di mm., e per gradini di altezza media di circa 3 cm., come quelli osservati, ciò significa un'incertezza di parecchi decimi per cento.

La conclusione che si dovrebbe trarre da queste misure è che il metodo dell'ione pilota, quando venga convenientemente applicato, offre indubitatamente vantaggi sia nella precisione dei risultati, sia nella semplificazione del dispositivo sperimentale. La lunga pratica che ho avuto occasione di fare col metodo delle aggiunte tarate mi fa concludere che precisione e semplicità di apparecchiatura siano vantaggi che vanno considerati nel loro assieme, in quanto che un'osservanza rigorosa delle varie condizioni sperimentali (che influiscono sull'altezza dei gradini) rende possibile il conseguimento di risultati di precisione non inferiore a quella del metodo dello ione pilota anche col metodo delle aggiunte tarate.

Certo che nel caso di analisi rapide eseguite da operatori non specializzati la possibilità di evitare un controllo rigoroso di tutte le condizioni sperimentali rende quanto mai utile la tecnica dello ione pilota.

Credo tuttavia che non possa essere passato sotto silenzio un fatto che è risultato nel corso del lavoro e che talvolta può pesare in senso sfavorevole sulla possibilità di impiego del metodo in questione. Nel campo delle analisi pratiche può presentarsi il caso che lo ione da determinare o quello pilota siano specificatamente influenzati da altre sostanze presenti. Succede allora che i valori dei rapporti stabiliti in precedenza con sali puri non possano essere impiegati per il calcolo delle percentuali di analisi o per lo meno non diano risultati così precisi come sarebbe lecito attendersi dalla tecnica dello ione pilota. E quello che si è verificato nel caso dell'analisi delle blende: il gradino del Cadmio è risultato alquanto depresso rispetto a quello che si osserva con la stessa soluzione base in assenza di blenda. Tentativi fatti per giustificare questa anomalia, specialmente per quanto si riferisce ad eventuali variazioni del regime di gocciolamento del mercurio, non hanno dato però alcun risultato definitivo; mi riprometto di ritornare sull'argomento appena saranno ultimate alcune esperienze tutt'ora in corso.

Chimica (Chimica biologica). — *Inibitori di fenolossidasi nel fegato e nel pancreas* (*). Nota di CAMILLO LENTI, presentata (**) dal Socio A. HERLITZKA.

Come è noto generalmente, fenolossidasi, deidrasi ossitrope, che catalizzano il trasporto dell'idrogeno da mono- e polifenoli all'ossigeno molecolare, sono ampiamente diffuse nelle piante superiori e nei funghi e sono pure presenti in taluni batteri. Negli organismi animali invece l'enzima non ha una distribuzione tanto ampia: mentre si trova con certezza in artropodi, molluschi ed altri invertebrati, nei vertebrati la sua presenza, sebbene sia stata ammessa numerose volte, non ha sicura generale conferma (1). Anche le indagini relativamente recenti di Bhagvat e Richter (2) in vertebrati dimostrano un'attività fenolossidasica inapprezzabile: solo in taluni tessuti pigmentati è noto infatti con certezza l'enzima. Hogeboom e Adams (3) invero ne notarono la presenza nel melanosarcoma del ratto, così come anch'io (4), or è poco, del tutto occasionalmente lo potei osservare in un melanosarcoma di coroide umana e Hermann e Boss (5) nel corpo ciliare. Anche Charles e Rawles (6) ritrovarono un'attività fenolossidasica in estratti di penne nere di pulcini, mentre Ginsburg (7) fece la medesima osservazione in estratti di cute pigmentata di cavia.

Poichè l'eventuale presenza di inibitori di fenolossidasi nei tessuti degli animali superiori può rendere ragione della mancata attività dell'enzima constatata nella maggior parte di essi, ne è sembrata interessante l'indagine. Per questo si sono fatti agire, sui sistemi fenolossidasi–tirosina e fenolossidasi–3,4–diossifenilalanina estratti di vari tessuti ed organi (tessuto muscolare, tessuto adiposo, cervello, polmone, milza, fegato, pancreas, testicolo).

I risultati sono di un qualche interesse. In tutte le esperienze gli estratti, preparati con soluzione regolatrice della reazione di fosfati, del tessuto muscolare, del tessuto adiposo, del cervello, del polmone, della milza e del testicolo non dimostrano alcuna azione sulla velocità della reazione nei sistemi fenolossidasi–tirosina e fenolossidasi–3,4–diossifenilalanina. Gli estratti di fegato e di pancreas invece inibiscono parzialmente l'avvenimento dell'ossidazione dei due aminoacidi (Sez. A, parte sperimentale). Osservazioni simili di inibi-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Biologica dell'Università di Torino.

(**) Nella seduta dell'11 dicembre 1948.

(1) J. M. NELSON e C. R. DAWSON, « Adv. in Enzymology », *4*, 99 (1944); C. R. DAWSON e M. F. MALLETTE, « Adv. in Protein Chemistry », *2*, 179 (1945).

(2) K. BHAGVAT e D. RICHTER, « J. Biochem. », *32*, 1397 (1938).

(3) G. HOGEBOOM e M. ADAMS, « J. Biol. Chem. », *145*, 273 (1942).

(4) C. LENTI, Osservazione inedita.

(5) H. HERMANN e M. B. BOSS, « J. Cellular Comp. Physiol. », *26*, 131 (1945).

(6) D. CHARLES e M. RAWLES, « Proc. Soc. Exp. Biol. a. Med. », *43*, 55 (1940).

(7) B. GINSBURG, « Genetics », *29*, 176 (1944).

zione sul sistema tirosina–tirosinasi eseguirono Rothman, Krysa e Smiljanic [8] con estratti acquosi di epidermide umana, così come Ginsburg [7] con analoghi estratti di epidermide di cavie e Duboff e Hirschfeld [9] col siero di sangue di cancerosi.

Il meccanismo della lieve inibizione esercitata dal fegato e dal pancreas non è chiaro. Tuttavia, mantenendo gli estratti dei due organi a 80° per 5', essi perdono la capacità di inibire l'avvenimento della reazione di ossidazione della tirosina e della disossifenilalanina operata dalla fenolossidasi (Sez. B parte sperimentale). Questa osservazione induce forse a ritenere verosimile che l'inibizione sia dovuta ad un'attività enzimatica degli estratti medesimi.

PARTE SPERIMENTALE. – La fenolossidasi era preparata dalla patata bianca comune (*Solanum tuberosum*) secondo le indicazioni di Evans e Raper [10].

Substrati erano l–(–)–tirosina e l–(–)–diossifenilalanina, prodotti purissimi di Kahlbaum.

Gli estratti di tessuto erano ottenuti nel modo seguente: gr. 1 di tessuto, ridotto in minutissimi frammenti in mortaio con gr. 1 di sabbia di quarzo, si estraevano per un'ora con ml. 10 di soluzione regolatrice della reazione di fosfati M/15 (pH = 7,38). Il liquido si separava con centrifugazione.

L'attività dell'enzima veniva seguìta con il metodo manometrico di Barcroft–Warburg, con le norme consuete. Il pH delle prove si aggirava fra 7,3–7,4. L'ambiente gassoso era costituito da aria. La temperatura del termostato era di 37°. Venivano adoperati vasi conici con un'appendice laterale e pozzetto centrale, contenente ml. 0,2 di KOH 10 % assorbita su carta da filtro. Nella cavità principale del vaso erano posti ml. 1 della soluzione dell'enzima opportunamente diluita e ml. 1 di soluzione regolatrice di fosfati M/15 (pH = 7,38) o di estratto di tessuto, e nell'appendice laterale ml. 0,5 della soluzione dell'aminoacido da saggiare (tirosina 0,002 mol., diossifenilalanina 0,005 mol.). Immersi in termostato gli apparecchi e raggiunto l'equilibrio termico, si versava il contenuto dell'appendice laterale nella cavità principale. Ogni 15' venivano letti i consumi di O_2. Le esperienze duravano un'ora. Tutte le prove erano in doppio. I risultati sono riferiti in A) e B). Si noti che dai valori delle prove con gli estratti è già stato sottratto il consumo di O_2 degli estratti soli.

A) Azione di estratti di tessuti ed organi su l'attività della fenolossidasi.

QO_2 = mmc. O_2 consumati in un'ora.

Composizione delle prove:

(8) S. ROTHMAN, H. F. KRYSA e A. M. SMILJANIC, « Proc. Soc. Exp. Biol. a. Med. », *68*, 208 (1946).

(9) DUBOFF e HIRSCHFELD, « Cancer Res. », *6*, 57 (1946).

(10) W. C. EVANS e H. S. RAPER, « Biochem. J. », *31*, 2155 (1937).

	QO_2
Fenolossidasi + tirosina	31,0
Fenolossidasi + tirosina + estratto di tessuto muscolare	30,6
Fenolossidasi + diossifenilalanina	82,4
Fenolossidasi + diossifenilalanina + estratto di tessuto muscolare	81,8
Fenolossidasi + tirosina	27,8
Fenolossidasi + tirosina + estratto di tessuto adiposo	28,0
Fenolossidasi + diossifenilalanina	69,3
Fenolossidasi + diossifenilalanina + estratto di tessuto adiposo	68,7
Fenolossidasi + tirosina	29,0
Fenolossidasi + tirosina + estratto di cervello	29,5
Fenolossidasi + diossifenilalanina	78,0
Fenolossidasi + diossifenilalanina + estratto di cervello	77,6
Fenolossidasi + tirosina	18,2
Fenolossidasi + tirosina + estratto di polmone	17,8
Fenolossidasi + diossifenilalanina	59,4
Fenolossidasi + diossifenilalanina + estratto di polmone	58,9
Fenolossidasi + tirosina	24,4
Fenolossidasi + tirosina + estratto di milza	23,9
Fenolossidasi + diossifenilalanina	70,5
Fenolossidasi + diossifenilalanina + estratto di milza	70,2
Fenolossidasi + tirosina	33,6
Fenolossidasi + tirosina + estratto di testicolo	33,4
Fenolossidasi + diossifenilalanina	88,2
Fenolossidasi + diossifenilalanina + estratto di testicolo	87,0

	QO_2	inibizione %
Fenolossidasi + tirosina	32,8	—
Fenolossidasi + tirosina + estratto di fegato	22,2	32,3
Fenolossidasi + diossifenilalanina.	86,6	—
Fenolossidasi + diossifenilalanina + estratto di fegato	64,6	25,4
Fenolossidasi + tirosina	26,4	—
Fenolossidasi + tirosina + estratto di pancreas	20,7	21,6
Fenolossidasi + diossifenilalanina	61,7	—
Fenolossidasi + diossifenilalanina + estratto di pancreas	50,0	19,0

B) Azione di estratti di fegato e di pancreas, tenuti a 80° per 5', su l'attività della fenolossidasi.

Composizione delle prove:

	QO_2
Fenolossidasi + tirosina	29,2
Fenolossidasi + tirosina + estratto di pancreas tenuto a 80° per 5′	28,4
Fenolossidasi + diossifenilalanina	65,5
Fenolossidasi + diossifenilalanina + estratto di pancreas tenuto a 80° per 5′	64,0
Fenolossidasi + tirosina	20,6
Fenolossidasi + tirosina + estratto di fegato tenuto a 80° per 5′	20,6
Fenolossidasi + diossifenilalanina	49,9
Fenolossidasi + diossifenilalanina + estratto di fegato, tenuto a 80° per 5′	48,7

Petrografia. — *Facies ultrafemiche nei basalti dell'Africa Orientale* [*]. Nota di OPLINIA HIEKE MERLIN, presentata [**] dal Socio A. BIANCHI.

In una Nota di recente pubblicazione ho segnalato la presenza di lave a carattere limburgitico nell'Africa Orientale, studiando in modo particolare il basalto limburgitico di Batiè rinvenuto al limite orientale dell'altipiano di Dessiè verso la fossa dancala.

In attesa di poter pubblicare una Memoria di carattere generale che dia ampio ragguaglio del notevole complesso di lave basiche dell'Abissinia da me studiate, reputo opportuno di considerare qui separatamente altre due particolari facies che nettamente si differenziano dalle altre per il loro carattere ultrafemico [1].

Dalle numerose e sporadiche ricerche chimico-petrografiche già pubblicate da vari autori risulta che i basalti fin'ora studiati presentano un carattere femico normale.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia dell'Università di Padova e compreso nel programma del Centro Studi di Petrografia e Geologia del Consiglio Naz. delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 13 novembre 1948.

(1) Ringrazio il prof. A. Bianchi per l'abbondante ed interessante materiale petrografico affidatomi in studio, materiale da lui rinvenuto negli anni 1936-1938 durante l'esplorazione geologica degli altipiani Hararini e della Dancalia Meridionale, esplorazione effettuata dalla Missione AGIP, diretta dal prof. M. Gortani. Per le notizie generali riguardanti le condizioni geologico petrografiche della regione rimando il lettore alle seguenti pubblicazioni: M. GORTANI A. BIANCHI. *Osservazioni geologiche e petrografiche sulla Dancalia Meridionale e zone contermini*. « Bollettino Soc. Geol. Ital. », vol. LVII, p. 353, Roma 1938; M. GORTANI-A. BIANCHI. *Note illustrative sulla carta geologica degli Altipiani Hararini e della Dancalia Meridionale*. (« Accademia Scienze Ist. di Bologna », Sessione 30 marzo 1941).

Una sola facies ultrafemica è stata segnalata a tutt'oggi da Duparc e Molly [2] e distinta col nome di Tokeite dalla località di Tokè ove è stata rinvenuta; l'esistenza di questa roccia è stata per me incentivo alla ricerca e relativo studio delle facies più basiche rinvenibili fra il vario materiale a mia disposizione. A tale scopo ho fissato l'attenzione su due rocce particolarmente ricche in olivina provenienti l'una dall'Uadi Suchiè a nord-est di Addis Abeba e l'altra dall'Uadi Burcà ad oriente di Dessiè.

Basalto pirossenico olivinico dell'Uadi Suchiè. – La roccia proviene dalla regione a nord-est di Addis Abeba e più precisamente dal margine dell'Altipiano etiopico dove la strada Debra Brean-Debrasina interseca l'Uadi Suchiè.

È un basalto grigio nerastro compatto che in un minuto aggregato di fondo pirossenico-olivinico-plagioclasico ad abbondante magnetite presenta sviluppati fenocristalli di elementi femici. Nella massa di fondo a struttura pilotassitica, si nota una poco omogenea distribuzione dei vari elementi; talora infatti i plagioclasi si addensano a costituire delle piccole geodi, a struttura più evidentemente intersertale, mentre intorno a queste l'aggregato di fondo si fa ancor più minuto, granulare e si arricchisce in elementi femici.

Sia fra gli individui olivinici che fra quelli pirossenici si possono distinguere tre generazioni: due costituite da elementi idiomorfi grandi e medi e la terza dai granuli e microliti della massa fondamentale.

L'olivina si presenta in fenocristalli che raggiungono dimensioni anche di 2-3 mm. non molto alterata, presenta solo un fondo periferico iddingsitico. Il segno ottico è negativo e misure eseguite al T. U. su di un individuo zonato di 1ª generazione, hanno dato per l'angolo degli assi ottici i valori: $2V_\alpha = 89°$ al centro ed 84° alla periferia; i quali valori ci permettono di definire la composizione della miscela: il centro più magnesiaco, con una percentuale molecolare di fajalite di circa il 16 %, si approssima al crisotilo, la periferia più ferrifera (la percentuale molecolare di fajalite è circa del 28 %) si accosta a miscele hyalosideritiche. Il che è pure confermato dalla presenza del bordo periferico di alterazione iddingsitica.

I vistosi elementi idiomorfi di pirosseno a leggera colorazione giallognola mancano di pleocroismo, sono quasi sempre zonati e talvolta geminati; includono granuli di magnetite e di elementi plagioclasici.

Ho determinato al T. U. su di un individuo zonato per l'angolo degli assi ottici i seguenti valori:

$2V_\gamma = 57°$ al centro

» $= 56°$ alla parte mediana

» $= 55°$ alla periferia

(2) L. Duparc E. Molly, *Sur la Tokéite une nouvelle roche d'Abyssinie*. « Compte Rendu Société de Physique et d'Histoire naturelle de Genéve » (1928).

L'angolo di estinzione $c : \gamma$, misurato pure al T. U., è risultato:

$c : \gamma = 53^\circ$ per la luce rossa
$c : \gamma = 54^\circ$ » » gialla
$c : \gamma = 55^\circ$ » » verde

con una sensibile dispersione della bisettrice γ di circa 2° fra la luce rossa e la verde.

I valori trovati nei fenocristalli sia per l'angolo degli assi ottici sia per l'angolo di estinzione portano a localizzare il punto rappresentativo della composizione chimica di questo pirosseno nel campo proprio alle augiti, sul diagramma diopside–hedenbergite–clinoenstatite.

Il pirosseno della massa di fondo si differenzia dai fenocristalli per una sensibile colorazione roseo–violacea, per un leggero pleocroismo dai toni gialli ai violacei, e per un valore più elevato di $c : \gamma$ che in media raggiunge i 56° ed in qualche cristallino nettamente zonato varia di valore: da 54° al centro sino a 60° all'estrema periferia.

Dai caratteri ottici sopra riferiti risulta che si tratta di un'augite titanifera. Il che, prendendo in considerazione l'analisi chimica, viene anche riconfermato dall'elevato tenore del componente TiO_2 e si riesce così a spiegare pure la leggera tendenza alcalina presentata dalla roccia.

Le minute lamelle plagioclasiche della massa di fondo sono mal determinabili. Raramente geminate secondo la legge dell'albite, si presentano per lo più associate secondo la legge albite–Carlsbad. Su uno di questi ultimi geminati ho potuto ricavare i seguenti valori:

$$I = 24^\circ \quad II = 34^\circ \qquad = 70\ \%\ An$$

mettendo così in evidenza la sua composizione labradoritico–bitownitica.

Come elemento accessorio la magnetite, in granuli nettamente idiomorfi, concorre abbondantemente alla formazione dell'aggregato di fondo. Rarissimi i microliti aciculari di apatite, molto poco vetro cementa qua e là i granuli della massa.

Riporto i dati analitici, la formula magmatica relativa, la composizione mineralogica osservata e quella dedotta dal calcolo della norma molecolare.

SiO_2	44.48
TiO_2	3.06
P_2O_5	tr.
Al_2O_3	9.61
Fe_2O_3	6.43
Cr_2O_3	0.08
FeO	6.01
MnO	0.18
MgO	13.45
CaO	12.26
Na_2O	2.56
K_2O	1.18
H_2O^-	0.26
H_2O^+	0.34
	99.90

Composizione mineralogica (% in volume)

Fenocristalli	Pirosseni	26
	Olivina	18
Pasta di fondo	Elementi femici e magnetite, plagioclasi, tracce di vetro	56

Formula magmatica

si 85 *al* 10.9 *fm* 57.7 *c* 25.2 *alc* 6.2
k 0.23 *mg* 0.66 *ti* 4.41 *c/fm* 0.44 *qz* — 40

Base			*Norma molecolare*		*Variante*	
Q . . . 16.5	16.5 = Q		Or . . . 7.0	Or . . . 7.0		30.0 % plagioclasi al 70 % An
Kp . . 4.2			Ab . . . 18.2	Ab . . . 6.5		
Ne . . . 13.7	24.7 = L		An . . . 11.3	An . . . 16.5		
Cal . . 6.8			Ne . . . 3.2	Ne . . . 3.5		
Cs . . . 14.8			Wo . . . 19.7	Wo . . . 17.9		30.5 % augite leg. alcalina
Fs . . . 6.8			Fo . . . 27.9	En . . . 8.0		
Fo . . . 27.9	58.8 = M		Fa . . . 3.8	Ac . . . 8.6		
Fa . . . 7.2			Mt . . . 6.8	Fo . . . 21.9		24.2 % olivina
Ru . . . 2.1			Cp . . . —	Fa . . . 2.3		
100.0			Ru . . . 2.1	Mt . . . 3.6		7.8 % accessori
			100.0	Ilm . . 4.2		
				100.0		

$\pi = 0.27$ $\mu = 0.49$ $\gamma = 0.26$ $\alpha = 0.002$

Per quanto riguarda la composizione mineralogica, ottenuta con letture statistiche al tavolino integratore, devo notare che non è possibile determinare singolarmente le quantità dei vari costituenti cristallini dell'aggregato di fondo, in causa della grana estremamente minuta di questo. Ne risulta l'impossibilità di una comparazione fra la composizione mineralogica osservata e quella calcolata nella « variante » a pirosseno leggermente alcalino, che ho dedotta in base ai dati della norma molecolare.

Basalto olivinico dell'Uadi Burcà. — Il secondo basalto da me considerato proviene da una località lungo la strada Dancala a valle di Batiè e precisamente a Km 3 ½ ad oriente dell'Uadi Burcà dove la strada interseca colate di basalti nero-verdastri a grana grossa, fratturati e solcati da vene biancastre di prodotti di alterazione.

La struttura della roccia è nettamente porfirica per vistosi individui idiomorfi di pirosseno ed olivina e per qualche più raro e non molto sviluppato cristallo di plagioclasio, immersi in una massa di fondo omogenea costituita da elementi feldispatici e femici di seconda generazione e da abbondanti ossidi di ferro.

Il pirosseno, che ha il predominio fra gli elementi colorati, si presenta in vistosi e numerosi individui idiomorfi zonati, geminati, a leggera tinta bruna, senza pleocroismo.

L'angolo di estinzione $c : \gamma$ misurato al T. U., su individui normali quasi privi di zonatura, è risultato:

$c : \gamma = 49^{\circ}\,1/2$ luce rossa

» $= 49^{\circ}$ luce bianca e gialla

» $= 48^{\circ}$ luce verde.

L'angolo degli assi ottici, sempre da misure eseguite al T. U. su cristalli zonati, presenta una variazione sensibile passando dal centro alla periferia, con una dispersione $r > v$ notevole sino a circa 2° e precisamente:

	rosso	giallo	verde
nel nucleo	$2V\gamma = 59°$	58°	57°
alla periferia	$2V\gamma = 57°$	56°	55°

La dispersione inclinata delle bisettrici è pure sensibile.

Gli individui maggiormente zonati presentano un bordo nettamente roseo–violaceo a debole pleocroismo e con un angolo di estinzione che supera di 4°–5° i valori propri per il nucleo, toccando così valori prossimi a 55°.

Gli individui invece di 2ª generazione hanno il carattere del bordo dei fenocristalli rilevando una tendenza alcalina, come precisano il colore ed i valori dell'angolo di estinzione $c : \gamma$ che in media raggiungono al nucleo circa i 54° aumentando al bordo sino ai 57°.

L'olivina si presenta in vistosi cristalli idomorfi, notevolmente alterati. Attraverso l'elegante rete costituita dai prodotti serpentinosi (crisotile), compaiono i nuclei del minerale originario, racchiusi da aureole di talco dai variegati colori d'interferenza. Ci troviamo di fronte ad una miscela molto magnesiaca, come avverte subito l'abbondante alterazione serpentinosa e come riconfermano le osservazioni al T. U.; infatti il segno della birifrangenza positivo e l'ampiezza dell'angolo degli assi ottici $2V\gamma = 85°$ precisano la composizione notevolmente magnesiaca del minerale.

I cristalli di plagioclasio di 1ª generazione sono rari e molto poco sviluppati, geminati secondo le leggi « albite » e « albite–Carlsbad ». Osservazioni su individui geminati secondo quest'ultima legge hanno dato i valori:

I 25°	II 34°
I 24°	II 35°
I 20°	II 39°

propri di termini ricchi in anortite, cioè di miscele labradoritico–bitownitiche al 70 % in Anortite.

Rare lamine di biotite dal tipico pleocroismo e rarissimi cristallini prismatici di orneblenda bruna sono inclusi nei grossi individui idiomorfi di pirosseno.

L'orneblenda presenta marcato pleocroismo dai toni giallo chiari per α sino a marrone per γ con assorbimento $\gamma > \beta > \alpha$.

Piccole vene di calcite attraversano la roccia.

Riporto i dati analitici relativi alla composizione chimica e mineralogica, facendo presente che anche per questa roccia è stato impossibile fare una distinzione quantitativa fra i costituenti dell'aggregato di fondo, data la finezza della loro grana.

Unisco pure i valori della formula magmatica, della composizione normativa e della variante a pirosseno leggermente sodico.

SiO_2	44.72
TiO_2	2.13
P_2O_5	0.40
Al_2O_3	8.40
Fe_2O_3	4.34
Cr_2O_3	0.10
FeO	8.82
MnO	0.56
MgO	11.90
CaO	11.60
K_2O	0.74
Na_2O	1.97
H_2O^-	1.24
H_2O^+	2,67
CO_2	0.21
	99.80

Composizione mineralogica (% in volume)

Fenocristalli	pirosseni	25
	olivina	10
	plagioclasi	5
Pasta di fondo	pirosseni, magnetite, plagioclasi, olivina	50
Prodotti di alterazione dell'olivina	serpentino, talco, ecc.	10
		100

Formula magmatica

si 92 *al* 10.2 *fm* 59.4 *c* 25.5 *alc* 4.9
k 0.20 *mg* 0.61 *ti* 4.1 *p* 0.34 *c/fm* 0.43
qz — 28

Base			*Norma*		*Variante*		
Q	20.4	20.4 = Q	Or	4.3	Or	4.3	31.2 % plagioclasi
Kp	2.6	21.2 = L	Ab	18.0	Ab	10.0	
Ne	11.2		An	12.8	An	16.9	
Cal	7.4		Wo	17.6	Wo	15.9	42.5 % pirosseno sensibilmente alcalino
Cs	13.2	58.4 = M	En	18.0	En	12.0	
Fs	4.8		Fo	12.4	Hy	8.4	
Fo	25.9		Fa	9.1	Ac	6.2	
Fa	11.5		Mt	4.8	Fo	8.7	10.4 % olivina
Ru	1.5		Ru	1.5	Fa	1.7	
Cp	0.9		Cp	0.9	Il m	3.0	6.4 % accessori
Cc	0.6		Cc	0.6	Mt	2.5	
	100.0			100.0	Cp	0.9	
					Serp	9.0	
					Cc	0.6	

$\pi = 0.35$ $\mu = 0.48$ $\gamma = 0.24$ $\alpha = 0.32$.

Giudico opportuno riportare per confronto i dati petrografici essenziali relativi alla Tokeite, la roccia ultrafemica, a cui più sopra ho fatto cenno, rinvenuta da Duparc e Molly sul lato est della località di Tokè, lungo la strada che da Nekempti porta ad Addis Abeba. Si tratta di una basalto nero, notevolmente cristallino a vistosi individui di olivina e di augite e a rari plagioclasi in uno sfondo estremamente minuto pirossenico–magnetitico, ove delle chiazze feldispatiche formano talvolta il cemento dei granuli.

La composizione chimica di questa roccia è espressa dai seguenti dati analitici:

SiO_2	43.60
TiO_2	2.22
Al_2O_3	10.65
Fe_2O_3	3.53
FeO	7.15
CaO	17.42
MgO	12.62
K_2O	0.55
Na_2O	1.30
P. A. F.	1.96
	101.00

Unisco pure la formula magmatica ed i dati relativi alla « composizione molecolare base » e alla « composizione normativa », secondo il metodo Niggli, calcoli che ho dovuto eseguire per poter confrontare questa facies con le due rocce da me studiate.

Composizione molec. base			*Composizione normativa*	
Q	18.4	18.4 = Q	Or	3.3
Kp	2.0	22.1 = L	Ab	9.5
Ne	7.1		An	21.6
Cal	13.0		Ne	1.4
Cs	19.6	59.5 = M	Wo	26.1
Fs	3.7		Fo	26.3
Fo	26.3		Fa	6.6
Fa	8.4		Mt	3.7
Ru	1.5		Ru	1.5
	100.0			100.0

$\pi = 0.59$ $\mu = 0.45$ $\gamma = 0.34$ $\alpha = 0.18$

Passando ora a definire la posizione sistematica di queste tre facies fra i tipi magmatici della classificazione Niggli, si rileva facilmente che le tre rocce derivano da un magma ultrafemico del *gruppo pirossenitico*, e precisamente: i basalti di Burcà e dell'Uadi Suchiè sono accostabili al *tipo pirossenitico* propriamente detto, da cui però si differenziano, ed in particolare il secondo, per un valore un po' più elevato del coefficiente *alc*, mentre il basalto di Tokè è paragonabile con migliore approssimazione al *tipo issitico* per una minore alcalinità e per i valori dei coefficienti *fm* e *c*.

	si	*al*	*fm*	*c*	*alc*	*k*	*mg*	*qz*
Basalto Uadi Suchiè (Hieke)	85	10.9	57.7	25.2	6.2	0.23	0.66	— 40
Basalto Burcà (Hieke) . . .	92	10.2	59.4	25.5	4.9	0.20	0.61	— 28
Tipo *pirossenitico* (Niggli) .	90	9	59	28	4	—	0.70	— 26
Tokeite (Duparc)	81	11.6	50.8	34.6	3.0	0.21	0.68	— 31
Tipo *issitico* (Niggli) . . .	65	14	53	30	3	—	0.50	— 47

Riporto ora due rappresentazioni diagrammatiche che sintetizzano chiaramente le considerazioni fin'ora fatte sul chimismo di queste tre rocce.

Nella fig. 1 sono riportate le curve, delineate da Niggli per delimitare i campi caratteristici ai basalti normali, ai subbasalti ed ai basalti alcalini.

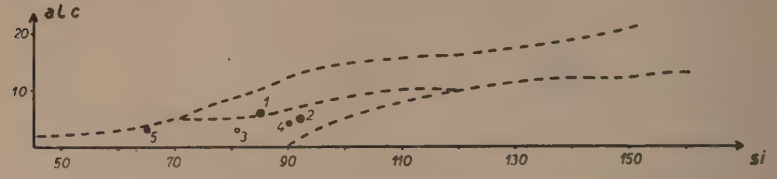


Fig. 1. – Diagramma *alc–si*, secondo Rosenbusch–Niggli, con la suddivisione dei campi propri ai basalti alcalini, ai subbasalti ed ai basalti normali.

1. – Basalto Uadi Suchiè. 2. – Basalto Burcà. 3. – Tokeite. 4. – Tipo *pirossenitico* (Niggli) 5. – Tipo *issitico* (Niggli).

Risulta che i punti rappresentativi delle rocce del Burcà e di Tokè cadono nel campo dei subbasalti assieme ai tipi *pirossenitico* ed *issitico* a cui si accostano, mentre da questi si scosta il basalto dell'Uadi Suchiè per una maggior alcalinità entrando nel campo dei basalti alcalini.

Ancor più evidente risulta la posizione di queste tre facies dalla loro localizzazione nel diagramma Q–L–M del Niggli; i loro punti si pongono infatti nel campo dei subbasalti più femici: i valori piuttosto bassi dei coefficienti L e Q denotano la scarsità degli elementi sialici, mentre il valore elevato del coefficiente M attesta la ricchezza degli elementi femici.

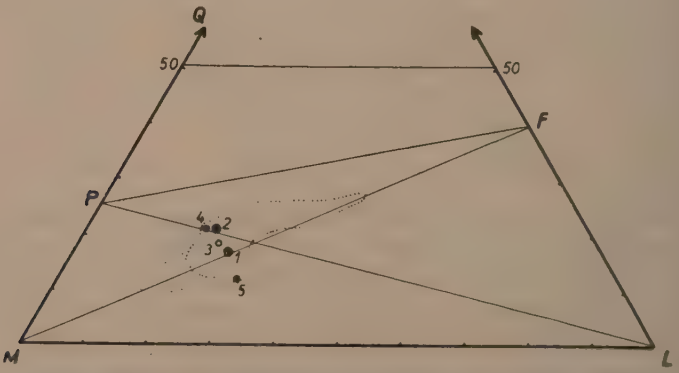


Fig. 2. – Diagramma Q–L–M con la delimitazione del campo dei subbasalti, secondo Niggli.

1. – Basalto Uadi Suchiè. 2. – Basalto Burcà. 3. – Tokeite. 4. – Tipo *pirossenitico* (Niggli). 5. – Tipo *issitico* (Niggli).

	Q	L	M
Tipo *issitico*	11.7	28.3	60.0
Basalto Uadi Suchiè	16.5	24.7	58.8
Tokeite	18.1	22.1	59.5
Basalto Burcà	20.4	21.2	58.4
Tipo *pirossenitico*	20.2	19.2	60.2

Viene in tal modo riconfermato e meglio precisato dalle due rappresentazioni diagrammatiche il carattere decisamente femico a lieve tendenza alcalina, più accentuata nella roccia dell'Uadi Suchiè, dei due basalti da me considerati, che assieme alla tokeite, studiata da Duparc e Molly, vanno inquadrati fra i tipi più femici dei *subbasalti*, assumendo una posizione ben distinta da quella degli altri normali basalti di cui è ricca l'Africa Orientale.

Geologia. — *Primi risultati di uno studio geologico sulla media Val Camonica a sinistra del fiume Oglio*(*). Nota di ALFREDO RIEDEL, presentata(**) dal Corrisp. GB. DAL PIAZ.

Durante l'estate del 1948 ho iniziato una serie di ricerche geologiche ed il rilevamento dettagliato alla scala 1 : 25.000 della zona della media Val Camonica posta sulla riva sinistra dell'Oglio e compresa fra i Monti Colombè Sablunera e Badile ed il fiume stesso. La regione da me studiata era già stata esaminata nelle sue grandi linee da A. Cozzaglio (bibl. 3) e soprattutto da W. Salomon (bibl. 9).

MATERIALI COSTITUTIVI DELLA REGIONE. – Nel settore nord–occidentale del territorio, a monte di Capo di Ponte, affiorano gli scisti cristallini prepermiani costituenti il primo elemento della serie stratigrafica da me esaminata. Essi sono rappresentati da micascisti, spesso chiaramente e fittamente pieghettati, più o meno cristallini e con intercalazioni quarzose. Ad essi succedono, separate da una discordanza talvolta poco evidente (discordanza ercinica), le arenarie quarzose del Permiano; queste ultime sono talvolta a grana fine (esempio arenarie scure a nord–est di Cimbergo), spesso grossolane (esempio a sud di Cimbergo) e in certi punti con letti conglomeratici ad elementi per lo più di quarzite e talora di argilloscisti violacei induriti (Salomon) (esempio ad ovest di Paspardo). Lo spessore massimo della formazione, che diminuisce rapidamente di potenza verso nord–est, raggiunge i 350 metri circa. Le arenarie permiane sono molto diffuse ed occupano un'area che da nord di Nadro presso il fondovalle alluvionale si estende verso il M. Colombè.

Al Permiano è sovrapposta la formazione cosidetta del Servino (Werfeniano inferiore), costituita da arenarie micacee, spesso molto argillose. Il loro colore è spesso verdastro, altre volte grigio–nerastro. Mentre le arenarie permiane sono massicce ed a grossi banchi, il Servino è in genere più

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Geologia dell'Università di Padova e compreso nel programma del Centro Studi di Petrografia e Geologia del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

Ringrazio vivamente il mio Maestro prof. Gb. DAL PIAZ, il prof. A. BIANCHI ed il dottor R. MALARODA per i consigli e gli aiuti prodigatimi.

(**) Nella seduta dell'11 dicembre 1948.

o meno fittamente stratificato e raggiunge una potenza massima di 200 metri. Esso si estende su di una fascia che va da Nadro e Ceto verso il M. Colombè con decorso parallelo a quello della formazione sottostante.

Il Werfeniano superiore è rappresentato, come nelle regioni contigue, dal calcare a cellette potente forse fino a 100 metri. Il suo colore giallastro ed il suo aspetto cariato lo rendono facilmente riconoscibile.

Fra quest'ultimo terreno e i sovrastanti calcari anisici fittamente stratificati si osserva una formazione massiccia molto caratteristica, diffusa pure in qualche altra parte dell'Adamello, che venne chiamata da Salomon col nome di « Eltodolomit ». Il Salomon, che nella nostra zona la constatò nel suo estremo lembo occidentale presso Ceto e Braone, afferma che quivi si trovano dei sedimenti costituiti da calcari spessi, compatti, grigio-chiari in grossi banchi, da calcari scuri e da calcari brecciati. A nord-ovest, verso il Badile, io ho osservato che la formazione continua (presentandosi con uno spessore di 100 e più metri) con calcari anche dolomitici massicci di un grigio talora scuro, altre volte invece molto chiaro, subito riconoscibili per la loro aspra morfologia. Secondo il Salomon, l'« Eltodolomit » è vicariante con il calcare a cellette ed appartiene quindi anch'esso al Werfeniano superiore. Nel nostro caso però i due terreni sono presenti contemporaneamente in tutta la zona [1] e sono seguìti dall'Anisico sovrastante a facies tipica, del modesto spessore di forse appena 80 metri. Tali fatti inducono a ritenere che il cosidetto « Eltodolomit » di Ceto appartenga in questo caso per lo meno in parte, se non completamente, all'Anisico inferiore e che la facies anisica sovrastante a calcari fittamente stratificati sia attribuibile all'Anisico superiore. Il problema potrà venir risolto solo da ulteriori studi sul terreno e dal ritrovamento di fossili.

Dopo la facies tipica dell'Anisico (calcare scuro, un po' arenaceo, fittamente stratificato e pieghettato) vengono alcuni strati poco caratteristici di calcari nodulari, attribuibili al piano a *Trachyceras reitzi* (Livinallongo), ed indi dei calcari marnosi scuri a grossi strati, che rappresentano la formazione del Wengen (La Valle); la potenza complessiva di questo ultimo orizzonte è forse limitata ad un'ottantina di metri. L'affioramento maggiore si trova ad ovest di Badile; un altro minore e isolato è forse presente allo sbocco della Val Palobbia. Nella zona ad occidente del Badile si osserva che sopra al Wengen segue un'alternanza di strati nerastri con altri di colore bianco; a questa formazione succede il calcare di Esino stratificato ed infine quello massiccio che forma la cima del Badile.

Le rocce eruttive presenti nella zona orientale della regione sono costituite da tonalite a grana piccola, di aspetto porfiroide per la presenza di qualche individuo maggiore di anfibolo, talora con differenziazioni a grana minuta ed altre volte invece con tipi pegmatitici a cristalli di orneblenda lunghi anche più di un decimetro. I filoni (circa una trentina) sono rap-

(1) Anche a sud di Ceto dove il calcare a cellette sembra a prima vista mancante, esso pare invece presente benchè ridotto allo stato di breccia tettonica.

presentati da porfiriti verdi; solo in alcuni pochi casi si hanno dei tipi aplitici.

I fenomeni di metamorfismo di contatto hanno interessato localmente il calcare a cellette, che ne è rimasto leggermente ricristallizzato (M. Colombè), e l'Anisico stratificato provocando in quest'ultimo la formazione di diopside e granato (esempio ad ovest del M. Badile e a sud del M. Colombè). L'Esino è stato invece ricristallizzato completamente a Cima Bruciata in grossi cristalli che hanno reso molto friabile la roccia di tutto il monte, mentre ad

Materiali morenici messi in evidenza dall'erosione sulla scarpata del terrazzo presso Baite Colom ad oriente di Cimbergo e Paspardo.

(fot. dell'autore)

ovest del Badile la stessa formazione è stata trasformata localmente in rocce cornubianitiche contenenti granato, diopside ed epidoto come componenti essenziali.

Talvolta alcuni strati delle formazioni sedimentarie sono fortemente cristallizzati anche in zone abbastanza distanti dagli affioramenti tonalitici (esempio presso Paspardo), fenomeno che può essere forse in rapporto con la vicinanza di qualche filone o apofisi non affiorante.

TETTONICA. – Il motivo tettonico fondamentale della regione presa in esame è costituito dalla cosidetta « sinclinale del Badile », con asse a direzione est nord est-ovest sud ovest, immergentesi verso ovest sud ovest. La

nostra zona si estende quasi totalmente sul fianco settentrionale della sinclinale, il cui asse passa per la cima del Badile e per lo sbocco della Val Palobbia. La pendenza del fianco nord della sinclinale, perpendicolarmente alla cerniera, è di una ventina di gradi [2].

La sinclinale è interrotta nella sua uniformità da alcune faglie. Oltre ad una frattura di piccole proporzioni fra il Servino e le arenarie permiane presso B. Flesso, già segnalata dal Salomon, ho osservato delle altre faglie presso Paspardo e presso la Val Palobbia. Fra Paspardo e Cimbergo, nella gola incisa dal torrente Re, si può osservare tra il Werfeniano ed il Permiano a giacitura normale una faglia a piano verticale con un rigetto verticale di un'ottantina di metri. Il Permiano viene in questo caso quasi a contatto con il calcare a cellette, determinando una lacuna tettonica comprendente tutto il Servino. L'intersezione del piano di faglia con la superficie topografica è fortemente sinuosa: il primo e l'ultimo tratto hanno direzione nord–sud, quello mediano nord ovest–sud est. La sua lunghezza accertata è di mezzo chilometro.

A sud del ponte della Sega a nord–est di Cimbergo ho osservato un'altra faglia di minori proporzioni fra il Servino ed il Permiano. Ivi il Servino fratturato è stato leggermente incurvato verso l'alto dalle arenarie lungo il piano di faglia.

Una faglia a direzione est–ovest (girata un po' verso est nord est–ovest sud ovest) ha interessato l'« Eltodolomit » a sud–est di Ceto, non lungi dallo sbocco della Val Palobbia. Penso che il labbro meridionale di essa si sia abbassato rispetto a quello settentrionale. La dislocazione attraversa l' «Eltodolomit » formando una breccia di faglia ben visibile specialmente in un breve canalone e, a quanto pare, ha interessato nel suo tratto occidentale anche il calcare a cellette, che è stato completamente triturato e assottigliato in misura sensibile.

L'Anisico superiore (ed in parte minima pure l'Esino stratificato) ha reagito in modo alquanto diverso alle sollecitazioni tettoniche, ripiegandosi fittamente invece di spezzarsi e di formare delle faglie.

Il tratto orientale della nostra zona è occupato, come si è detto, da roccia intrusiva tonalitica riferibile geologicamente all'etmolite dell'Adamello. Anche qui si può infatti osservare che tanto i terreni del calcare a cellette presso il M. Colombè, quanto l'Esino ricristallizzato di Cima Bruciata ecc. accennano ad immergersi sotto la massa del plutone, come avviene appunto negli etmoliti. Si sono osservati pure lembi di terreni sedimentari inglobati nella roccia eruttiva (per esempio il lembo anisico pieghettato e metamorfosato a sud del M. Colombè).

Alcuni filoni aplitici ed uno di porfirite verde tagliano la tonalite. Gli altri filoni (25 circa) di porfirite verde affiorano nei terreni sedimentari e sono di regola discordanti. Sul totale osservato una metà circa ha giacitura sub-

(2) Bisogna usare molta cautela nel tenere conto delle giaciture misurate sull'Anisico pieghettato, specialmente se in affioramenti di poca estensione, dato che queste misure indicano per lo più la giacitura del fianco di una pieghetta e non quella dell'intera formazione.

verticale; la maggior parte dei rimanenti sono inclinati tra 35° e 55°. Non ho riscontrato l'esistenza di filoni orizzontali.

MORFOLOGIA E TERRENI DEL QUATERNARIO. – L'azione dei ghiacciai ha lasciato la sua traccia profonda nella tipica morfologia a circo delle zone a nord e a sud del Sablunera e a ovest del Badile. Anche le lisciature delle rocce, assai evidenti nelle formazioni dure e resistenti del Permiano, dimostrano la energica azione di questo fattore geologico; particolarmente le arenarie permiane che affiorano sul terrazzo di Cimbergo sono modellate a dorso di montone ed a grandi mammelloni. La zona fra Cimbergo e Paspardo e le montagne a est dei due paesi sono rivestite per vasti tratti da una spessa coltre morenica a materiali prevalentemente tonalitici con qualche elemento di scisti cristallini.

Inoltre ho avuto occasione di osservare l'esistenza di almeno due terrazzi allungati in direzione nord–sud, dei quali uno a quota 700 fra Cimbergo ed il torrente Figna ed un altro a quota 1500, che si estende da Baitoni a Baite Colom ed al Pian Grande. Sul ciglio occidentale di quest'ultimo terrazzo, si aprono delle vaste frane nel morenico.

Due ampie conoidi di deiezione sono presenti nella pianura alluvionale del fondovalle, l'una a nord di Capo di Ponte col suo apice presso Le Sante ed un'altra a sud del paese col suo vertice presso il torrente Figna.

BIBLIOGRAFIA

(1) BIANCHI A. e DAL PIAZ GB. – *Studi geologico–petrografici sul Massiccio dell'Adamello: Il settore meridionale del Massiccio dell'Adamello. Relazione sul rilevamento e studi preliminari della zona compresa fra la Valle di Stabio e l'alta Valle del Caffaro.* « Bollettino del R. Ufficio Geologico italiano », vol. LXII ,pp. 1–86, con 5 tav. e 7 fig. nel testo (1937).

(2) BIANCHI A. e DAL PIAZ GB. – *Atlante geologico–petrografico dell'Adamello meridionale: regione fra lo Stabio ed il Caffaro.* « Memorie dell'Istituto Geologico della R. Università di Padova », vol. XII, pp. 1–18, con 15 tav. ed una carta geologica alla scala 1 : 12.500 (1937).

(3) COZZAGLIO A. – *Note esplicative sopra alcuni rilievi geologici in Val Camonica.* « Giorn. di Mineralogia », vol. V, pp. 23–43. Pavia (1894).

(4) FINKELSTEIN H. – *Die Gruppe des Monte Frerone.* « Zeitschr. d. Deutsch. u. Österr. Alpenvereines, », XX, pp. 306–330 (1889).

(5) MALARODA R. – *Condizioni tettoniche nella zona di Prestine (bassa Val Camonica).* In corso di pubblicazione nei « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei ».

(6) MONTI R. – *Studi petrografici sopra alcune rocce della Val Camonica.* « Giorn. di Mineralogia », vol. V, pp. 44–71, Pavia (1894).

(7) PRUDENZINI P. – *La Conca d'Arno e le Valli Zumella–Tredenus; Pallobia–Paghera–Dois.* « Boll. Club Alpino Italiano », vol. XXVII, pp. 62, con una cartina (1893).

(8) RAGAZZONI G. – *Profilo geognostico del pendio meridionale delle Alpi Lombarde.* Commentari dell'Ateneo di Brescia (1875).

(9) SALOMON W. – *Die Adamellogruppe.* « Abhandlungen k. k. Geologischen Reichsanstalt », vol. XXI, fasc. I, pp. 1–433, con 6 tavole ed una carta geologica al 1 : 75.000, Wien (1908).

(10) SCHULZ K. – *Die Adamellogruppe Erschliessung der Ostalpen.* « Veröffentlichung des Deutsch. Österr. Alpenvereines », pp. 177–243, Berlin (1893).

Geologia. — *Condizioni tettoniche della zona di Prestine (media Valcamonica)* (*). Nota di ROBERTO MALARODA, presentata (**) dal Corrisp. Gb. DAL PIAZ.

Durante l'estate 1948 ho intrapreso, con i mezzi del *Centro Studi per la Petrografia e la Geologia del C.N.R.*, una campagna di ricerche geologiche sul fianco sinistro della media Valcamonica, all'altezza di Breno. Una delle zone esaminate fu quella di Prestine, alla confluenza della Valle delle Valli con la Val di Prestello. Qui ho riscontrato condizioni tettoniche particolari che, per la loro importanza e novità, mi hanno indotto a darne comunicazione dettagliata nella presente Nota.

Solo fugaci accenni se ne trovano nella bibliografia. Il Cozzaglio (bibl. 2 p. 20 e t. 1 sez. D) ammette che il calcare a cellette (« Rauchwache ») di Val di Prestello (« Val Sanguinera ») sia una facies eteropica dell'anisico e del ladinico e spiega così i contatti anormali che vi si osservano. Anche il Salomon, accurato rilevatore dell'Adamello, pure segnalando l'esistenza di una faglia con direzione NE–SW nei pressi di Prestine, non avverte la complicazione della zona e ne dà, sia nel testo della sua monografia (bibl. 5, pp. 28–29), sia nella carta al 75.000 allegata, una interpretazione quasi totalmente erronea.

A chi si porti a Prestine seguendo la strada carrozzabile che sale da Bienno si presenta, a partire dalla prima curva e fino all'abitato di Prestine, la serie stratigrafica normale dall'Esino al Wengen, agli strati a *reitzi*, all'anisico superiore e inferiore. La giacitura qui è approssimativamente concordante con quella che si riscontra al Dosso del Cerreto, presenta cioè immersioni medie a N o NE. Piccole fratture e faglie hanno importanza puramente locale.

Condizioni molto complesse si possono osservare invece nella Val Prestello. La parete franosa sulla destra (A'' della fig. 3) e le grandi aree a calanchi che spiccano anche da lontano sul suo fianco sinistro (figg. 1 e 2) sono infatti formate dal Werfen superiore estremamente tettonicizzato. Il trituramento della roccia è spinto a tal punto che quasi mai si può distinguere la giacitura originaria. Solo sulla destra (A' della fig. 3), subito a monte del sentiero che sale a Dossa, si vedono potenti banchi di gessi zonati bianchi, rosei e grigi, con alternanze di straterelli calcarei (talora piritizzati sulle superfici di stratificazione) e marnosi; la loro giacitura è suborizzontale. Anche le fascie di

(*) Il lavoro, compreso nel programma del Centro Studi di Petrografia e Geologia del Consiglio Nazionale delle Ricerche, è stato eseguito nell'Istituto di Geologia dell'Università di Padova.

Ringrazio vivamente il mio Maestro, prof. GB. DAL PIAZ, per avermi indirizzato allo studio di questa regione ed aiutato durante l'esecuzione del lavoro. Ringrazio pure il professor P. LEONARDI per gli utili consigli fornitimi.

(**) Nella seduta dell'11 dicembre 1948.

porfiriti che attraversano il calcare a cellette sono fratturatissime e spesso frazionate in grossi blocchi isolati e frantumati, frammisti al materiale calcareo-argilloso più tenero. Ciò nonostante, specialmente sulla destra della valle, esse sembrano conservare una giacitura non lontana dalla orizzontale. Nei calanchi sulla sinistra (figg. 1 e 2) il materiale è costituito da un impasto di blocchi di porfiriti, di calcari giallastri e biancastri compatti, di marne e arenarie giallastre. I materiali più compatti sono tutti allo stato di breccia, molto angolosi e avviluppati nel materiale giallo, argilloso o arenaceo.

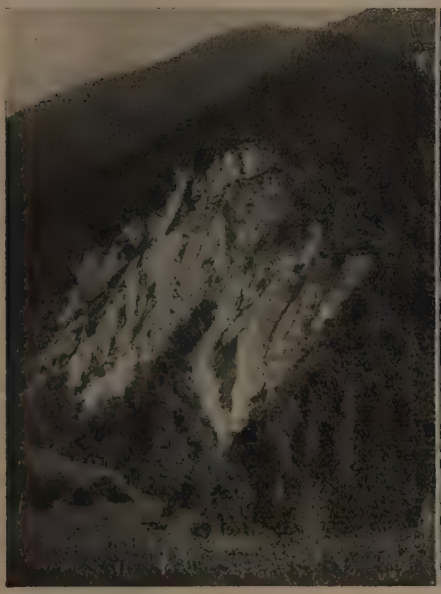


Fig. 1.

Fig. 2.

(R. MALARODA fot.).

Fig. 1. – L'affioramento più settentrionale del fianco sinistro di Val di Prestello, visto dalla carrozzabile Bienno-Bazena, sul fianco opposto. Si scorgono i calanchi incisi entro alla breccia tettonica del calcare a cellette e delle porfiriti. La paretina in alto è formata da calcari anisici.

Fig. 2. – I calanchi della parte più occidentale del medesimo affioramento visti dall'alto.

Sopra questa breccia tettonica del Werfen superiore, sul fianco sinistro della valle, si presenta l'anisico. Probabilmente si tratta di anisico inferiore, ma una determinazione precisa non è stata possibile. Esso si può osservare in straterelli fini di calcare nero, fratturati e pieghettati, oppure in banchi più potenti e soltanto fratturati, della stessa roccia. Verso l'alto forma tutta l'ossatura della dorsale del Doss del Zuf, sulla quale, dopo Degna, si arrampica la strada per Bazena; in questa zona esso si presenta spesso molto fratturato, solcato da numerose faglie per lo più di non grande importanza, e quasi sempre fortemente piritizzato. Col suo detrito il calcare anisico ricopre

tutto il pendio del fianco sinistro ad eccezione dei tre affioramenti di Werfen superiore in corrispondenza ai calanchi; i detriti antichi hanno formato un potente crostone diluviale, ben cementato e poco poroso, che affiora qua e là e corrisponde al pendio d'equilibrio rispetto all'antico fondovalle.

Insospettatamente diversa è invece la struttura del fianco destro di Val di Prestello (fig. 3), dove la breccia tettonica del Werfen superiore è ricoperta, in corrispondenza ad un piano suborizzontale lungo il quale si osserva il contatto, dall'Esino. Si tratta della base della formazione, rappresentata da banchi di dolomie o calcari dolomitici grigi o biancastri e da banchi di calcari bianco–candidi e più raramente neri; verso il basso si notano fascie irregolari di un materiale compatto calcareo–limonitico di colore bruno–rugginoso [1], talora anche abbastanza potenti (10–20 cm.). Salendo verso la cima del Monte di Dossa (q. 866) si osserva che le zone di maggior

(R. Malaroda, fot.)

Fig. 3. – Il fianco destro della Valle di Prestello.

A = Werfen superiore (calcare a cellette); A′= Werfen superiore (complesso relativamente poco disturbato di banchi di gessi zonati alternanti a strati calcarei e straterelli marnosi); A″= Werfen superiore (breccia tettonica del calcare a cellette); B=Breccia tettonica mista tra calcare a cellette e calcari anisici; C=anisico (calcari neri); D=ladinico medio e superiore (calcari, calcari dolomitici e dolomie dell'Esino); π = porfiriti verdi tettonicizzate; Q = quaternario (alluvioni e morenico); Q′= quaternario (detrito di falda costituito da calcari anisici); (*d*) = scorrimento della Val di Prestello.

disturbo nell'Esino si trovano alla base, presso il contatto col calcare cariato, fratturazioni si osservano però anche più in alto e presso la cima si notano nei calcari anche delle vene di materiale limonitico. Salendo il pendio meridionale dello stesso monte, oltre a calcari bianchi, e alle già nominate ripetute alternanze con brecce a materiale di cementazione calcareo limonitico,

(1) Queste fascie ad andamento irregolare sembrano in qualche caso dovute a locali addentellati di facies, ma in altri casi risulta ben evidente che si tratta di materiale formatosi nella ricementazione di fratture così da costituire, con i frammenti e i blocchi della roccia originaria, una breccia tettonica completamente ricementata. Oltre che sul fianco destro della Val di Prestello, ho osservato tali brecce dell'Esino salendo verso la cima del Monte di Dossa, a NNE di Prestine. Brecce analoghe, ma con materiali dell'anisico, ho osservato, non in posto, lungo la strada che porta all'Albergo Salice, poco dopo aver lasciato il fianco sinistro della Val di Prestello. Ho esaminato anche un grosso blocco di breccia con materiale limonitico e calcare dell'Esino, poco sopra il gruppo di case a WNW di Foppa Faeda, in basso, sulla sinistra di Val di Prestello: non è probabilmente in posto e potrebbe provenire da un'antica frana del fianco destro della valle.

si trovano anche, ripetutamente, dei calcari neri. Gli affioramenti sono qui scarsi e isolati e non permettono di giudicare se trattasi di facies diverse dell'Esino [2], o invece di poco potenti scaglie dell'anisico alternanti all'Esino. Il fatto però che queste rocce non sieno molto deformate è contrario alla seconda ipotesi. Non è improbabile del resto che qui siano rappresentati anche dei termini della formazione nota sotto il nome di *Eltodolomit*, parte della quale andrebbe attribuita al Werfen superiore e parte all'anisico inferiore, come risulta probabile in base a recenti osservazioni di A. Riedel nella vicina zona di Capo di Ponte (bibl. 4).

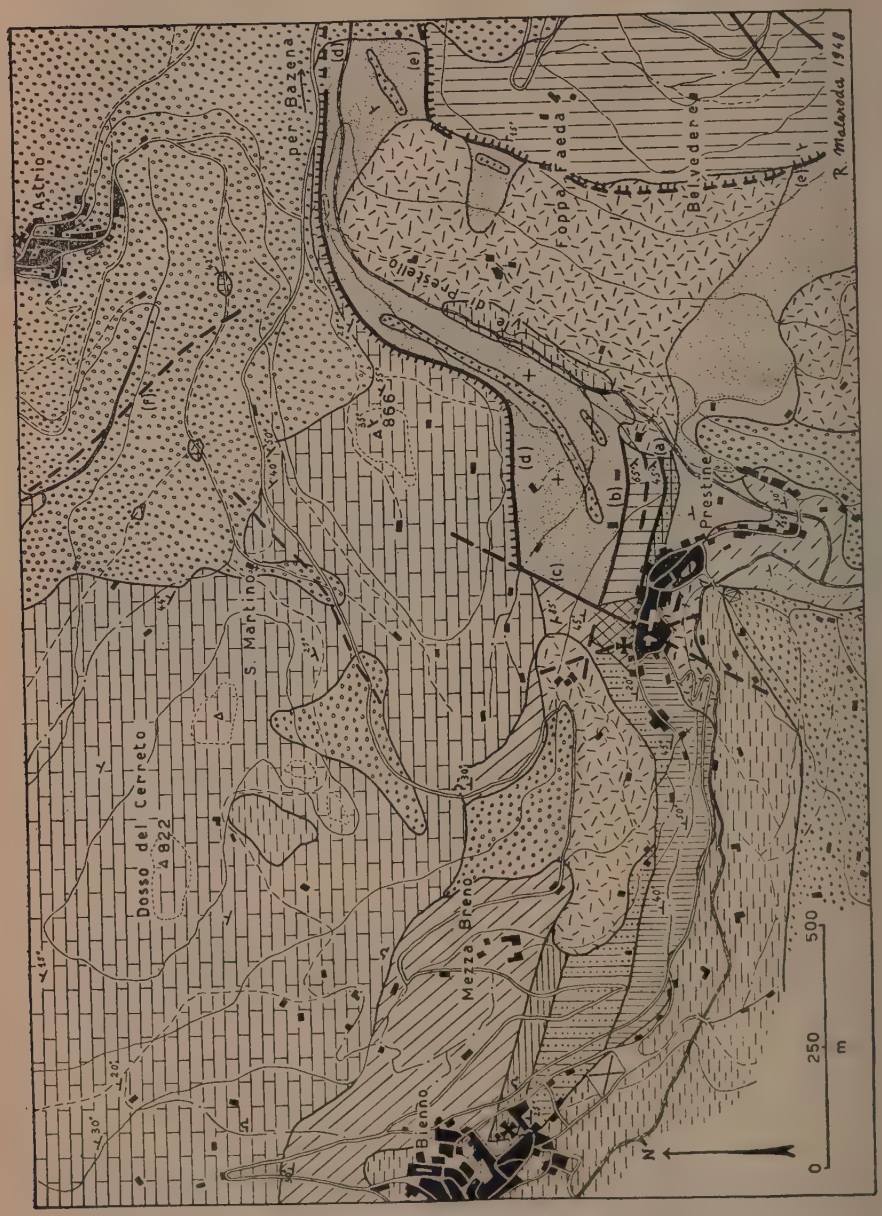
Dato l'estremo grado di cataclasi del Werfen superiore e i fenomeni di laminazione e fratturazione che si notano nelle rocce dell'anisico e dell'Esino sovrastanti, risulta evidente che in questa zona si sono verificati notevoli movimenti tettonici. Vista la suborizzontalità del piano di movimento, il disturbo deve aver avuto il carattere di scorrimento e la sua importanza deve essere stata considerevole se esso ha potuto produrre l'eliminazione completa dei termini anisico–Livinallongo–Wengen [3] sul fianco destro della valle. Più difficile è inquadrare questo scorrimento nel quadro generale della tettonica della media Valcamonica. Forse si potrebbe tentare di raccordarlo con lo scorrimento di Lozio, di cui Erdman ha segnalato l'esistenza sul fianco destro della Valcamonica, all'altezza di Breno (bibl. 3, p. 49, fig. 9 e carta geologica). Il problema non è comunque risolvibile se non su scala regionale e richiede la risoluzione preliminare di altri quesiti, fra cui per esempio quello dell'eventuale esistenza di una linea di dislocazione tra Esino e raibliano lungo il fianco destro della Valcamonica, dislocazione di cui ho verificato la presenza in un punto lungo la strada statale, all'altezza del passaggio a livello a NE di Lanico, ma della quale non ho potuto stabilire l'andamento e l'importanza, per mancanza di tempo.

Nella parte bassa della Val di Prestello, poco prima di raggiungere le case più alte di Prestine, sulla destra, una faglia (*b*) separa il calcare a cellette dall'anisico; quest'ultimo presenta due giaciture diverse [4], probabilmente separate tra loro da una faglia minore. Segue, proseguendo verso sud, una breccia tettonica tra calcare a cellette ed anisico, breccia che costituisce lo sperone roccioso sovrastante la parte più elevata dell'abitato di Prestine. Questa roccia non presenta stratificazione distinguibile salvo in alto, dove qualche grosso banco di anisico sembra immergere a NW. Ancora più a sud, quando si entra in paese, si trovano infine il Werfen superiore e poi il Werfen inferiore, normali, con direzione N–75° E e pendenza di 30° a NNW.

(2) A diverse riprese ho dovuto osservare, nell'esteso affioramento dell'Esino che ha per centro il Dosso del Cerreto, degli strati di calcari neri o grigio–neri, talora arenacei, sempre di scarsa potenza, che costituiscono un tipo litologico insolito per la formazione, normalmente rappresentata da dolomie, calcari o calcari dolomitici bianchi o grigio–chiari.

(3) Nel caso che sul fianco destro di Val di Prestello fosse rappresentata la formazione dell'*Eltodolomit*, l'anisico sarebbe, benchè in minima parte, ancora rappresentato.

(4) Più a nord: direzione N–45° W e inclinazione di 65° a SW; più a sud: direzione N–45°W e inclinazione di 45° a SW.



Carta geologica della zona di Prestine.

1. Alluvioni e depositi di terra rossa; 2. terreni detritici; 3. terreni morenici; 4. Esino; 5. Wengen; 6. strati a *raibl*; 7. in generale; 8. anisico superiore; 9. anisico inferiore; 10. Werfen superiore; 11. Werfen inferiore; 12. porfiriti; 13. tettonica dell'anisico; 14. breccia tettonica tra calcare a cellette e calcare anisico; 15. linee di scorrimento; 16. linee di (*c*) faglia di Prestine; (*d*) ed (*e*) scorrimento di Val di Prestello; (*f*) faglia del Pilo.

Alquanto complesse sono pure le condizioni tettoniche del fianco del Monte di Dossa che fa da sfondo al villaggio di Prestine. Osservandolo da sud, dal lato opposto della valle (fig. 4) si notano, nella sua parte bassa, due pareti, formate essenzialmente di calcari anisici e separate da una zona intermedia, retrostante alla chiesa parrocchiale; qui affiora una minuta breccia di calcari anisici che, appunto perchè più degradabile (è tuttavia molto compatta), ha permesso la formazione di un pendio coperto di vegetazione lungo il quale sale un sentiero. Percorrendolo, verso l'alto, s'incontrano strati del Wengen con orientazioni talora discordanti da quella normale. L'osserva-

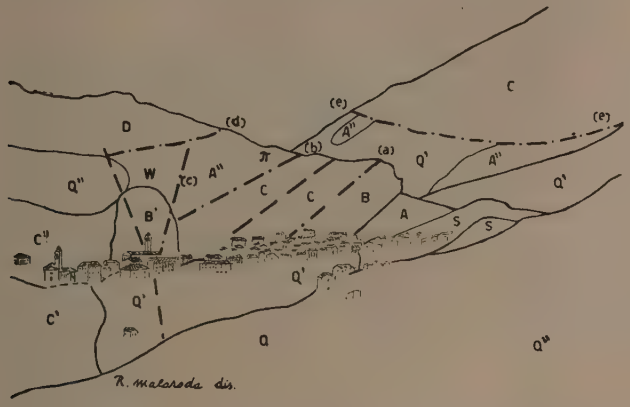


Fig. 4. – Prestine, il Monte di Dossa e la Val di Prestello, visti da SW.

S = Werfen inferiore (calcari marnosi e arenacei del Servino); A = Werfen superiore (calcare a cellette); A'' = Werfen superiore (breccia tettonica del calcare a cellette); B = breccia tettonica mista tra calcare a cellette e calcare anisico; B' = breccia tettonica dei calcari anisici; C = anisico (calcari neri); C' = anisico inferiore (calcari neri per lo più in straterelli); C'' = anisico superiore (banchi di calcari neri di notevole potenza o alternanze tra strati di calcari neri e strati di egual potenza di calcari marnosi nerastri (presso la chiesa della Madonna, di Prestine); W = Wengen (calcari marnosi o arenacei scuri); D = ladinico medio-superiore (calcari bianchi, grigi o neri, calcari dolomitici e dolomie bianche o grigie dell'Esino); Q = quaternario (alluvioni); Q' = quaternario (detrito di falda); Q'' = morenico e morenico rimaneggiato.

Le linee di dislocazione accertate sono segnate a tratto e punto, quelle ipotetiche a semplice tratto. (*c*) = faglia di Prestine; (*d*) ed (*e*) = scorrimento della Val di Prestello.

zione, in questo punto, come lungo tutto il pendio del monte, è resa difficile dalla grande estensione dei coltivati. Non si può escludere quindi che, benchè non osservati, siano presenti anche gli strati di Livinallongo (strati a *reitzi*), nè è possibile dire fino a che punto continui, verso W, lo scorrimento di Val di Prestello. L'esistenza di un esteso disturbo tettonico a N di Prestine mi pare però dimostrata; esso ha il carattere di una faglia (*c*) il cui piano raggiunge in alto il piano di scorrimento della Val di Prestello (*d*) e forse prosegue verso NNE fino a raggiungere la faglia del Pilo (*f*). La sua esistenza era già stata indicata dal Salomon, che ne accenna nel testo e la segna nella carta allegata. L'estesa copertura di detrito, alluvioni e morena impedisce di accertare se essa prosegue verso sud e di stabilirne la giacitura, che sem-

brerebbe però prossima alla verticale. Data la potenza della fascia cataclastica non è improbabile che esistano inoltre in questa zona una o più faglie con direzione NNW–SSE, tanto più che ciò spiegherebbe anche le notevoli variazioni di giacitura che si osservano negli scarsi affioramenti del Wengen sovrastante. Comunque la faglia, o le faglie, di Prestine hanno un notevole significato tettonico non solo per l'intensità delle deformazioni prodotte ma anche perchè esse si trovano in una zona verso cui convergono (a formare un vero nodo tettonico) la superfice di scorrimento della Val di Prestello e le faglie (*a* e *b*) che accompagnano il cuneo anisico nel calcare a cellette del Werfen superiore, sul fianco destro della valle. Altre minori deformazioni a carattere locale si associano alle maggiori già nominate; così il calcare dell'anisico superiore a W della chiesa di Prestine è attraversato da numerosi sistemi di fratture tutte approssimativamente con direzione N–50° E e inclinazione di 50° a NW, così l'anisico inferiore che si attraversa sulla carrozzabile Bienno–Prestine poco prima di arrivare a Prestine è solcato da innumerevoli vene di calcite bianca o grigio–nera, ricementanti fratture. Si può osservare inoltre che, data la costanza della giacitura del Werfen inferiore nella zona a SSE di Prestine e sul dosso tra Val delle Valli e Val della Grigna, il Werfen superiore dovrebbe affiorare sul fianco destro del tratto di valle tra Bienno e Prestine. Se ciò non avviene, nella zona ad W della faglia di Prestine, ciò è probabilmente dovuto alla faglia in questione o, più facilmente, ad una riduzione di potenza, o eliminazione, del calcare a cellette per altre cause tettoniche.

Infine, l'antico solco vallivo seguìto dalla carrozzabile di Bazena, tra il Monte di Dossa (q. 866) e il Dosso del Cerreto è pure probabilmente attraversato da una faglia. La scarsità degli affioramenti non permette di verificare questa ipotesi resa probabile dalle frequenti discordanze di giacitura negli strati ai due fianchi della valle stessa. Della faglia del Pilo (*f*), che probabilmente si raccorda al piano di scorrimento della Val di Prestello a sud di Astrio, è stato già trattato dal Salomon (bibl. 5), dal Wilckens (bibl. 6) e dall'Erdman (bibl. 3).

Bibliografia.

(1) A. Bianchi e Gb. Dal Piaz, *Il settore meridionale del massiccio dell'Adamello. Relazione sul rilevamento e studi preliminari della zona compresa fra la valle di Stabio e l'alta valle del Caffaro.* « Boll. Uff. Geol. It. », *62*, 1–86, 5 tt. e 7 ff. n. t. (1937).

(2) A. Cozzaglio, *Note esplicative sopra alcuni rilievi geologici in Valcamonica.* « Giorn. di Min., Crist. e Petr. », *5*, 1–21, t. 1 (1894).

(3) D. A. Erdman, *De geologie van de westhelling van het Val Camonica tusschen het dal Val Borno en het Val Clegna.* « Van Gorcum's Geologische Reeks », *3*, 56 pp., 12 ff., 1 carta geol. e profili al 25.000 (1939).

(4) A. Riedel, *Primi risultati di uno studio geologico sulla media Val Camonica a sinistra del fiume Oglio.* « Rend. Acc. Naz. Lincei », *6*, questo fascicolo (1949).

(5) W. Salomon, *Die Adamello Gruppe.* « Abhandl. d. geol. Reichsan. », Wien, *21* e *22*, con carta geol. al 75.000 (1908–1910).

(6) R. Wilckens, *Beitrag zur Tektonik des mittleren Ogliotales.* « Zeitsch. d. deutsch. Geol. Gesell. », B–Monatsber., 540–550, 2 ff. (1911).

Biologia (Microbiologia). — *Isolamento e studio di fagi attivi sui micobatteri* (*). Nota di GIUSEPPE PENSO e VITTORIO ORTALI, presentata (**) dal Corrisp. D. MAROTTA.

Più di una volta è stata segnalata l'esistenza di micobatteri provvisti di capacità autolitiche: ricorderemo le osservazioni di Johnson e Renfrew (1928), che constatarono autolisi nelle culture di un tubercolare umano (H 37) mantenuto per oltre sette settimane in terreno di Long; quelle di Steenken (1935), compiute su vecchie culture dello stesso ceppo H 37 e dalle quali riuscì a isolare per filtrazione un principio litico ch'egli, però, non identificò nè ravvicinò a un fago; quelle di Laporte (1943), fatte su varie specie di *Mycobacterium* (specie che non nomina, salvo un accenno generico a ceppi umani, bovini e aviari); quelle recentissime di van Deinse (1948) su quattro ceppi umani (Ro., Ja., Mir. e un tubercolare di origine renale), sopra un ceppo bovino (Guè. 134) e sul BCG mantenuti per alcuni mesi su patata glicerinata.

Nessuno di questi Autori accenna, però, neppure di sfuggita, alla possibilità che la lisi da essi descritta sia da attribuirsi a un virus: essi si limitano di solito alla semplice esposizione del fenomeno osservato o a considerazioni di questo genere (van Deinse): «Il semble s'agir d'une hydrolyse, favorisée d'une part par la pomme de terre, d'autre part par l'absence d'air ».

Più precisi sono stati Gardner e Weiser (1947) i quali, cercando isolare germi ad azione antagonista sui micobatteri, notarono una volta fenomeni litici che attribuirono a un fago. Nel corso delle ricerche essi riuscirono a isolare tale principio filtrando per Berkefeld un infuso di terra arricchito settimanalmente con 10 cm^3 di una sospensione di *Mycobacterium smegmatis* e mantenuto a 37° C. per otto mesi. Infruttuosi furono, invece, i tentativi di isolare il fago direttamente da infusi privi di *Mycobacterium smegmatis*. Il fago di Gardner e Weiser si mostrò attivo soltanto sul ceppo da cui venne isolato, inattivo su un altro ceppo di *Mycobacterium smegmatis* e su uno di *Mycobacterium phlei*.

L'insieme di queste osservazioni colpì particolarmente la nostra attenzione – interessati, come siamo, in tutti i problemi attinenti i micobatteri, – e la colpì soprattutto per il fatto che noi vedevamo nell'esistenza di eventuali fagi, una possibile chiave per classificare il confuso genere *Mycobacterium*.

Decidemmo, così, di affrontare il problema tentando l'isolamento di fagi attivi sui micobatteri.

ISOLAMENTO DEI FAGI. – Se fagi antimicobatterici esistono – ci dicemmo –, essi debbono sicuramente coesistere coi germi acidoresistenti, là dove questi sono più facilmente reperibili.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Superiore di Sanità di Roma.
(**) Nella seduta dell'11 dicembre 1948.

Sulla base di nostre precedenti esperienze sull'isolamento dei micobatteri (Penso, Cattaneo, Morellini e Ortali, 1948), scegliemmo una zona terrosa, alla periferia di una concimaia, zona non rimossa da tempo e nella quale, oltre a essere presenti residui di stabbio, si riversava gran parte del liquame scolato dalla concimaia stessa. In tale zona noi avevamo riscontrato con costanza la presenza di germi acidoresistenti. Una piccola massa di questa terra, all'incirca un chilogrammo, veniva stemperata entro un recipiente di vetro con una parte o due di acqua a seconda dell'idrofilia delle sostanze presenti nella terra stessa. Mescolavamo, filtravamo prima per garza, poi per carta e infine, una certa quantità, per Seitz.

Tutta la serie di operazioni veniva compiuta in una sola mattinata.

Un'ansata del liquido filtrato veniva successivamente deposta sulla superficie di un agar–germi (brodo glicerinato al 2 % con 2 % di agar) e lasciata seccare; la piastra veniva poi immessa in termostato a 37° C. La lettura veniva fatta dopo uno, due o più giorni a seconda della rapidità di sviluppo del ceppo impiegato.

In queste prime prove orientative noi usammo soltanto i seguenti ceppi (per i quali rimandiamo alla nostra prima Nota sui micobatteri): Battaglini, Clegg I, Friburgensis, Grassberger, Lepra Kruse, *Myc. avium*, *Myc. enteriditis*, Pellegrino, Rabinowitsch e Timoteo. La ragione della scelta di questi ceppi e non di altri, risiedette nel fatto che da una serie di prove eseguite sulla termoresistenza dei micobatteri e sulla utilizzazione da parte loro degli idrati di carbonio (prove che non appena terminate riferiremo in una prossima Nota) avevamo tratta la convinzione che i vari micobatteri sino ad oggi isolati e descritti si potevano riunire in un certo numero di gruppi più o meno ben distinti. I ceppi sopraelencati sono appunto i rappresentanti di questi vari gruppi.

Le prove iniziate furono ben presto coronate da successo avendoci portato all'isolamento di un primo gruppo di fagi (Nota preliminare: Ortali 1948): in una piastra di agar–Timoteo trattata col filtrato di cui sopra, si notò, infatti, una zona con ben 60 aree di lisi, zona che venne tagliata fuori dalla piastra, pestata in mortaio e diluita con brodo; la sospensione venne filtrata per carta e quindi per Seitz. Il filtrato venne nuovamente passato su agar–Timoteo: si riottenne la lisi. Il procedimento fu ripetuto sempre con egual successo e il fago venne così mantenuto su agar–Timoteo.

Dopo pochi giorni dal primo isolamento, si ottenne, sempre con la stessa tecnica, una lisi puntiforme in una piastra di agar-Friburgensis. Col metodo dell'agar–puntura si contaminò una seconda piastra di agar-Friburgensis ottenendo una zona litica di maggiori dimensioni e che venne successivamente trattata come quella ottenuta sul Timoteo.

In un terzo tempo si ottenne, sempre con lo stesso metodo, una lisi puntiforme in una piastra di agar-Pellegrino, zona litica che venne trattata come la precedente.

Dopo un mese dal terzo isolamento, un altro ne riuscì su agar–Rabinowitsch. Con la solita tecnica il fago venne isolato e mantenuto su Rabinowitsch.

Altri fagi vennero successivamente isolati da piastre di Timoteo e da piastre di Friburgensis.

Nel frattempo avevamo richiesto a Gardner e Weiser il loro fago antismegmatis, fago che ricevemmo insieme al ceppo omologo di *Myc. smegmatis*.

Avevamo, così, a disposizione 5 fagi antitimoteo, 3 fagi antifriburgensis, 1 fago antipellegrino e 1 fago antismegmatis.

PREPARAZIONE DEI FAGI. — I fagi occorrentici per le varie prove da compiere venivano preparati su piastre di agar–Timoteo, agar–Friburgensis, agar–Pellegrino agar–Rabinowitsch e agar–*smegmatis* che si contaminavano con sospensioni in brodo del fago omologo e venivano, quindi, poste in termostato a 37°C. A crescita e lisi avvenuta, l'intero strato di agar veniva raccolto, pestato in mortaio emulsionandolo con brodo di carne a pH 7,2. La sospensione così ottenuta veniva liberata dall'agar mediante filtrazione per Seitz. A volte, allorchè si temeva che il contenuto fagico dell'agar fosse scarso e che i pochi fagi presenti venissero trattenuti dai filtri, centrifugavamo la sospensione dell'agar–brodo per un'ora a 5000 giri, raccogliendo il liquido sopranatante: tale tecnica si è dimostrata molto soddisfacente.

INDIVIDUAZIONE SIEROLOGICA DEI FAGI. – Prima di procedere oltre nello studio dei fagi a nostra disposizione, abbiamo voluto stabilire l'identità o meno dei dieci fagi in nostre mani e ciò col metodo della loro inattivazione con gli antisieri corrispondenti. Per compiere tale ricerca inoculavamo 5 cm^3 di una sospensione fagica, preparata come descritto nel paragrafo precedente, a un coniglio ogni 5 giorni e per 45 giorni; alla fine di tale periodo il coniglio veniva salassato. Il sangue si lasciava sierare e il siero veniva diluito a diverso titolo. Mezzo cm^3 della prescelta diluizione di siero veniva mescolato con una goccia del fago da individuare; il miscuglio veniva mantenuto in termostato per 24 ore a 37° C., dopo di che una goccia del miscuglio veniva saggiata col metodo dell'agar–patina.

Preparavamo, allo scopo, una emulsione in brodo del germe omologo al fago da saggiare, l'emulsione si faceva stemperando in brodo di carne a pH 7, 2 la patina di un'agarcultura. Un'ansata (ansa di 4 mm.) di tale sospensione veniva portata sopra una piastra di agar glicerinato al 2 %, precedentemente preparata, controllata per due giorni in termostato a 37° C. e lievemente essiccata lasciandola - nell'ultima ora di permanenza in termostato – col coperchio leggermente sollevato. L'ansa, carica di materiale, si appoggiava sull'agar e con essa, muovendola a spirale, si copriva un'area di circa cm. 1, 5–2 di diametro. Si lasciava essiccare per qualche minuto (2–5) e poi si deponeva su ogni area un'ansata del miscuglio fago–antisiero.

Se il siero preparato inattiva il fago in esame – il che significa che il fago con cui venne preparato il siero è identico al fago saggiato – si ha normale sviluppo del germe sull'agar–patina; se il siero preparato non inattiva il fago in esame – il che significa che il fago con cui venne preparato il siero è diverso da quello del fago saggiato – si ha lisi sull'agar–patina.

Con tale metodo saggiammo dapprima i fagi isolati sullo stesso germe e precisamente i cinque fagi antitimoteo, che risultarono eguali tra loro, e i due fagi antifriburgensis, che risultarono identici; successivamente praticammo le prove crociate tra l'antitimoteo rimasto, l'antifriburgensis, l'antipellegrino, l'antirabinowitsch e l'antismegmatis che risultarono tutti diversi tra loro.

I nostri fagi, dunque, si riducevano, a cinque: un fago antitimoteo, per il quale proponiamo il nome di *Phagus phlei;* un fago antifriburgensis, per il quale proponiamo il nome di *Phagus lacticola;* un fago antirabinowitsch al quale diamo il nome di *Phagus Rabinowitsch;* un fago antipellegrino, che chiameremo *Phagus Pellegrino;* un fago antismegmatis, che indicheremo col nome di *Phagus smegmatis.*

Caratteristica morfologica delle placche fagiche. — Stabilita sierologicamente l'esistenza di cinque specie di micobatteriofagi, abbiamo voluto osservare se nella loro estrinsecazione litica, le cinque specie si comportassero diversamente. Abbiamo potuto constatare, così, come ogni specie fagica desse sul ceppo omologo, col metodo dell'agar-germi, un'area litica a caratteristica sua propria.

Il *Phagus phlei* provoca una lisi a placca tondeggiante, a fondo non perfettamente trasparente, a margini leggermente sfumati; ogni placca ha un diametro medio di 2 mm. (1, 5–3 mm.).

Il *Phagus lacticola* provoca una lisi a placca tondeggiante, a fondo trasparente, a margini netti, quasi a stampo; ogni placca è piccolissima e non supera mai 1 mm. di diametro.

Il *Phagus Rabinowitsch* provoca una lisi a placca tondeggiante, a fondo poco trasparente, a margini netti e regolari; ogni placca è abbastanza grande presentando in media 2–3 mm. di diametro.

Il *Phagus Pellegrino* provoca un lisi a placca qualche volta tondeggiante, qualche volta elittica, a fondo molto trasparente, a margini spesso irregolari. Caratteristica principale delle placche di *Phagus Pellegrino* è quella di essere in continuo aumento di diametro sia sulle piastre lasciate in termostato, che in quelle lasciate a temperatura ambiente, tanto che la placca litica può raggiungere nello spazio di qualche settimana anche 2 cm. di diametro. In queste vecchie placche, più o meno rotondeggianti, ma a limite irregolare, si ha la crescita di colonie secondarie disposte tipicamente ad atollo al centro della placca stessa.

Se due aree litiche vengono ad incontrarsi, esse si influenzano a vicenda e ognuna si comporta come se trovasse nell'altra un ostacolo alla propria espansione; anche l'atollo centrale partecipa a questo fenomeno in tutto analogo a quello osservato nell'incontro di due colonie di germi visibili (Penso, 1948).

In queste grandi placche di *Phagus Pellegrino* abbiamo voluto studiare il contenuto fagico lungo il diametro della placca: è risultato che i fagi sono presenti sia alla periferia, sia alla metà del raggio, sia in vicinanza dell'atollo, sia nell'atollo stesso che nel centro della placca.

Il *Phagus smegmatis* provoca una lisi tondeggiante a margini irregolari, a fondo molto trasparente; le placche hanno in media 2 mm. di diametro.

TITOLAZIONE DELLE SOSPENSIONI FAGICHE. – Stabilito il numero delle specie fagiche in nostro possesso titolammo le diverse sospensioni dei fagi onde conoscerne l'esatta concentrazione e poter preparare sospensioni tipo con numero fisso e costante di fagi per centimetro cubo.

Anche per la titolazione delle sospensioni abbiamo preferito la tecnica su agar a quella su terreni liquidi, e ciò per evitare le difficoltà e gli ostacoli derivanti dall'uso dei terreni liquidi e di cui abbiamo detto più sopra. Come metodo abbiamo scelto quello dell'agar patina, così come è stato descritto nel paragrafo precedente, con la differenza di sostituire all'ansata del miscuglio fago-antisiero, una goccia di sospensione fagica debitamente diluita. La deposizione della goccia veniva fatta usando una pipetta di 1/10 di cm^3 e depositando su ogni area 1/100 di cm^3 di sospensione fagica. Abbiamo preferito questa tecnica a quella dell'ansa – comunemente usata nella tipizzazione delle salmonelle – perchè la riteniamo molto più precisa e tale da far ritenere di immettere sulla patina sempre una egual quantità di sospensione fagica.

Questa sospensione veniva diluita sino a 10^{-12} usando, per le varie diluizioni, provettoni da 25 mm. di diametro e 10 cm^3 di liquido in toto (9 + 1). Tra una diluizione e l'altra cambiavamo naturalmente di pipetta.

Titolata la concentrazione delle varie sospensioni fagiche, abbiamo preparato per ognuna di esse una sospensione di 1.000.000 di fagi per cm^3 che abbiamo adottato come nostra concentrazione tipo.

RAGGIO DI AZIONE DEI FAGI ISOLATI. – Individuati e titolati i vari fagi, abbiamo indagato sulla loro sfera di azione cimentandoli con tutti i micobatteri « classici » in nostre mani. Con il termine « classico » intendiamo indicare i micobatteri presenti nelle varie collezioni batteriologiche sparse per il mondo, già noti in letteratura e comunemente indicati con un nome ben definito e preciso, anche se non specifico, quei micobatteri, insomma, che nella nostra già riferita prima Nota sull'argomento, chiamammo « Ceppi di collezione ». Abbiamo preferito limitare per il momento la nostra indagine a tali ceppi, sembrandoci ancora prematuro saggiare una lunga serie di germi di nuovo isolamento e sui quali nulla sappiamo all'infuori della loro acido-resistenza e della loro origine.

Per il compimento di tali indagini, abbiamo operato con due diverse tecniche: col metodo dell'agar-patina, che abbiamo più sopra già descritto, e con quello dell'agar-germi che standardizzammo nella seguente maniera: 20 cm^3 di agar glicerinato (brodo glicerinato al 2 % con aggiunta del 2 % di agar) venivano versati in una capsula di Petri di 10 cm. di diametro nella quale avevamo già versato 1 cm^3 di una sospensione del germe da saggiare; si agitava, si lasciava solidificare e si poneva in termostato a 37° C. per un'ora e col coperchio sollevato. Si aggiungeva quindi un'ansata di sospensione fagica (ansa di 4 mm. e 100.000 fagi per cm^3) e si rimetteva in termostato.

La lettura veniva fatta 24, 36, 48 o più ore dopo a seconda della velocità di sviluppo del germe in esame.

I due metodi più o meno si equivalgono, sebbene quello dell'agar patina debba considerarsi leggermente più sensibile. Tale maggiore sensibilità è probabilmente dovuta al fatto che la sospensione fagica, essendo deposta direttamente sopra lo strato batterico, viene a più intimo contatto con i germi che non la goccia deposta sopra un agar–germi nel quale i batteri sono sparsi per tutto lo spessore dell'agar. Limitiamo, quindi, la pubblicazione dei dati ai risultati ottenuti con il metodo dell'agar–patina.

Ogni germe veniva cimentato con i cinque fagi sopradescritti: la prova veniva eseguita sopra una sola piastra nella quale si allestivano sei piccole patine batteriche con la tecnica già descritta a proposito della individuazione sierologica dei fagi: una patina serviva di controllo, le altre cinque per cimentare i cinque fagi.

Riportiamo qui appresso i risultati ottenuti, limitando a segnalare soltanto i ceppi con cui si è avuta lisi totale usando 1.000.000 di fagi per cm^3. I ceppi saggiati sono stati oltre cento.

Phagus phlei: B 10 – Crottin – Fleol – L 619 – Moeller – *Myc. phlei* 54 – Timoteo – Vip. 27 – Vip. 28.

Phagus lacticola: Brinckerhoff II – D 6 – Danes – Darier – Friburgensis – GP 60 – GP 61 – Grassbacillus – Karlinski 2071 – Korn – Mayeranne – Milch – *Myc. phlei* 525 – *Myc. smegmatis* 523 – *Myc. smegmatis* 53 – *Myc. smegmatis* G. e W. – *Myc. stercoris* 3820 – *Myc. stercoris* 3821 – Pseudoperlsucht – Rabinowitsch R – Rabinowitsch S – Randoni – Smegma 19 – Smegma 22.

Phagus Rabinowitsch: Brinckerhoff II – Danes – Darier – Friburgensis – GP 61 – H 10 – Istisan VII – Karlinski – Karlinski 2071 – Korn – Marpmann – Mayeranne – Milch – *Myc. phlei* 525 – *Myc. stercoris* 3821 – Pseudoperlsucht – Rabinowitsch R – Rabinowitsch S – Randoni – Smegma 19 – Smegma 22.

Phagus smegmatis: Friburgensis – GP 60 – Grassbacillus – H 10 – Karlinski – Marpmann – Mayeranne – Milch – *Myc. phlei* 525 – *Myc. smegmatis* G. e W. – *Myc. smegmatis* 523 – *Myc. smegmatis* 53 – *Myc. stercoris* 3820 – *Myc. stercoris* 3821 – Rabinowitsch R – Randoni – Smegma 19 – Smegma 22.

Phagus Pellegrino: Pellegrino – Beck – Beck RR.

Nel lavoro definitivo pubblicheremo le tabelle complete dei risultati, nonchè l'intera documentazione fotografica. In altre Note parleremo sulla ricerca dei fagi al microscopio elettronico, sui fagi indotti e sulla possibilità di utilizzare i fagi nella diagnostica specifica dei micobatteri.

BIBLIOGRAFIA

GARDNER e WEISER, *Discovery of a bacteriophage for « Mycobacterium smegmatis »*, « Journ. Bact. », *54*, 2, 272 (1947).

JOHNSON T. B. e RENFREW A. G., *Some chemical changes accompanying the growth of tubercle bacilli on Long's synthetic medium.* « Amer. Rev. Tub. », *17*, 508 (1928).

LAPORTE R., *Un mode particulier d'autolyse microbienne: la désintégration progressive des bacilles du genre « Mycobacterium »*. « Ann. Inst. Pasteur », *69*, 262 (1943).

ORTALI V., *Isolamento di tre batteriofagi anti-micobatterici.* « Rend. Acc. Naz. Lincei », Seduta del 9 giugno 1948.

PENSO G., *Soglia di patina e policolonie.* « Rend. Ist. Sup. Sanità », *11*, 1183 (1948).

PENSO G., CATTANEO C., MORELLINI M. e ORTALI V., *Studi e ricerche sui Micobatteri.* Nota I: *Premesse generali ed elenco dei ceppi di collezione e di nuovo isolamento.* «Rend. Ist. Sup. Sanità » (in corso di stampa).

STEENKEN W., *Lysis of tubercle bacilli in vitro.* « Proc. Soc. Exp. Biol. Med. », *33*, 253 (1935).

Biologia (Biochimica). — *Sull'ossidazione dell'acido fenilpiruvico e p-ossifenilpiruvico con acido ascorbico*(*). Nota di DORIANO CAVALLINI, presentata(**) dal Corrisp. G. VERNONI.

In una serie di recenti lavori, Sealock e collaboratori [1-3] hanno mostrato che cavie in carenza di vitamina C non sono in grado di metabolizzare tirosina e fenilalanina come avviene di norma, e che alla somministrazione di questi composti fa costantemente seguito una eliminazione per le urine di acido p-ossifenilpiruvico e tracce di acido omogentisinico. Nello stesso tempo Levine e collaboratori [4-6] riscontravano nei prematuri allattati artificialmente costante eliminazione urinaria di acido p-ossifenilpiruvico causata da eccesso di tirosina nella dieta, e che tale fenomeno scompariva prontamente con la somministrazione di acido ascorbico. Darby e collaboratori [7] in seguito affermavano che anche *in vitro* è dimostrabile una alterazione del metabolismo di questi aminoacidi susseguente a carenza di vitamina C, ma che restando inalterate nei tessuti le proprietà normalmente esplicate verso i radicali fenolici e fenilici, ne deducevano che l'alterazione metabolica

(*) Ricerche eseguite nel Centro di studio per la Fisiopatologia del C.N.R. Presso l'Istituto di Patologia Generale dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta dell'11 dicembre 1948.

(1) R. R. SEALOCK, H. E. SILBERSTEIN, « J. Biol. Chem. », *135*, 251 (1940).

(2) R. R., SEALOCK, J. D. PERKINSON, D. H. BASINSKI ,« J. Biol. Chem. », *140*, 153 (1941).

(3) R. R. SEALOCK, « J. Biol. Chem. », *146*, 503 (1942).

(4) S. Z. LEVINE, E. MARPLES, H. H. GORDON, « Science », *90*, 620 (1939).

(5) S. Z. LEVINE, E. MARPLES, H. H. GORDON, « J. Clin. Invest. », *20*, 199, 209 (1941).

(6) S. Z. LEVINE, M. DANN, E. MARPLES, « J. Clin. Invest. », *22*, 551 (1943).

(7) W. J. DARBY, R. H. DE MEIO, M. C. BERNHEIM, E. BERNHEIM, « J. Biol. Chem. », *158*, 67 (1945).

dovesse essere a carico della catena laterale. Questi lavori sono poi stati confermati da altri autori [8], ed hanno portato alla ipotesi che l'acido ascorbico faccia parte del complesso enzimatico deputato alla degradazione degli aminoacidi a radicale aromatico.

Dalla lettura di quei lavori si trae tuttavia l'impressione che l'inceppo metabolico dei due aminoacidi, in carenza di acido ascorbico, sia il riflesso di una alterazione metabolica di un loro termine di degradazione sottostante. L'inalterata capacità di ossidare la fenilalanina nel radicale fenilico (questa e l'acido fenilpiruvico vengono eliminati come acido p–ossifenilpiruvico), la mancata eliminazione degli stessi aminoacidi nelle urine, l'elevata percentuale di eliminazione come acido p–ossifenilpiruvico non solo dei due aminoacidi ma anche dell'acido fenilpiruvico e dell'acido p–ossifenilpiruvico stesso, fanno supporre che almeno uno dei punti di arresto metabolico sia al livello di acido p–ossifenilpiruvico, e che, prestando fede al lavoro di Darby e collaboratori sia la presenza in questo della catena piruvica la responsabile dell'inceppo metabolico.

Avendo l'autore in precedenza riscontrato come l'acido ascorbico sia capace di ossidare *in vitro* alcuni chetoacidi, tra cui l'acido piruvico [9] e l'acido α–chetobutirrico [10], e come tale capacità possa essere dimostrata anche *in vivo* [11, 12], ne sorgeva l'ipotesi che i fenomeni mostrati da Sealock e da Levine potessero ricondursi ad una mancata ossidazione da parte dei tessuti dell'acido p–ossifenilpiruvico come α–chetoacido e che le usuali modalità di ossidazione di tale composto con acido ascorbico potessero essere similari a quelle mostrate allora per l'acido piruvico.

Allo scopo di chiarire tale problema si è provato che usando la stessa tecnica usata precedentemente, sia l'acido p–ossifenilpiruvico che l'acido fenilpiruvico sono in grado di venire ossidati (ossidazione secondaria) nel corso della ossidazione dell'acido ascorbico (ossidazione primaria), ed i risultati sono stati confrontati con quelli ottenuti facendo ossidare l'acido piruvico, benzoico e p–ossibenzoico.

Dati sperimentali. – Le seguenti sostanze sono state preparate in laboratorio: Acido fenilpiruvico [13], acido p–ossifenilpiruvico [14], acido p–ossibenzoico [15], Na piruvato [16]; l'acido ascorbico era un preparato Merck ricristallizzato dal metanolo, di cui veniva preparato anche il sale sodico. I punti di fusione delle sostanze preparate corrispondevano a quelli della let-

(8) H. A. Painter, S. S. Zilva, « Biochem. J. », *41*, 511 (1947).
(9) D. Cavallini, « Arch. Fisiol. », *45*, 189 (1946).
(10) D. Cavallini, Dati sperimentali non pubblicati.
(11) D. Cavallini, E. Bonetti, « Arch. Sci. Biol. », *31*, 225 (1946).
(12) D. Cavallini, G. Giunchi, « Arch. Sci. Biol. », *31*, 230 (1946).
(13) H. A. Blatt, *Organic Syntheses*, New York, vol. II, p. 519 (1943).
(14) H. S. Raper, A. Wormall, « Biochem. J. », *19*, 84 (1925).
(15) H. A. Blatt, *Organic Syntheses*, New York, vol. II, p. 341 (1943).
(16) W. v. B. Robertson, « Science », *96*, 93 (1942).

teratura. I restanti prodotti erano acquistati dal commercio. È stata usata la tecnica manometrica del Warbug e le condizioni di esperimento sono riportate in testa ai diagrammi.

DISCUSSIONE. – I lavori in precedenza eseguiti usando acido piruvico come substrato avevano mostrato come l'ossidazione di questo da parte dell'acido ascorbico avvenisse durante l'ossidazione della vitamina con un

Puffer acetico pH 4,3, M/10, 1 cc. $CuCl_2$ 0,0002 mM (v. testo). Acido ascorbico 0,01 mM. Gas aria. Temp. 38°. Vol. tot. 3 cc. L'acido ascorbico era contenuto nella ampolla laterale ed era versato nel vaso centrale a $t = 0$. I substrati, 0,1 mM, eccetto l'ultimo (v. testo) erano portati a pH 4,3 con soluzione di NaOH o di HCl.

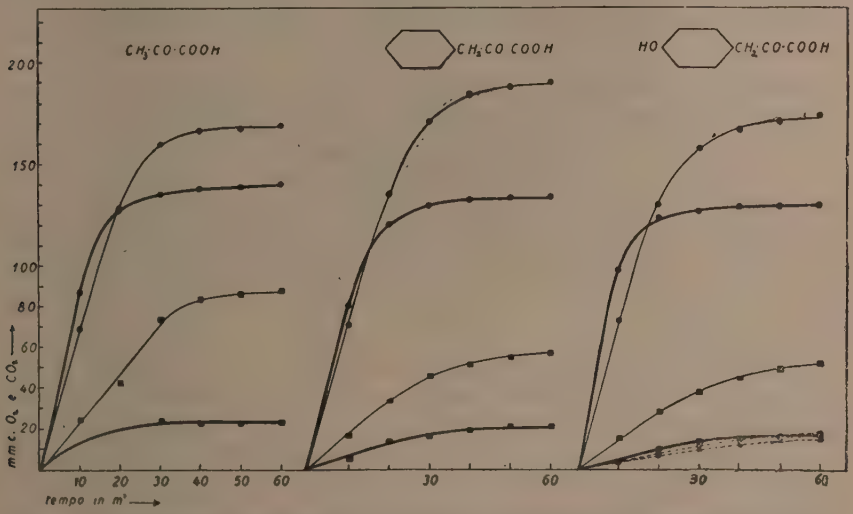


Fig. 1. – Ossidazione indotta sull'acido piruvico, fenilpiruvico e p-ossifenilpiruvico dall'acido ascorbico. Linee spesse: ossidazione del solo acido ascorbico. Linee sottili: ossidazione dell'acido ascorbico + substrato. • = consumo di O_2. ■ = eliminazione di CO_2. Nelle stesse condizioni ed escludendo l'acido ascorbico, solo l'acido p-ossifenilpiruvico ha mostrato autossidazione (linee tratteggiate).

catalizzatore, particolarmente efficace il rame, tanto da autorizzare il termine di « ossidazione indotta » per questo fenomeno. I diagrammi riportati nella fig. 1 sono abbastanza evidenti nel mostrare che lo stesso fenomeno si ripete sostituendo all'acido piruvico il fenilpiruvico ed il p-ossifenilpiruvico. Tuttavia alcune osservazioni ci sono da fare:

Tutte le sostanze che subiscono la « ossidazione indotta » dall'acido ascorbico hanno la proprietà di esercitare con maggiore o minore intensità un'azione ritardante sulla velocità di ossidazione della vitamina, verosimilmente dovuta ad un legame con lo ione rameico [17], per cui l'ossidazione decorrendo più lentamente necessita di maggior tempo per arrivare a com-

(17) D. CAVALLINI, « Arch. Sci. Biol. », *32*, 107 (1948).

pletezza. Questo è particolarmente il caso dell'acido p–ossifenilpiruvico e per limitare l'osservazione ad un tempo breve si è usata una concentrazione di $CuCl_2$ maggiore (0,0005 mM anzichè 0,0002 mM) ed una concentrazione inferiore di substrato (0,05 mM anzichè 0,1 mM). Ora tralasciando di considerare una eventuale diminuzione della attività ossidativa della vitamina sul substrato per l'aumentata concentrazione del $CuCl_2$ (loc. cit. [9]), va tenuto in mente, per un utile confronto fra i tre substrati, che l'ultimo è in concentrazione metà degli altri.

Detto quanto sopra si può osservare che, a differenza di quanto avviene con l'acido piruvico, l'estraconsumo di ossigeno dovuto alla presenza degli altri due substrati è molto più elevato per questi ultimi e che, il rapporto CO_2/O_2, molto vicino a 2 per l'acido piruvico, tale cioè da dimostrare una decarbossilazione ossidativa ad acido acetico, scende al disotto di 1 negli altri due casi.

Certamente anche per l'acido fenilpiruvico e p–ossifenilpiruvico avviene una decarbossilazione; ce ne testimonia l'emissione di CO_2, ma avendosi avuto un consumo di O_2 superiore si può pensare che l'ossidazione di queste sostanze sia più estesa che per il solo acido piruvico. Togliendo infatti al valore di O_2 ottenuto sperimentalmente la quantità dovuta ad una eventuale decarbossilazione ossidativa, calcolata in base al CO_2 emesso, si può vedere come per tale reazione avrebbe necessitato solamente un terzo dell'O_2 consumato, i rimanenti due terzi essendo andati a compiere una ossidazione di differente tipo.

La presenza negli ultimi due chetoacidi di un nucleo aromatico fa supporre che proprio su tale nucleo venga ad esercitarsi l'ulteriore azione ossidante dell'acido ascorbico, cioè a dire, si può supporre che l'effetto riscontrato possa essere la somma di due fenomeni concomitanti, uno la decarbossilazione ossidativa della catena piruvica, il secondo la ossidrilazione dei radicali aromatici. Il fatto che il fenomeno si riscontra ugualmente bene nell'acido fenilpiruvico come nel p–ossifenilpiruvico fa escludere una ossidrilazione in posizione *para* del primo composto. Un tentativo di saggiare la comparsa di una sostanza fenolica che reagisse al reattivo di Millon, alla fine della ossidazione dell'acido fenilpiruvico con acido ascorbico, ha dato tuttavia esito negativo.

Per cercare di delucidare questo punto un altro tentativo è stato fatto, si è sostituito al chetoacido aromatico una sostanza che ne rappresentasse il solo radicale fenilico e fenolico, allo scopo di osservare separatamente l'azione dell'acido ascorbico sulle due parti componenti i chetoacidi in questione. Questo si è raggiunto sostituendoli con acido benzoico e p–ossibenzoico (v. diagramma della fig. 2).

Come era da prevedere, in questo caso non si è avuta emissione di CO_2 al di sopra di quella eliminata normalmente dall'acido ascorbico in tali condizioni, e si è avuto invece un lieve aumento del consumo di O_2 abbastanza evidente per l'acido p-ossibenzoico, che, se pur significativo, non riesce tuttavia a spiegare il consumo di O_2 di gran lunga superiore del chetoacido omologo.

I risultati ottenuti scindendo l'azione ossidativa esercitata dall'acido ascorbico sul nucleo aromatico da quella esercitata sulla catena laterale non sembrano dare una documentazione soddisfacente di quanto avviene con l'intera molecola, in quanto sommando al valore di O_2 consumato nella ossidazione del radicale aromatico quello teoricamente consumato nella decarbossilazione ossidativa del chetoacido si ha un valore inferiore a quello ottenuto nella ossidazione di quest'ultimo *in toto*. Non resta quindi da pensare che l'effetto riscontrato sia peculiare della completa molecola, influendo una parte sull'altra, una parte rendendo l'altra più sensibile all'azione ossidante della vitamina.

Condizioni sperimentali come a fig. 1. Substrati 0,1 mM.

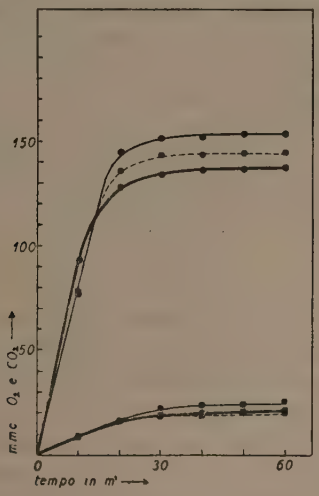


Fig. 2. – Ossidazione indotta sull'acido benzoico e p–ossibenzoico dall'acido ascorbico. Linee spesse: ossidazione del solo acido ascorbico. Linee sottili: ossidazione dell'acido ascorbico + substrato (tratteggiate: acido benzoico; intere: acido p–ossibenzoico). • = consumo di O_2. ■ = eliminazione di CO_2.

L'ossidazione dell'acido fenilpiruvico avviene ugualmente bene a pH neutro, mostrando alcune varianti che ricordano quelle riscontrate per l'acido piruvico in tale ambiente [18]; per brevità se ne esclude la documentazione in questo lavoro.

In conclusione si può affermare che è evidente una azione ossidativa dell'acido ascorbico sull'acido fenilpiruvico e p–ossifenilpiruvico *in vitro*, che questa non si limita ad una decarbossilazione come nel caso dell'acido piruvico, ma che oltre a questa si ha una ossidazione senza relativa emissione di CO_2 probabilmente diretta verso i due nuclei aromatici di tali sostanze.

(18) D. CAVALLINI, « Boll. Soc. Ital. Biol. Sper. », *20*, 425 (1945).

Citologia. — *Il comportamento del nucleo durante le prime fasi dello sviluppo embrionale in «Rana esculenta»* (*). Nota di GIUSEPPE COLOMBO, presentata (**) dal Corrisp. U. D'ANCONA.

Il comportamento del nucleo, specialmente in rapporto con l'accrescimento della sostanza nucleare durante le prime fasi dello sviluppo embrionale, è stato studiato con metodi citometrici su Echinodermi, Molluschi, Nematodi e Mammiferi da numerosi AA. (Cfr. Morgan (1), Faure-Fremiet (2)). Tali ricerche dovrebbero essere in parte rivedute in relazione alla conoscenza che si è raggiunta sulla struttura e sulle funzioni del nucleo e dei cromosomi.

I cromosomi ed i nuclei a riposo d'altra parte sono stati ampiamente studiati nei loro comportamenti su specie e tessuti diversi di cui non sempre son ben conosciute le funzioni e le proprietà. (Cfr. Geitler (3), Darlington (4), White (5)).

Più recentemente Stefanelli (6) si è occupato della sintesi dell'acido timonucleinico durante la segmentazione di un Nematode (*Rabditis pellio*), trovando oltre che una riduzione del volume dei singoli nuclei ed un lieve aumento del volume nucleare totale, progressivo aumento della Feulgen-positività dei nuclei col procedere della segmentazione.

Sono stati relativamente trascurati invece i fenomeni citologici e specialmente cariologici dello sviluppo embrionale degli Anfibi nonostante che esso sia stato oggetto di numerose indagini descrittive e sperimentali. Le modificazioni nucleari durante lo sviluppo embrionale degli Anfibi credo sieno state studiate solo da Barigozzi (7) mentre altre osservazioni sono sparse qua e là in lavori di diversi AA. Barigozzi ha trovato che fino alla gastrula i nuclei a riposo sono a cromonemi sottili e privi di nucleoli; questi ultimi comparirebbero solo alla gastrulazione, mentre Brachet li avrebbe trovati già nella morula. Barigozzi non ha notato

(*) Ricerca eseguita nell'Istituto di Zoologia e Anatomia Comparate dell'Università di Padova.

(**) Nella seduta dell' 8 gennaio 1949.

(1) T. H. MORGAN, *Experimental embriology* [*] Columbia Press, New York 1927.

(2) E. FAURE-FREMIET, *La cinétique du aeveloppement* [*], Presses Universitaires de France, Paris 1925.

(3) L. GEITLER, *Chromosomenbau* [*] Protoplasma-Monographien, Berlin 1938.

(4) C. D. DARLINGTON, *Recent advances in cytology* [*] Churchill Ltd., London 1937.

(5) M. J. D. WHITE, *Animal cytology and evolution* [*] Cambridge Univ. Press., Cambridge 1945.

(6) A. STEFANELLI, *Il rapporto nucleoplasmatico e la sintesi dell'acido timonucleinico nello sviluppo. Ricerche sui Nematodi «Rabditis pellio»*. «Archivio Zoologico Italiano», vol. XXVIII, p. 387 (1940).

(7) C. BARIGOZZI, *I fenomeni cromosomici nello sviluppo di «Amblistoma tigrinum G.», con riferimento a quello degli altri anfibi «Triton cristatus L.» e «Rana esculenta L.»* «Istituto Lombardo Scien. e Lett.», vol. LXXVII, p. 272 (1944); *Struttura nucleare e differenziamento somatico*. «Arch. It. Anat. Embr.», vol. LII, p. 83 (1947).

[*] Vengono citate solo le opere riassuntive rimandando ad esse per l'ampia bibliografia che verrà discussa nel lavoro per esteso.

differenze di struttura tra i nuclei dei tre foglietti, differenze strutturali si osserverebbero solo all'inizio della differenziazione istologica.

Il diverso comportamento dei nuclei delle uova trattate a vari stadi di sviluppo con trattamenti sperimentali diversi e specialmente la differente reazione di fronte agli agenti carioclasici (Colombo [8], Sentein [9]), mostrano che vi sono delle differenze nelle caratteristiche dei nuclei nei diversi stadi che si dovrebbero poter mettere in evidenza con un esame sistematico dei nuclei a riposo e dei cromosomi nei vari stadi e nelle diverse regioni.

Ho iniziato perciò una serie di osservazioni sistematiche dei nuclei di varie regioni di embrioni di *Rana esculenta*, dalla blastula iniziale fino alla neurula esaminando comuni sezioni seriate (fissazione in liquido di Karpetchenko e colorazione col metodo di Feulgen), e più particolarmente frammenti di determinate regioni dell'embrione preparati col metodo di Geitler, colorati col carminio acetico e col metodo di Feulgen.

I risultati non hanno deluso l'aspettativa; mentre la completa elaborazione del materiale è in corso mi sembra interessante far conoscere alcuni dati preliminari.

Un primo indice del comportamento nucleare ci è dato dalla variazione del volume dei nuclei. Poichè nei primi stadi i nuclei non sono ben visibili nei preparati per sezione, sono state misurate le superfici delle sezioni ottiche nucleari nei preparati per schiacciamento, per gli stadi 8 e 9 (di Pollister e Moore) nella preparazione con l'acetocarminio, per gli stadi 10, 12 e 13 nei preparati colorati con la Feulgen. Le superfici misurate rappresentano una base del cilindro appiattito in cui sono stati deformati i nuclei con lo schiacciamento, esse quindi sono soggette alla variabilità dovuta alla diversa pressione di schiacciamento che si può stimare si aggiri sul 30 per cento. A questo errore di misura si devono aggiungere gli errori di misurazione e di calcolo; tuttavia, poichè questi dati devono solo dare un'idea dell'andamento delle variazioni ed esse sono cospicue, si possono considerare significativi.

Sono stati misurati in medie 150 nuclei per ogni regione e per ogni stadio, eccetto che nei primi stadi e per l'ectoderma in cui ci si è dovuti accontentare di un numero minore poichè le cellule sono meno numerose.

TABELLA DELLE SUPERFICIE DI PROIEZIONE DEI NUCLEI

	polo animale			polo vegetativo
stadio 8	μ 2302			μ 975
» 9	μ 939 ± 4,0			μ 535 ± 3,2
	ectoderma		cordomesoblasto	entoderma
» 10	μ 287 ± — 3,3		μ 214 ± 4,45	μ 659 ± 4,69
» 12	μ 244 ± 3,88		μ 146 ± 2,56	μ 474 ± 2,5
» 13	μ 184 ± 4,32		μ 184 ± 2,61	μ 339 ± 1,76

(8) G. COLOMBO, *Considerazioni sui rapporti tra suscettibilità differenziale e processi organogenetici nello sviluppo embrionale degli Anfibi*, « Boll. Soc. Ist. Biol. Sper. », vol. XXII, p. 984 (1946).

(9) P. SENTEIN, *Action de substances mitoinhibitrices sur la segmentation et la gastrulation de l'oeuf de Triton*. « C. R. Soc. de Biologie », vol. CXLII p. 208 (1948).

I dati riportati nella tabella, per la loro approssimazione, non possono essere adoperati per una elaborazione delicata, servono solo ad indicare una variazione nucleare che decorre nello stesso senso delle modificazioni strutturali.

Allo stadio di blastula iniziale (st. 8) nelle sezioni i nuclei non sono ben visibili perchè mascherati da granuli di pigmento: essi appaiono come vescicole omogenee. Nei preparati per schiacciamento quasi tutti i nuclei sono Feulgen–negativi, salvo quelli della zona equatoriale che sono debolmente Feulgen–positivi; colorati col carmininio appaiono a cromatina diffusa (fot. 1 e 7). Le mitosi sono più frequenti nella regione equatoriale, i cromosomi metafisici sono sottili e lunghi.

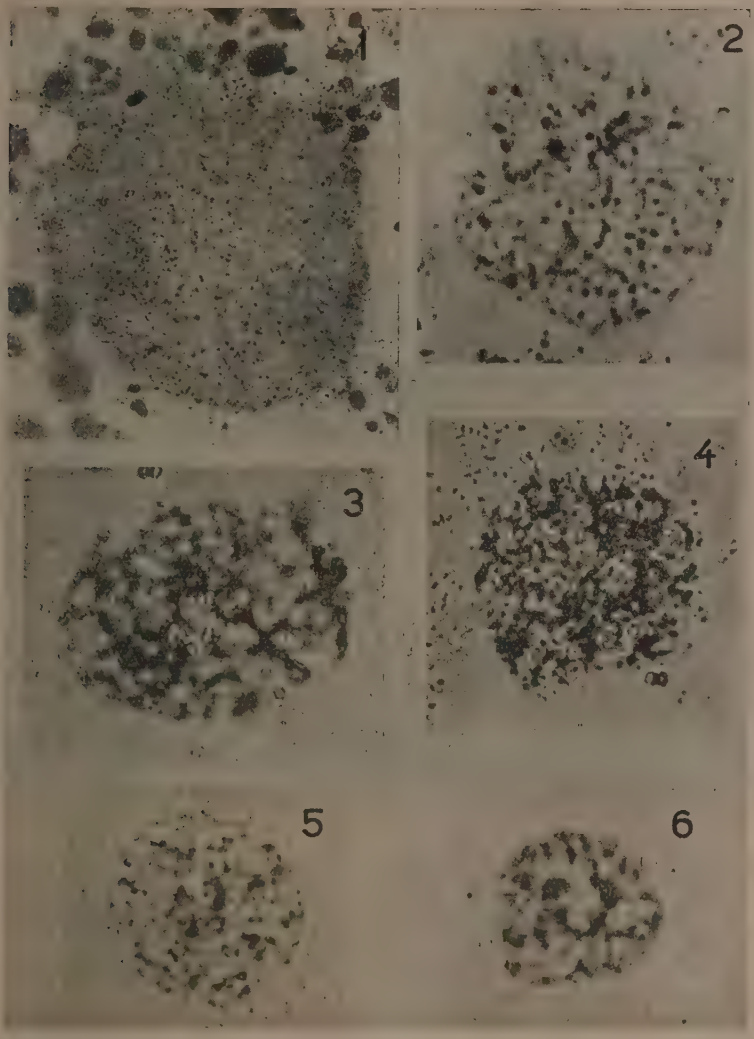
Allo stadio di blastula avanzata (st. 9) nei preparativi per sezione i nuclei sono meno mascherati da pigmento ed accennano ad una struttura a zolle; nei preparati per schiacciamento i nuclei del polo vegetativo sono debolmente Feulgen–positivi, meno debolmente quelli del polo animale, decisamente Feulgen–positivi, quelli della regione equatoriale. (fot. 2 e 8). Nello stesso ordine della Feulgen–positività si ha un passaggio nelle tre regioni dalla struttura a cromatina diffusa a quella a cromonemi sottili [10]. Le mitosi sono più frequenti nella regione equatoriale, i cromosomi metafisici sono sottili e lunghi.

Allo stadio di gastrula iniziale (st. 10) nei preparati per sezione quasi tutti i nuclei appaiono con struttura a zolle con lievi differenze di forma e di volume nelle diverse regioni. Nei preparati per schiacciamento tutti i nuclei risultano Feulgen–positivi con struttura a cromonemi netta, quelli ectodermici a cromonemi spessi (fot. 3), quelli entodermici a cromonemi sottili (fot. 9). Le mitosi sembrano più frequenti nelle regioni del labbro dorsale del blastoporo, i cromosomi metafisici sono più corti e più spessi di quelli osservati negli stadi precedenti, ad eccezione della regione entodermica in cui i cromosomi sono lunghi e sottili.

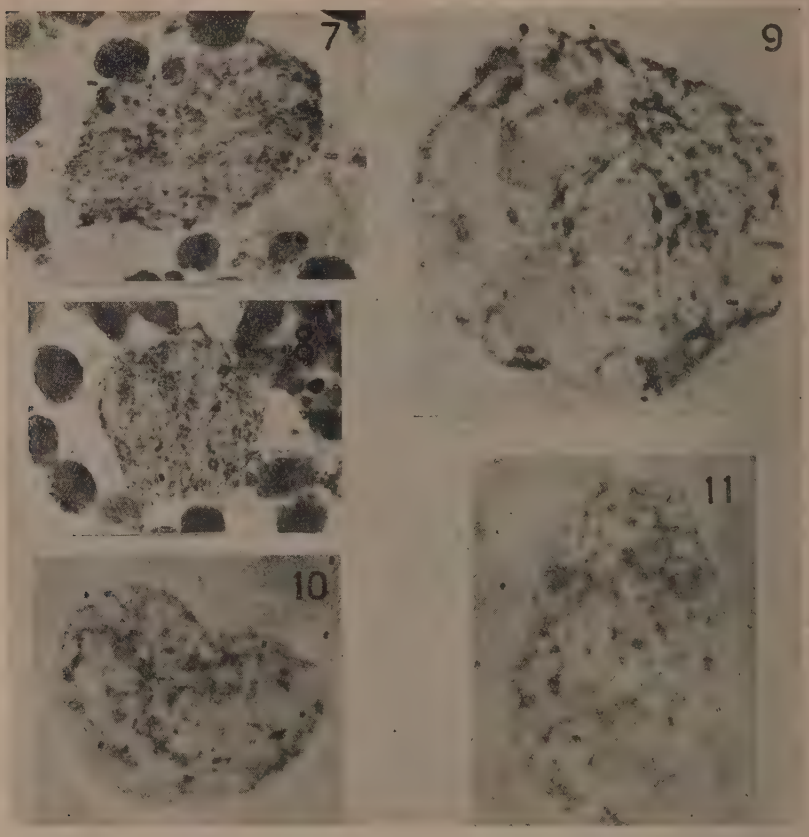
Allo stadio di tappo vitellino (st. 12) nei preparati per sezione tutti i nuclei risultano con struttura a zolle, quelli entodermici sono di volume maggiore e meno intensamente colorati, più intensamente Feulgen–positivi risultano i nuclei cordomesoblastici che sono anche i più piccoli. Nei preparati per schiacciamento i nuclei entodermici appaiono grandi a cromonemi sottili (fot. 10), quelli ectodermici di grandezza media a cromonemi spessi e distanziati (fot. 4), i nuclei della regione del blastoporo sono i più piccoli, parecchi di forma ovale, ed a cromonemi spessi. Nei preparati colorati con il carminio si riescono a riconoscere nei nuclei ectodermici e cordomesoblastici due nucleoli. I cromosomi metafisici nell'ectoderma e nel cordomesoblasto sono corti e grossi, quelli entodermici sono lunghi e sottili.

Allo stadio di piastra neurale iniziale (st. 13) nei preparati per sezione si distinguono bene i nuclei dei diversi foglietti, essenzialmente per la loro forma e volume, chè son tutti a zolle cromatiche. Nei preparati per schiacciamento i nuclei entodermici sono più grossi ed a cromonemi sottili (fot. 11), quelli dell'ectoderma esterno di grandezza media a cromonemi spessi ma poco colorati

(10) Il termine *cromonemi* viene usato in luogo di *filamenti cromatici* senza voler indicare con questo una diretta corrispondenza coi cromatidi ed i cromosomi.



1) Nucleo dell'emisfero animale, a cromatina diffusa, di blastula iniziale st. 8. Preparato per schiacciamento, colorazione al carminio. Ingr. 760 ×
2) Nucleo dell'emisfero animale di blastula avanzata, st. 9. Preparato per schiacciamento, colorazione col metodo di Feulgen. Ingr. 1720 ×
3) Nucleo ectoblastico di gastrula iniziale, st. 10. Preparato per schiacciamento, colorazione col metodo di Feulgen. Ingr. 1720 ×
4) Nucleo ectoblastico di gastrula avanzata, st. 12. Preparato per schiacciamento, colorazione col metodo di Feulgen. Ingr. 1720 ×
5) Nucleo di ectoderma esterno di neurula iniziale, st. 13. Preparato per schiacciamento, colorazione col metodo di Feulgen. Ingr. 1720 ×
6) Nucleo cordomesoblastico di neurula iniziale, st. 13. Preparato per schiacciamento, colorazione col metodo di Feulgen. Ingr. 1720 ×



7) Nucleo dell'emisfero vegetativo di blastula iniziale, st. 8. Preparato per schiacciamento, colorazione col carminio. Ingr. 760 ×

8) Nucleo dell'emisfero vegetativo di blastula avanzata, st. 9. Preparato per schiacciamento, colorazione col carminio. Ingr. 760 ×

9) Nucleo entoblastico di gastrula iniziale, st. 10. Preparato per schiacciamento, colorazione col metodo di Feulgen. Ingr. 1720 ×

10) Nucleo entoblastico di gastrula avanzata, st. 12. Preparato per schiacciamento, colorazione col metodo di Feulgen. Ingr. 1720 ×

11) Nucleo entodermico di neurula iniziale, st. 13. Preparato per schiacciamento, colorazione col metodo di Feulgen. Ingr. 1720 ×

colla fucsina di Schiff (fot. 5), quelli ectomesodermici più piccoli a cromonemi spessi ed intensamente colorati (fot. 6). Le mitosi sembrano egualmente frequenti nelle diverse regioni, i cromosomi metafisici sono corti e spessi.

Negli stadi successivi in cui si inizia la differenziazione organogenetica ed istogenetica si ha un successivo differenziarsi della struttura nucleare; tali modificazioni saranno oggetto di successive indagini.

Le modificazioni nucleari che risultano dalle presenti osservazioni si possono così riassumere:

Colla segmentazione fino alla gastrula iniziale si ha una progressiva nucleinazione che si attua in successive generazioni nucleari, con un passaggio da una struttura a cromatina diffusa ad una struttura cromonemica ben netta nei nuclei a riposo e con un probabile progressivo accorciamento ed ispessimento dei cromosomi. Differenze regionali nello svolgersi di tali processi si possono seguire dalla blastula iniziale e forse anche prima fino all'inizio della differenziazione degli abbozzi.

Con alcune riserve questo comportamento può essere interpretato come risultato dei seguenti fattori: *a)* progressiva formazione di acidi nucleinici; *b)* condensazione e trasformazione del substrato proteico dei cromosomi e dei cromonemi: *c)* disimbibizione del nucleo: *d)* eventualmente altre modificazioni strutturali dei cromosomi e dei nuclei a riposo.

Le modificazioni nucleari osservate durante la segmentazione rappresenterebbero, a mio parere, la fase terminale di quella serie di processi che si iniziano nell'ovocita in secondo periodo di riposo colla scomparsa della visibilità dei cromosomi e colla deutoplasmogenesi e che procedono attraverso la fecondazione e un primo tempo della segmentazione fino alla completa visualizzazione dei nuclei e dei cromosomi; si verificherebbe così una specie di processo inverso a quello che le strutture nucleari presentano durante la fase iniziale dell'ovogenesi.

Colla gastrulazione le modificazioni nucleari prenderebbero un'altra direzione ingranandosi coi processi di differenziazione degli abbozzi.

La distribuzione spaziale delle descritte modificazioni nucleari corrisponde approssimativamente a quella dei composti –SH e degli acidi nucleici nell'uovo e nell'embrione degli anfibi nei diversi stadi secondo Brachet [11], e rappresenta forse un aspetto iniziale del differenziamento territoriale dell'embrione.

Patologia. — *Sulla posizione sistematica e sulla importanza epidemiologica di un particolare germe, il «Paracoli são paulo»*. Nota di ETTORE BIOCCA, presentata [*] dal Corrisp. V. PUNTONI.

L'importanza dei germi con caratteri sia di colibacilli che di salmonelle va sempre aumentando, non solo dal punto di vista sistematico ma sopratutto igienico ed epidemiologico.

Sebbene in Italia quasi tutti i microbiologici siano oggi d'accordo nel dare al complesso dei criteri morfologici, culturali e biochimici maggiore importanza sistematica che al semplice criterio sierologico, seguendo in questo la posizione da tempo presa da Giovanardi [1], tuttavia esistono dei casi in cui è estremamente

(11) J. BRACHET, *The metabolism of nucleic acids during embryonic development.* «Cold Spring Harbor Symposia of Quant. Biol.», vol. XII, p. 18 (1947).

(*) Nella seduta dell' 8 gennaio 1949.

(1) A. GIOVANARDI, *Considerazioni sulla classificazione delle salmonelle e dei batteri intestinali.* «Boll. Ist. Sier. Mil.», *23*, 232 (1944).

difficile decidere la diagnosi batteriologica. Questa diagnosi è spesso di notevole interesse pratico perchè è tendenza comune di attribuire minore importanza epidemiologica a un germe che consideriamo appartenente al gruppo dei colibacilli, tipici o atipici, che non ad uno che classifichiamo tra le salmonelle.

Ci interessa perciò ricordare schematicamente una ricerca da noi fatta a São Paulo del Brasile, in coll. con Amaral, Bier e Esteves [2], che contribuisce a chiarire la conoscenza di quei germi, i quali, a nostro avviso, non possono essere inclusi nè tra le salmonelle, nè tra i colibacilli.

Nel corso di studi sistematici su salmonellosi infantili a São Paulo abbiamo isolato dalle feci di 9 bambini colpiti da disturbi gastro-enterici, a volte molto gravi (corrispondenti al 15 % dei casi da cui siano state isolate salmonelle) un germe con i caratteri morfologici, culturali e biochimici accettati per il genere Salmonella. Tutti i ceppi, isolati su terreni elettivi per salmonelle, hanno prodotto acido e gas dal glucosio, maltosio, mannite e sorbite, mentre non hanno attaccato saccarosio e salicina; non hanno prodotto indolo, ma idrogeno solforato; non hanno liquefatto la gelatina. Tutti gli stipiti però, contrariamente alle salmonelle, hanno acidificato lentamente il lattosio, alcuni con produzione di gas e coagulato con ritardo il latte.

Dal punto di vista antigenico, la scomposizione dell'antigeno somatico ha dimostrato la presenza di quattro frazioni conosciute, restando una piccola frazione, comune a tutti i germi, non identificata. L'antigeno flagellare, uguale per tutti gli stipiti non è stato da noi potuto classificare nonostante la ricca collezione di sieri diagnostici a nostra disposizione. Non essendo riusciti i tentativi di induzione di una seconda fase, siamo di opinione che si tratti di un germe monofasico con la seguente formula di costituzione: VI, XIII, XXV, x, Vi: x: –. Si tratta quindi di un germe sicuramente patogeno, che si allontana dal genere Salmonella solamente perchè attacca lentamente il lattosio e coagula tardivamente il latte.

Conosciamo salmonelle come la *S. eastborne* e la *S. anatum* che possono presentare varianti che producono indolo o fermentano il lattosio. L'esistenza però della salmonella corrispondente con caratteri tipici, indica chiaramente che si tratta di semplici varianti.

Nella ultima edizione del Bergey [3], viene riportato come appendice della Tribù Eschericheae, il genere *Paracolobactrum* Borman, Stuart e Wheeler, ancora confuso dal punto di vista sistematico, nel quale dovrebbero rientrare la maggior parte dei colibacilli atipici. Inoltre gli studi recenti sulla struttura antigena degli stessi colibacilli hanno messo in luce quanto siano ancora imprecise le nostre conoscenze [4].

Nel caso del germe da noi studiato, anche eliminando il criterio sierologico che starebbe a favore di una classificazione nel genere Salmonella, ma limitandoci

(2) J. Amaral, E. Biocca, O. Bier e M. Esteves, *Ocorência de um bacilo paracoli com antigenos de salmonela.* (VI, XIII, XXV, Vi) *em casos de diarreia infantil.* « Mem. Inst. Butantan », *19*, 221 (1946).

(3) Bergey's, *Manual of determinative bacteriology*. Williams and Wilkins, Baltimore 1948.

(4) D. Parris, *Recenti acquisizioni sulla struttura antigena dei colonbatteri.* « Ann. San. Pubblica », *9*, 828 (1948).

a considerare il complesso dei caratteri culturali e biochimici, ci sembra che debba esser avvicinato più a una salmonella con alcuni caratteri biochimici di colibacillo atipico, che non a un colibacillo con antigeni di salmonella.

Aver ritrovato questo stesso microrganismo così frequentemente in casi di infezioni intestinali e solo una volta associato con una salmonella, la *S. newport* ci porta ad escludere che si tratti di un germe di secondaria importanza o spia di altri germi come tra noi è stato studiato per i colibacilli chiamati tipo « onderstepoort » (5); nella stessa maniera l'assoluta costanza e uniformità dei caratteri di tutti i diversi stipiti ci costringe a considerarlo come un germe ben definito.

Dal punto di vista epidemiologico, le nostre osservazioni documentano chiaramente l'importanza, per lo meno a São Paulo del Brasile, di questo germe.

Già in precedenti ricerche sui metadissenterici (6) avevamo dimostrato che il B. ceylonense B (*Shigella ceylonensis*, secondo il Bergey) che acidifica rapidamente il lattosio, coagula rapidamente il latte e produce indolo, è anche capace di produrre gas nella fermentazione della sorbite e (per alcuni ceppi) anche del lattosio e della dulcite. Per questi motivi consideravamo il B. ceylonense B l'anello che insensibilmente unisce i colibacilli atipici ai dissenterici.

Ci sembra che il germe da noi studiato a São Paulo e chiamato, in attesa di una classificazione accettabile « *Paracoli são paulo* », rappresenti l'anello che dall'altro lato della catena insensibilmente unisca i colibacilli atipici alle salmonelle.

Biologia. — *Ricerche sul differenziamento specifico di alcuni neuroni dei Teleostei* (*). Nota di MARIA D'AMBROGI, presentata (**) dal Socio G. COTRONEI.

Recenti esperienze di Alberto Stefanelli (1) sul differenziamento delle cellule di Mauthner degli Anfibi Anuri hanno dimostrato come il differenziamento venga determinato assai precocemente e come questa determinazione si attui per gradi, essendo riuscito a distinguere una *determinazione istogenetica generale*, da una *determinazione istogenetica particolare* che si attua successivamente.

Da tutte le sue esperienze col metodo dell'isolamento (trapianti e espianti) è risultato che una volta subita la determinazione istogenetica particolare, con lo

(5) G. D'ALESSANDRO, A. RIZZUTO, *Attività biochimiche e struttura antigene di un gruppo di colibacilli tipo « onderstepoort ». Considerazioni sulla loro posizione e significato.* « Boll. Ist. Sier. Mil. », *26*, 241 (1937).

(6) E. BIOCCA, *Observations sièrologiques et biochimiques au sujet des bacilles métadysentériques: les propriétés gazogènes de quelques-uns.* « Boll. d. Sez. Ital. d. Soc. Internaz. d. Microbiol. », *11*, 158 (1939).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata « G. B. Grassi » dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta dell'8 gennaio.

(1) Per la bibliografia di ALBERTO STEFANELLI vedi i lavori: *La determinazione istologica ed il differenziamento della cellula nervosa (di Mauthner) indagati col metodo degli espianti.* « Ricerche di Morfologia », 1947, vol. XXII; *I fenomeni dell'orientamento delle fibre nervose durante l'accrescimento.* « Arch. Ital. Anat. e Embriol. », 1948.

sviluppo la cellula acquista l'aspetto morfologico particolare che la distingue dalle altre. Tuttavia è risultato da queste esperienze, come la cellula differenziata presenti sovente delle anomalie strutturali più o meno profonde. L'Autore ha potuto dimostrare come i fattori principali di queste anomalie, si debbano ricercare nella limitazione spaziale dei frammenti isolati, nella mancanza di quella normale struttura del substrato, che si manifesta anche ad opera di elementi circumvicini, nella impossibilità del neurone di accrescersi secondo la normale estensione.

Poichè è evidente che nel caso dell'isolamento sperimentale, il neurone non diventa specificamente funzionante, c'è da domandarsi se l'attività funzionale specifica sia anche un fattore del completamento del suo differenziamento.

Ad estensione di queste esperienze e con lo scopo di indagare le relazioni eventualmente esistenti tra struttura e funzione, ho eseguito per consiglio e sotto la guida del prof. Stefanelli, delle indagini sul differenziamento specifico particolare del neurone di Mauthner e di altri neuroni altamente specifici, quali i neuroni a neurite ricorrente del tetto ottico dei Teleostei [2].

Il problema delle relazioni tra struttura specifica e funzione è vecchio ed è stato indagato in vario modo e su svariati tipi di tessuti. Per quanto riguarda il tessuto nervoso, particolarmente interessanti sono le esperienze in cui si è cercato di inibire l'attività funzionale, senza recare traumi o alterazioni del substrato, che possono essere a loro volta dei fattori delle modificazioni. Classiche sono le ricerche di Herrick (1915) e Conklin, riprese poi da altri autori, quali il Charmicael (1926), il Detwiler (1926) ed il Leghissa (1941), in cui mediante l'azione di un anestetico, si facevano sviluppare gli embrioni (di Anfibi e Pesci) in assoluta immobilità, che faceva presumere in una inibizione funzionale del sistema nervoso e della muscolatura. I risultati di queste indagini furono sempre concordi: gli embrioni normali e quelli narcotizzati in modo sufficiente da renderli immobili, raggiungevano gli stessi stadi differenziativi nello stesso tempo. Ciò era in appoggio al concetto di un differenziamento indipendente da un'attività funzionale. Tuttavia il metodo non consente di considerare in modo sicuro che l'attività delle cellule nervose sia stata bloccata, essendo anche possibile un'azione blanda del narcotico sulle fibre muscolari. Comunque, questa narcosi non è tale da bloccare ogni attività vitale delle cellule, nè essa è in grado di « eliminare » gli stimoli esterni, nè quegli stimoli interni (organizzatori, correlazioni di varia natura) che portano ad un armonico sviluppo delle parti.

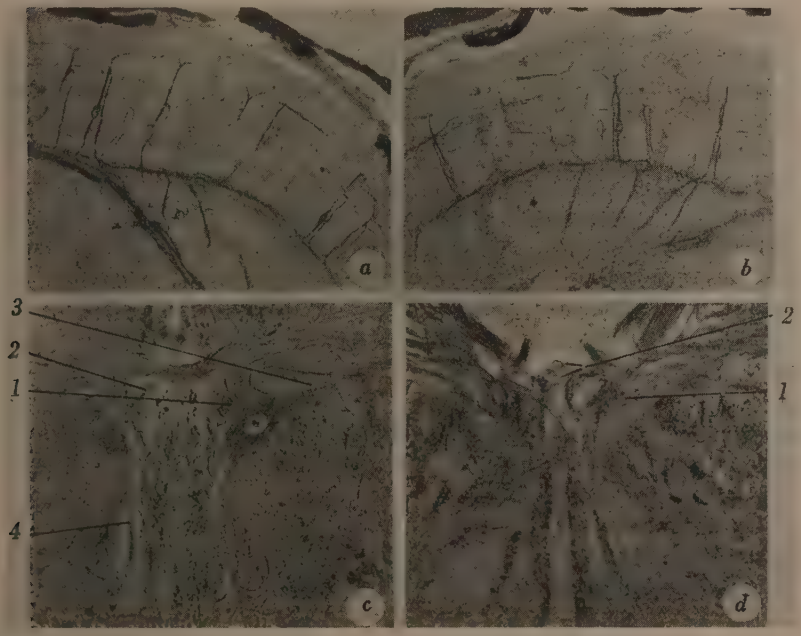
Queste brevi considerazioni ci fanno vedere come il metodo della narcosi dia dei risultati limitati e discutibili per le valutazioni che se ne devono dedurre, perchè non possiamo conoscere entro che limiti la cellula è stata inibita nella sua attività funzionale.

Ho voluto pertanto indagare il problema del differenziamento prima e dopo l'attività funzionale specifica, usufruendo di un'altra condizione che ci viene offerta dalla natura stessa, senza l'intervento di narcosi o di atti operativi che introducono condizioni abnormi, le quali complicano l'interpretazione dei risultati. Questa condizione ci è offerta dagli animali vivipari in cui alla fine dello sviluppo nel corpo

(2) Recentemente studiati nel loro sviluppo da Leghissa.

materno, abbiamo delle condizioni strutturali tali, da permettere immediatamente con la nascita l'estrinsecazione di funzionalità specifiche che nel corpo materno, mancando le condizioni opportune, non potevano effettuarsi.

Mi sono rivolta particolarmente in queste ricerche ad alcuni pesci vivipari della famiglia dei Pecilidi: il *Lebistes reticulatus* e lo *Xiphophorus helleri*. Allorchè la femmina di questi pesci incomincia a partorire i piccoli, ne venivano fissati alcuni dalle 2 alle 6 ore dopo la nascita, mentre altri venivano spremuti direttamente dal corpo materno nel fissativo.



Sezione del tetto ottico (*a*, *b*) e del bulbo all'altezza delle cellule di Mauthner (*c*, *d*) di *Lebistes reticulatus* (*a*, *b*, *d*, met. CAJAL; *c*, met. BODIAN). *a*, *c*, in esemplari tolti dal corpo materno prima della nascita; *b*, *d*, in esemplari dopo sei ore di nuoto alla luce.

1. Clave terminali sinaptiche. 2. Fibre di Mauthner. 3. Dendrite laterale della cellula di Mauthner. 4. Dendrite ventrale.

Ho così comparato la struttura di alcuni centri nervosi dei piccoli dopo 2–6 ore di vita libera e di nuoto e piccoli che non avevano avuto ancora relazioni con il mondo esterno. Da queste esperienze è risultato che i neuroni specifici di alcuni centri presi in esame (centri visivi e centri statici) presentano, ancor prima che essi esplichino l'attività specifica (nella visione e nella attività natatoria), un differenziamento specifico particolare, già attuato sino in minuti particolari strutturali del tutto simile a quello degli stessi neuroni di animali in cui tali funzioni, anche se per breve tempo, si sono esplicate.

Non ho per ora esteso le ricerche a stadi più avanzati, per non complicare l'interpretazione dei fatti, ricordando come l'accrescimento corporeo sia un fattore di accrescimento e di complicazione strutturale in genere dei neuroni.

Con il presente metodo d'indagine è certamente da escludersi per gli animali tolti dal corpo materno, l'entrata in azione della funzione visiva e della funzione statica collegata con l'attività natatoria. L'esame del tetto ottico, quale struttura più differenziata delle vie visive e dell'elemento mauthneriano, quale caratteristico neurone di coordinazione motoria in relazione con le vie vestibolo–laterali, dimostra chiaramente come le caratteristiche strutture peculiari, siano già perfettamente differenziate.

I neuroni più caratteristici del tetto, quali quelli bipolari, appaiono già con il caratteristico neurite ricorrente e così sono presenti le anse delle fibre sensitive ricorrenti. Ciò dimostra poco accettabile la concezione che tali fibre ricorrenti siano il risultato dell'azione neurobiotattica di un campo della sensibilità generale nella regione profonda del tetto e di un campo visivo nella regione più corticale (Leghissa). È chiaro infatti che il campo visivo può avere un effettivo valore solo se la funzione visiva è in atto.

Per quanto riguarda gli elementi di Mauthner ci troviamo in analoghe condizioni. Anche in questo caso, prima che intervengano gli impulsi statici del nuoto a colpire gli elementi mauthneriani attraverso le fibre vestibolo–laterali e il canestro pericellulare, il neurone mauthneriano presenta tutte le caratteristiche disposizioni di rapporti con questi sistemi: le clave terminali del canestro sinaptico appaiono già perfettamente differenziate; i rapporti dendritici della cellula di Mauthner con le regioni vestibolo–laterali sono già attuate nell'animale che, ancora nel corpo materno, non ha avuto alcuna possibilità di nuotare e di inviare al neurone mauthneriano impulsi statici specifici.

Queste osservazioni, riferite a neuroni altamente specifici, quali i neuroni a neurite ricorrente del tetto ed i neuroni di Mauthner del bulbo, dimostrano come l'entrata in attività funzionale specifica del sistema fisiologico in cui questi neuroni sono inseriti (visione, coordinazione del movimento natatorio in rapporto a riflessi statici) non sia causale di particolari dispositivi strutturali che si potevano ritenere (e da alcuni lo sono stati), data la loro peculiarità, provocati dalla specifica attività funzionale.

Ciò non esclude che l'attività funzionale provochi delle modificazioni nelle cellule nervose: l'ipertrofia del pirenoforo, la cromatolisi, l'alterazione della rete neurofibrillare sono esempi ben noti, ma queste modificazioni non interessano il differenziamento particolare, ma sono espressioni comuni a tutte le cellule nervose relative alle condizioni metaboliche inerenti al grado di tale attività.

Il differenziamento specifico particolare, come risulta dalle esperienze di Stefanelli sulla cellula di Mauthner della Rana, una volta determinato durante la gastrulazione, si attua nel neurone specifico anche in condizione di espianto, sebbene con delle anomalie che egli ha messo in relazione con le alterate condizioni strutturali e di attività biologica del substrato. Se quindi il differenziamento specifico particolare è intrinsecamente acquisito con la determinazione istogenetica particolare, esso può attuarsi appieno solo se risultano normali i fattori esterni struttu-

rali e funzionali (neurotropismi ecc., da non confondersi con la funzione specifica di cui alcuni esempi sono qui in discussione) e il neurone appare, coll'iniziarsi della attività funzionale specifica del sistema fisiologico in cui è inserito, già differenziato nei suoi particolari.

Non è stato per ora considerato il differenziamento degli elementi in questione col progredire dello sviluppo inteso come accrescimento, ma le indagini sono in corso; si dovrà tuttavia tener conto di quelle condizioni ben note di grandezza e di complessità dei neuroni in relazione all'aumento di mole e alla età dell'animale.

Biologia. — *Osservàzioni sull'acido ribonucleico dell'oocite in crescita di «Antedon rosacea» Lamarck* (*) Nota di ENRICO URBANI, presentata (**) dal Socio G. COTRONEI.

Lo studio degli acidi nucleici nella cellula animale ha recentemente assunto una grande importanza. I lavori di J. Brachet (1) e di Caspersson hanno mostrato l'eventuale influenza degli acidi pentosonucleici nella sintesi delle proteine: si è difatti osservato che l'acido ribonucleico si trova nelle cellule ghiandolari, negli oociti in crescita: in tutte quelle cellule cioè nelle quali vi è una attività secretoria e una sintesi di particolari sostanze; inoltre la sua localizzazione è nello ergastoplasma che i citologi hanno identificato come un organello cellulare che interverrebbe nei processi secretivi. J. Brachet ha inoltre dimostrato, tra l'altro, che l'acido ribonucleico si sintetizza nel citoplasma delle cellule embrionali nelle quali è più viva l'attività morfogenetica. Recentemente Clement–Noël (2) ha osservato che nei blastemi di rigenerazione si ha un accumulo di acido ribonucleico.

È noto che l'acido ribonucleico può essere osservato nell'ultravioletto a causa del suo forte potere di assorbimento ma più semplicemente si può mettere in evidenza con la tecnica di Brachet basata sulla forte affinità di questo acido per alcuni coloranti basici e sul fatto che questa basofilia scompare dopo trattamento con la ribonucleasi, fermento che idrolizza l'acido ribonucleico.

Cotronei (3) in un suo lavoro sull'oocite in crescita di *Antedon rosacea* ha studiato la formazione di un corpo particolare che egli chiama *fascia vitellogena* e che è caratterizzato da una spiccata basofilia. La Memoria di Cotronei illustra le caratteristiche morfologiche dell'oocite in crescita di *Antedon rosacea* con osservazioni istochimiche che rivestono grande importanza ai fini del mio lavoro. Riassumo qui brevemente le osservazioni di Cotronei.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia «G. B. Grassi» della Università di Roma.

(**) Nella seduta dell'8 gennaio 1949.

(1) Per la bibliografia sull'argomento rimando il lettore oltre che al libro di J. BRACHET, *Embryologie Chimique*, Masson, 1944, alla recente rivista sintetica dello stesso Autore sugli acidi nucleici comparsa su «Symposia of the Society for experimental Biology», num. I, 1947.

(2) H. CLEMENT-NOËL, «Annales de la Societé Royale Zoologique de Belgique», LXXV, 25 (1944).

(3) G. COTRONEI, «Arch. Zool.», 5, 41 (1911).

Nei piccolissimi oociti di *Antedon* il citoplasma è acidofilo e la vescicola germinativa basofila, con la crescita le reazioni cromatiche mutano e ciò è stato da Cotronei messo in rapporto al metabolismo delle sostanze fosforate: difatti si nota basofilia ooplasmatica e acidofilia nucleare. La basofilia dell'ooplasma è data da

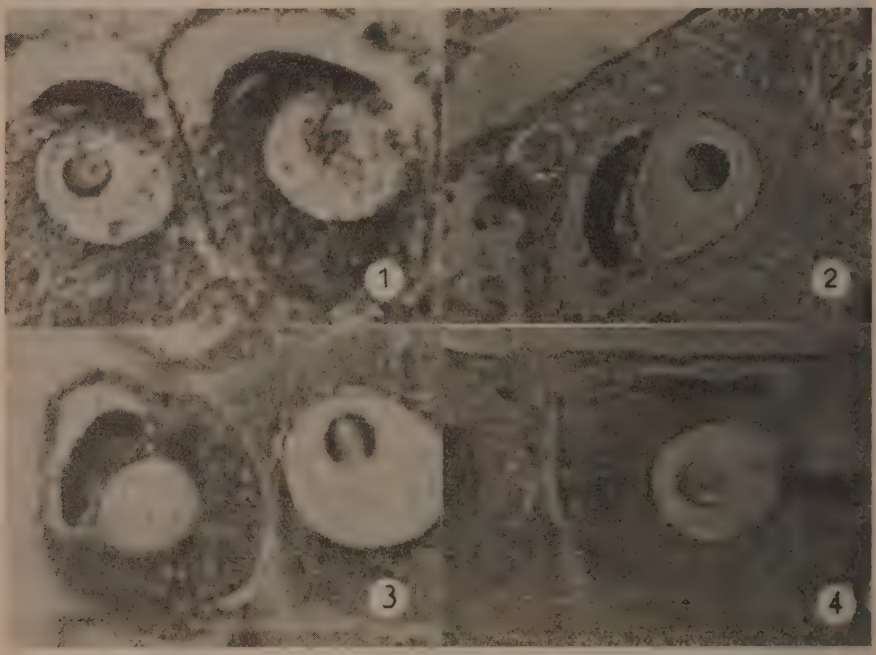


Fig. 1. – Sezione di due oociti di *Antedon rosacea*: è visibile in ciascun oocita la fascia vitellogena. Coloraz. Emat. ferrica-verde luce. Lo stesso quadro si ha anche dopo azione della ribonucleasi.

Fig. 2. – Sezione di un oocita di *Antedon* colorata con verde di metile-pironina: evidentissima la basofilia della fascia vitellogena accollata alla vescicola germinativa e di una zona del nucleolo, dopo azione della ribonucleasi si perde ogni colorabilità.

Fig. 3. – Sezione di due oociti di *Antedon* colorati col bleu di toluidina: in uno è evidentissima la fascia vitellogena, nell'altro (più accresciuto), la basofilia è diminuita.

Fig. 4. – Sezione di un oocita di *Antedon* colorato con pironina-verde di metile: è bene visibile la fascia vitellogena che si è allontanata dalla vescicola germinativa e si è disgregata in due pezzi. Anche in questo caso come in quello della fig. 3 la basofilia scompare completamente dopo azione della ribonucleasi.

minuti granuli che si vanno fondendo in quelle formazioni oocitarie che prendono il nome di corpi cromatici. In seguito i corpi cromatici si riuniscono a formare la fascia vitellogena, perinucleare e che « conserva i caratteri istochimici delle granulazioni dalle quali proviene (Cotronei) ».

Con l'accrescimento dell'oocite la fascia vitellogena si allontana dalla vescicola germinativa e comincia a disgregarsi, la reazione basofila dell'ooplasma si mantiene ancora per qualche tempo pur indebolendosi, poi con la formazione del vitello che

si inizia alla periferia dello oocite la reazione gradatamente si limita ad un alone perinucleare.

Nei grandi oociti la basofilia è ridottissima. Il nucleolo è anch'esso caratterizzato da basofilia che però non è omogenea ma limitata ad un settore del nucleolo stesso e si riduce nel nucleolo dei grandi oociti.

Cotronei interpreta la formazione della *fascia vitellogena* come dipendente da un eccesso di quelle sostanze che hanno formato i corpi cromatici « Tanto è vero che basta la crescita ulteriore dell'oocita vale a dire l'aumento della massa ooplasmatica perchè la sostanza basofila concentratasi in un primo tempo in un corpo figurato torni a diffondersi nell'ooplasma (Cotronei) ». Inoltre questo Autore insiste sulla importanza della *fascia vitellogena* in rapporto alle formazioni ergastoplasmatiche, egli infatti afferma che « tra i corpi basofili degli oociti in crescita e le formazioni che si manifestano con eguali caratteri nelle cellule glandulari è innegabile l'esistenza di analogie ».

Queste osservazioni sulla basofilia della *fascia vitellogena* di *Antedon*, le analogie tra fascia vitellogena e formazioni ergastoplasmatiche, la affinità della fascia vitellogena per il bleu di toluidina (che Brachet [4] ha indicato come colorante molto adatto a rivelare in alcuni casi l'acido ribonucleico) mi hanno spinto a studiare la localizzazione dell'acido ribonucleico nell'oocite in crescita di *Antedon rosacea*.

Espongo qui brevemente i risultati ottenuti.

Per mettere in evidenza l'acido ribonucleico ho fatto uso della tecnica di Brachet e della fotografia nell'U. V. su lunghezze d'onda da 2700 Å a 2750 Å. Le pinnule della Comatula [5] sono state fissate in diversi liquidi tra i quali lo Zenker, l'Helly e il formolo acetico che mi hanno dato i migliori risultati [6]. La fissazione nei liquidi acidi è stata la più breve possibile (1–5 ore) per evitare una depolimerizzazione dell'acido ribonucleico che si riflette in una perdita di colorabilità. Le pinnule incluse in paraffina sono state tagliate in sezioni dello spessore di 7–10 *micron*. Alcune serie sono state colorate con ematossilina ferrica–verde luce altre con verde di metile–pironina (Grübler) altre ancora con il bleu di toluidina. Sono stati allestiti inoltre dei preparati ponendo le sezioni alternativamente su tre portaoggetti uno dei quali destinato ad essere colorato direttamente con colorante basico, il secondo è stato sottoposto all'azione della ribonucleasi [7] per circa 45 minuti a 70° C, il terzo è stato tenuto in acqua distillata alla stessa temperatura per lo stesso tempo. I tre vetrini sono stati colorati contemporaneamente e contemporaneamente differenziati.

(4) J. BRACHET, *Enzymologia*, XI, 222 (1944).

(5) Ringrazio il prof. Dohrn, Direttore della Stazione Zoologica di Napoli che mi ha fornito il materiale e con grande cortesia mi ha ospitato per alcuni giorni alla Stazione Zoologica.

(6) Sono grato al prof. J. Brachet per i consigli di tecnica che gentilmente mi ha dato.

(7) La soluzione di ribonucleasi è stata preparata nella seguente maniera: il pancreas di bue è stato finemente macinato e sospeso per 24 ore in 1-2 volumi di acido acetico 0,1 N a 2°-4° C. Si bolle per dieci minuti e si filtra. Si neutralizza con soda normale e si rifiltra. Si dializza per 24 ore su membrana di cellophan, si elimina il precipitato per centrifugazione e si utilizza subito la soluzione ottenuta alla temperatura di 65°–70° C.

Usando la miscela verde di metile–pironina od il bleu di toluidina ho ottenuto delle belle colorazioni rosse o bleu dei granuli basofili, di una zona del nucleolo e della *fascia vitellogena* in vari stadi di formazione e disgregazione. Le sezioni sulle quali ha invece agito la ribonucleasi perdono completamente la basofilia del citoplasma, del nucleolo e della *fascia vitellogena* e queste formazioni non si colorano più. Sezioni montate in glicerina su quarzo e fotografate nell'U. V. dànno un quadro uguale a quelle colorate con pironina o con bleu di toluidina: si vede come la basofilia corrisponde ad un forte assorbimento nell'U. V., assorbimento che va gradatamente scomparendo nei medi e nei grandi oociti di pari passo con la scomparsa della basofilia. Ho detto che gli oociti sottoposti all'azione della ribonucleasi perdono ogni colorabilità con la pironina o con il bleu di toluidina ma è interessante notare come invece il nucleolo e la *fascia vitellogena* anche dopo trattamento con la ribonucleasi vengono colorati dalla ematossilina ferrica. Questo sta ad indicare che nella *fascia vitellogena* esiste una specie di stroma di sostegno che sopporta l'acido ribonucleico, si mette in evidenza con la ematossilina ferrica e non è demolito dalla ribonucleasi. Questo stroma non è preesistente nel citoplasma ma si forma con la formazione della *fascia vitellogena* e si distrugge con la disgregazione della fascia stessa.

Le osservazioni da me compiute stanno a dimostrare che la basofilia ooplasmatica e nucleolare dell'oocita di *Antedon rosacea* è dovuta ad acido ribonucleico, a tale basofilia corrisponde un forte assorbimento nell'U. V. Così la *fascia vitellogena* che trae la sua origine dai granuli basofili ooplasmatici e dai corpi cromatici mostra una forte affinità per la pironina ed il bleu di toluidina, tale affinità scompare completamente dopo azione della ribonucleasi: ciò dimostra che un costituente essenziale della *fascia vitellogena* è l'acido ribonucleico, essenziale ma non esclusivo perchè esiste anche uno stroma la natura del quale mi è impossibile al momento precisare. È interessante a questo punto ricordare che Cotronei ha affermato che la *fascia vitellogena* possiede gli stessi caratteri istochimici delle granulazioni dalle quali provviene e nelle quali si risolve; le presenti esperienze non fanno che confermare questa osservazione.

Il fatto che un costituente essenziale della *fascia vitellogena* sia l'acido ribonucleico è in accordo con le idee precedentemente esposte di Caspersson, Brachet e altri e conferma pienamente la mia ipotesi di lavoro. Difatti possiamo considerare questa formazione come espressione del metabolismo costruttivo dell'oocite in crescita. La presenza di acido ribonucleico in questa fascia è giustificata dal ruolo attribuito a questo acido nella sintesi delle proteine e di altre sostanze; inoltre l'analogia morfologica fatta da Cotronei tra la *fascia vitellogena* e le formazioni ergastoplasmatiche trova nelle presenti ricerche una valida conferma di carattere funzionale in quanto, come è stato precedentemente detto, sopratutto nell'ergastoplasma hanno la loro sede gli acidi pentosonucleici.

Le presenti ricerche sono tuttora in sviluppo.

Botanica. — *Sul valore dello strato epidermico che tappezza la faccia ventrale del carpello delle Angiosperme: osservazioni in «Idesia polycarpa» Maxim.* (*). Nota di ROBERTO CORTI, presentata (**) dal Socio G. NEGRI.

Idesia polycarpa Maxim., pianta di abito arboreo della famiglia delle *Flacourtiaceae*, è una specie dioica. Lo studio dello sviluppo del fiore nell'individuo ♀ e nell'individuo ♂ (1) ha messo in evidenza che: *a*) uno stadio ermafrodita, perfettamente identico nei due sessi, precede lo stadio unisessuale; *b*) nel fiore ♀ lo stadio unisessuale si inizia al momento in cui nelle antere le cellule madri del polline dovrebbero entrare in divisione riduzionale: incapaci di superare questa soglia, le cellule del tessuto sporigeno degenerano e in conseguenza le antere cessano ogni sviluppo ulteriore ed il fiore diviene ♀; *c*) nel fiore ♂ lo stadio unisessuale si inizia un poco più tardivamente, e cioè quando nelle antere si è compiuta la microsporogenesi: il pistillo a questo momento ha iniziato la differenziazione delle superfici stigmatiche di recezione del polline, e nella sua parte ovarica è in fase di produzione di mammelloni ovulari dalle placente. Esso perde nel suo insieme le caratteristiche meristematiche e cessa ogni ulteriore sviluppo; il fiore diviene così ♂. La degenerazione del pistillo non sembra essere autonoma, ma sembra essere in rapporto con lo sviluppo delle antere dello stesso fiore. Tra i numerosissimi fiori dell'albero ♂, in qualche annata, ve n'è qualcuno in cui l'ovario raggiunge un grado di sviluppo più o meno avanzato, fino talvolta a dare il frutto.

L'esame accurato dello sviluppo del pistillo nel fiore ♀, delle modalità di arresto di questo nel fiore ♂ normale e dei fenomeni presentati nello sviluppo del pistillo nei fiori ♂ anormali (2) ha portato a qualche interessante constatazione di fatto, che qui desidero brevemente esporre.

L'ovario di *I. p.* è composto di cinque carpelli, sincarpico, con cavità semplice ed unica; la placentazione è parietale laminare. Vi sono cinque voluminose placente (fig. 1), che si proiettano nella cavità ovarica, restringendola sensibilmente, e cinque stigmi. Gli ovuli si formano sulle placente a partirsi dal basso (fig. 2), eccezion fatta per il piccolo pavimento ovarico, che non forma ovuli. L'ondata basifuga di formazione di ovuli si arresta a circa due terzi di altezza dell'ovario, in modo che il terzo superiore delle placente non forma ovuli: queste placente sterili, in un secondo tempo, si accolleranno fra loro (fig. 3), chiudendo l'ovario e formandone il « tetto ». La chiusura dell'ovario per accollamento delle

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Firenze.

(**) Nella seduta dell'8 gennaio 1949.

(1) R. CORTI, *Sul dioicismo di Idesia polycarpa* Maxim. « Nuovo Giornale Botanico Italiano », n. s., vol. LV, 1948 (in corso di pubblicazione).

(2) Il materiale per tale studio è stato prelevato in prevalenza dai due esemplari di *I. p.* dell'Orto Botanico dell'Università di Siena, diretto dal prof. A. Nannizzi, che vivamente ringrazio.

placente sterili avviene quando le placente fertili cessano la produzione di ovuli, mentre in quelli formatisi si inizia la differenziazione dei tegumenti; poi questi ovuli, originariamente atropi, si incurvano in corrispondenza della base di impianto del tegumento esterno e divengono anatropi.

Fino dai primi stadi di sviluppo del pistillo, si nota uno strato epidermico embrionale ben differenziato dai tessuti embrionali sottostanti, che tappezza la cavità ovarica e da questa si continua sulle espansioni stigmatiche. Questa epidermide embrionale mantiene la sua individualità nella cavità ovarica, ove tappezza le placente, e presenta i caratteri di un *epitelio*: non subisce mai divisioni pericline, ma solo anticline, che ne aumentano la superficie, senza aumentarne lo spessore. In corrispondenza degli stigmi, invece, molto precocemente, lo strato più superficiale subisce delle divisioni pericline: in altre parole l'epidermide perde qui, morfologicamente parlando, la sua individualità, delineando il suo potere prospettico nell'assumere le caratteristiche dell'epidermide stigmatica secernente, sia pure ancora allo stato embrionale. Quando nell'ovario si formano i mammelloni ovulari (figg. 1 e 2), lo strato epiteliale si mantiene sempre perfettamente individualizzabile, mentre perde le sue caratteristiche in corrispondenza degli ovuli, quando si iniziano i tegumenti che si formano proprio a sue spese (fig. 4). Si mantiene invece tipico e inalterato negli spazi interovulari, ed anzi in tali zone esso diviene istologicamente ancor più evidente per contrasto, in quanto il tessuto placentare, sottostante all'epitelio stesso, acquista le caratteristiche di un tessuto aerifero. L'epitelio si riconosce fino negli stadi adulti dell'ovario (fig. 5), quando avviene la fecondazione, sebbene abbia ormai perduto le caratteristiche meristematiche. Non si distingue più durante lo sviluppo dei semi.

Nel fiore ♂ normale, l'arresto di sviluppo del pistillo, in fase di formazione di ovuli dalle placente, è segnato dalla degenerazione dello strato epiteliale, che tappezza la cavità ovarica, e da quella delle iniziali dell'epidermide secernente degli stigmi, che ne sono la diretta continuazione ed appartengono alla stessa linea cellulare. I tessuti sottostanti perdono ogni potere meristematico e si parenchimatizzano, acquistando i segni di una precoce senilità. L'ovario appare allora come se fosse « scorticato » al suo interno, e solo tappezzato da una leggera pellicola di aspetto collageno, che rappresenta ciò che rimane dell'epitelio stesso (fig. 7). Solo sulle palette stigmatiche il materiale degenerato acquista un po' più di consistenza; esso infatti rappresenta qui i resti non di uno solo ma di più strati cellulari.

Questo comportamento del fiore ♂ normale già vale ad indicarci la grande importanza dello strato cellulare, che tappezza internamente i carpelli, nella intera organizzazione del pistillo stesso. Tuttavia tale importanza funzionale risalta con maggiore evidenza, quando si considerino taluni fiori ♂ anormali.

La degenerazione del pistillo nel fiore ♂ normale ci appare come un fenomeno globale, contemporaneo nelle diverse parti dell'organo. Osservando invece i casi anormali – che ci permettono di avere tutta una gamma di possibilità di sviluppo del pistillo stesso, da appena sensibilmente maggiore rispetto ai casi normali fino alla formazione di un vero frutto – ci si rende conto che effettivamente la degenerazione non è contemporanea, ma procede come un'onda, che invade l'organo dall'alto al basso, e può fermarsi a diversi livelli.

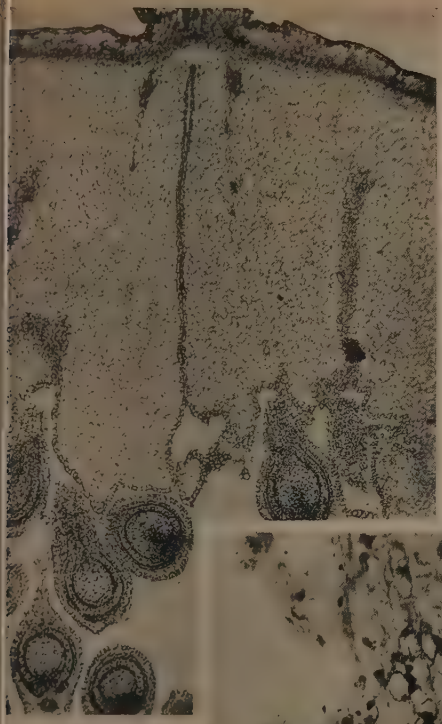
1

2

3

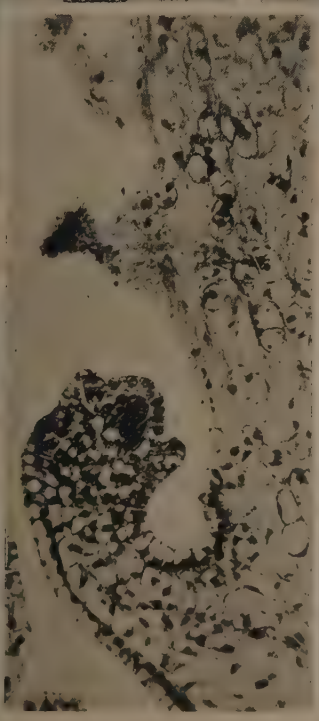
4

Fig. 1. – Pianta ♂, sez. trasv. dell'ovario al termine dello stadio ♀ (× 97).
Fig. 2. – Pianta ♀, sez. longit. del pistillo al termine dello stadio ♀ (× 97).
Fig. 3. – Pianta ♀, sez. longit. della regione più alta del pistillo all'inizio dello stadio ♀ (× 250).
Fig. 4. – Pianta ♀, sez. longit. di un ovulo e porzione di placenta quando lo sviluppo dei tegumenti ovulari è quasi al termine e le c. m. in sinapsi (× 250).



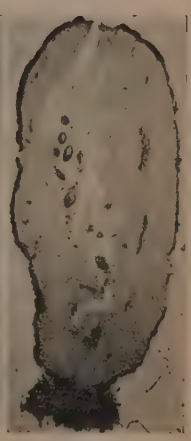
5

6



7

8



9

10

Fig. 5. – Pianta ♀, parte superiore dell'ovario maturo in sez. longit. (× 97).
Fig. 6. – Ovario abnormemente sviluppato di pianta ♂, con stigmi colpiti da degenerazione (× 97).
Fig. 7. – Pianta ♂, sez. longit. dell'ovario completamente parenchimatizzato (× 34).
Fig. 8. – Parete interna di un ovario parzialmente sviluppato in pianta ♂ (× 250).
Fig. 9. – Ovario maturo di pianta ♀ (× 7).
Fig. 10. – Ovario maturo di pianta ♂ (× 7).

CASO DI DEGENERAZIONE LIMITATA ALLO STIGMA. – Quando si ha la degenerazione della sola superficie recettiva stigmatica, l'ondata basifuga di formazione di ovuli non si arresta a due terzi di altezza dell'ovario, ma procede fino alla base di impianto degli stigmi, invadendo anche la zona superiore delle placente (fig. 6). L'ovario rimane così privo del suo tetto, di una zona stilare (anche se non evidente morfologicamente come tratto a sè; cfr. fig. 5 con fig. 6), e la sua chiusura non è in tal caso mai perfetta, rimanendo dei larghi pertugi di comunicazione con l'ambiente esterno. Il numero degli ovuli è però così superiore al numero di ovuli normale del fiore ♀, che non può essere la sola ragione di tale aumento l'estensione della zona ovulifera al settore « stilare »: deve esservi anche un prolungamento della fase ovulifera, cioè un ritardo dell'inizio della fase successiva, che, come si è visto, si rivela con la formazione dei tegumenti negli ovuli già formati e con l'arresto della produzione di nuovi ovuli. Infatti gli ovuli ci appaiono più grandi del normale, ed il rapporto nucella/funicolo un poco spostato, tanto che gli ovuli non arrivano mai ad acquistare quella posizione perfettamente anatropa che è la loro normale.

La degenerazione collagena delle iniziali del tessuto secernente dello stigma non impedisce al polline di germinarvi sopra e di compiere regolarmente la fecondazione. Si può arrivare anche alla maturazione dei frutti, ma la forma a pera, invece che rotonda (fig. 10 in confronto a fig. 9), la loro maggiore grandezza, il numero maggiore tanto dei semi abboniti che degli ovuli abortiti, i resti più voluminosi e più distanziati dei funicoli, sono tutti fatti che denunziano che nei frutti dell'albero maschile si è verificata una deviazione dal normale sviluppo dell'ovario, connessa con la non integrità delle superfici stigmatiche. Dobbiamo quindi concludere che gli stigmi hanno grande importanza per lo sviluppo dell'ovario, ed in particolare *per la sua chiusura*, creando una barriera di arresto nella produzione degli ovuli da parte delle placente. Del resto, poichè la superficie di recezione stigmatica nelle Angiosperme ha il valore e la funzione di tutte le superfici di recezione micropilari delle Gimnosperme, è più che naturale che presenza di stigma e chiusura dell'ovario siano due fenomeni correlati, l'uno cioè in derivazione dell'altro.

CASI DI DEGENERAZIONE ESTESA DALLO STIGMA ALL'OVARIO. – Ho avuto a disposizione anche alcuni casi in cui la degenerazione dell'epitelio interno dell'ovario raggiungeva, procedendo verso il basso, livelli più o meno profondi dell'ovario stesso. In tali casi si verifica sempre che l'arresto di sviluppo degli ovuli si limita con squisita esclusività a quella zona dell'ovario in corrispondenza della quale l'epitelio stesso è degenerato. Al livello al quale l'epitelio comincia ad essere integro (fig. 8), si osservano anche i normali ovuli col loro carattere meristematico, e che continuano il loro regolare sviluppo, sia pure con ritmo rallentato. In generale si può dire che l'ovario si mantiene un organo vitale fino a quel livello a cui arriva, nel suo interno, l'epitelio che lo tappezza. Il limite è nettamente riconoscibile anche dall'esterno, all'esame macroscopico, per una sorta di brusca modificazione del contorno esterno dell'ovario.

È quindi evidente che l'epitelio che tappezza internamente la cavità ovarica è di essenziale importanza per l'organizzazione e lo sviluppo dell'ovario.

La conclusione che possiamo trarre da quanto sopra detto è che il meccanismo di soppressione del sesso ♀ negli individui ♂♂ di *Idesia polycarpa* agisce in una maniera specifica, colpendo una linea cellulare ben individualizzabile fin dall'inizio dello sviluppo del carpello; questa linea cellulare, che si mantiene sempre evidentemente segregata per tutto il tratto pertinente l'ovario, perde morfologicamente la sua individualità nel tratto stigmatico, dove si evolve verso un tessuto con funzione specifica; tuttavia la sua individualità la ritroviamo anche in questo settore, proprio nel momento della eventuale degenerazione: questa infatti colpisce elettivamente la linea cellulare in discorso con tutti i suoi derivati, risparmiando invece le cellule che non le appartengono. Qualora la degenerazione sia parziale, e questa linea cellulare venga risparmiata per un certo tratto, l'ovario si mantiene vitale ed efficiente per il tratto corrispondente.

In lavori recenti condotti su *Datura* [3] sulla organizzazione degli apici vegetativi delle piante, servendosi di un ingegnoso metodo di indurre con colchicina chimere periclinali, nelle quali gli apici vegetativi abbiano strati con differenti numeri di cromosomi, Satina e collaboratori hanno messo in evidenza tre strati cellulari, *tre foglietti germinali*, uno epidermico « L I », uno sottoepidermico « L II », ed uno iposottoepidermico « L III », ai quali è dovuta l'intera produzione delle diverse parti di una pianta. In particolare lo strato « L I », subendo divisioni anticline, provvede agli sviluppi in superficie, ma non a quelli in volume. Nell'ovario esso mantiene la sua caratteristica unistratificazione e solo in corrispondenza del tessuto conduttore dello stilo e del tessuto secretore dello stigma subisce divisioni in senso periclino, per evolversi verso il suo destino specifico.

Ora la netta individualità dello strato « L I », messa in evidenza da queste ricerche in *Datura*, viene confermata da quanto ho riscontrato in *Idesia*, e cioè dal reperto che la degenerazione nel corso della « mascolinizzazione » dei fiori inizialmente ermafroditi della pianta ♂ colpisce specificamente questo strato, che dimostra così di essere responsabile della organizzazione del pistillo nei primi stadi del suo sviluppo.

In particolare possiamo dire che l'epitelio che tappezza la cavità ovarica ha la funzione di mantenere lo stato di meristematicità nel complesso del pistillo: l'attività di divisione delle cellule viene ad essere localizzata più particolarmente in punti determinati, i quali divengono la sede delle protuberanze ovulari. Il nostro « strato epiteliale » (in *Idesia*) si identifica con lo strato « L I » di Satina e collaboratori (in *Datura*); ed i brillanti resultati dei lavori di questi ultimi ci sono di valida conferma ontogenetica quando sosteniamo – solo su base istologica – che

(3) S. Satina, A. F. Blakeslee, A. G. Avery, *Demonstration of the three germ layers in the shoot apex of Datura by means of induced polyploidy in periclinal chimeras.* « Amer. Journ. of Botany », vol. 27, pp. 895-905 (1940). S. Satina, A. F. Blakeslee, *Periclinal chimeras in Datura Stramonium in relation to development of leaf and flower.* Ibidem, vol. 28, pp. 862-871 (1941). S. Satina, A. F. Blakeslee, *Periclinal chimeras in Datura in relation to the development of the carpel.* Ibidem, vol. 30, pp. 453-462 (1943). S. Satina, *Periclinal chimeras in Datura in relation to development and structure (A) of the style and stigma (B) of calyx and corolla.* Ibidem, vol. 31, pp. 493-502 (1944). S. Satina, *Periclinal chimeras in Datura in relation to the development and structure of the ovule.* Ibidem, vol. 32, pp. 72-81 (1945).

questo strato non perde la sua individualità e segue il formarsi degli ovuli, aumentando la sua superficie con divisioni anticline. La massa del tessuto nucellare sottoepidermico (potenzialmente archisporiale) è data da « L II ». Dal momento che « L II » entra nel campo della sua azione specifica e che dalle sue cellule si differenziano la o le cellule archisporiali, la funzione di « L I » sembra cessare in corrispondenza degli ovuli. Noi vediamo che esso perde la sua fisionomia caratteristica e ben presto, dallo sviluppo del gametofito ♀, viene eliminato. Il destino dell'ovulo è ora legato alle potenzialità prospettiche dello strato fertile « L II ». Si mantiene bensì lo strato « L I » con le sue caratteristiche per lungo tempo ancora negli spazi interovulari delle placente, come se qui conservasse ancora le sue possibilità: ma le placente si avviano verso una differenziazione istologica – trasformandosi in tessuto adulto, spugnoso per ampi spazi intercellulari – che le rende incapaci della produzione di nuovi ovuli. È evidente che ad un dato momento avviene un cambiamento di fase di sviluppo dell'ovario: momento che coincide con il formarsi dei tegumenti e con il primo profilarsi della linea goniale nella nucella. L'ovario si chiude e le placente si differenziano. La prima fase dello sviluppo del pistillo è così terminata, fase che potremo chiamare « pistillare », in quanto riguarda l'organizzazione del pistillo; si comincia la seconda fase, che potremo chiamare « ovulare », in quanto riguarda lo sviluppo degli ovuli.

È solo nella prima fase che ha importanza l'epitelio che tappezza la faccia interna dei carpelli, cioè la linea cellulare più superficiale « L I » ed è d'altra parte la prima fase quella che caratterizza la formazione di una cavità chiusa (la cavità ovarica), in cui si sporgono degli organi (gli ovuli): l'unica cavità organizzata nel corpo delle piante superiori, che sono in ogni altra parte organismi « pieni », « solidi », e che rappresenta l'acquisizione essenziale della angiospermia rispetto alla gimnospermia.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente porge il saluto della Classe, e suo personale, ai Soci Franco Rasetti della John Hopkins University di Baltimora e Beppo Levi della Università di Rosario, ritornati in Patria dopo una lunga assenza e oggi presenti alla seduta.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei Rendiconti i Soci Negri, Sergi, Boaga, Cotronei, Puntoni, Sansone (a mezzo del collega Bompiani), Bompiani e Signorini.

Il Segretario legge quindi l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria e, successivamente, il prof. Picone presenta una Memoria della dott.ssa Brigitte Radon di Vienna, dal titolo « Sviluppi in serie degli integrali ellittici fondamentali ». Sarà nominata un'apposita Commissione che riferirà su detta Memoria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

Bompiani E., Sulle corrispondenze puntuali fra spazi proiettivi.

Fano G., Su una particolare varietà a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche.

Quilico A. e Palazzo G., Sulla preparazione dell'isossazolo (pres. dal Corrisp. A. Quilico).

Sansone G., Sopra una classe di equazioni di Liénard priva di integrali periodici.

Archiriade E., Sur le point principal des courbes tracées sur une surface (pres. dal Socio E. Bompiani).

Baffoni G. M., Rilievi craniometrici in alcuni microchirotteri nostrani (pres. dal Socio S. Sergi).

Biocca E., Ricerche sull'azione oligodinamica dell'argento (pres. dal Corrisp. V. Puntoni).

Lombroso C. e Ardy C., Azione dei farmaci simpaticolitici sulle combustioni (A. D. S.) provocate dagli autolizzati proteici (pres. dal Corrisp. U. Lombroso).

Morando G. C. e Dachà U., Tessuto acinoso del pancreas e genesi del diabete da allossana negli uccelli granivori (pres. dal Corrisp. U. Lombroso).

Ortali V., Studio morfologico, al microscopio elettronico, dei fagi attivi sui micobatteri (pres. dal Corrisp. D. Marotta).

Udeschini P., Sulla indeterminazione del tensore energetico nello spazio tempo (pres. dal Corrisp. B. Finzi).

Vaona G., Trasformazioni puntuali fra due piani in una coppia a direzioni caratteristiche indeterminate (pres. dal Socio E. Bompiani).

Villa M. e Vaona G., Le trasformazioni puntuali in una coppia a Jacobiano nullo. – I. Intorno del 2° ordine (pres. dal Socio L. Berzolari).

Villa M. e Vaona G., Le trasformazioni puntuali in una coppia a Jacobiano nullo. – II. Intorno del 3° ordine. Riferimenti intrinseci (pres. dal Socio L. Berzolari).

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario illustra le pubblicazioni pervenute in omaggio, mettendo in particolare rilievo il volume « Scritti matematici di Giacomo Candido » raccolti e ordinati per incarico del figlio Francesco dai proff. Enea Bortolotti e Enrico Nannei e il volume dal titolo « Metalli non ferrosi e ferroleghe » dell'Azienda Minerali Metallici Italiani.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente prega il Socio Rasetti di informare la Classe dei più importanti e recenti risultati ottenuti, nel campo della fisica nucleare, dagli scienziati americani.

Il Prof. Rasetti si dichiara ben lieto di accedere al desiderio del Presidente e dei Colleghi e riferisce con le seguenti parole:

« Fra gli sviluppi più significativi della fisica nucleare nell'ultimo anno sono i risultati ottenuti negli Stati Uniti mediante l'uso di apparecchi capaci di accelerare particelle elementari fino a energie dell'ordine di qualche centinaio di milioni di volt–elettrone. L'unità di energia impiegata in questa relazione è il milione di volt–elettrone (MEV), pari a $1.60 \cdot 10^{-6}$ erg ; essa è l'energia acquistata da un elettrone accelerato attraverso una differenza di potenziale elettrico di un milione di volt.

« Gli acceleratori di particelle ad altissima energia si dividono in acceleratori di particelle pesanti (ioni positivi di idrogeno o di elio) e di particelle leggere (elettroni).

« Nel *ciclotrone* ioni positivi sono accelerati percorrendo un'orbita a spirale in un campo magnetico omogeneo ed uniforme. Ogni mezzo giro, essi subiscono un'accelerazione dovuta a un campo elettrico alternato ad alta frequenza; il principio che rende il meccanismo attuabile è il fatto che il periodo di rivoluzione, trascurando effetti relativistici, è indipendente dalla velocità dello ione. La massima energia raggiungibile è determinata dal sopravvenire di effetti relativistici quando l'energia cinetica diviene non trascurabile in confronto all'*energia intrinseca* mc^2 (m = massa, c = velocità della luce).

« Energie molto maggiori possono essere ottenute per mezzo del *ciclotrone a frequenza modulata*; in questo strumento, la frequenza dell'oscillatore varia col tempo in modo da compensare gli effetti relativistici. Il solo apparecchio di questo tipo attualmente in funzione si trova all'Università di California (Berkeley). Il magnete pesa 4000 tonnellate e produce un campo uniforme tra espansioni polari di m. 4,60 di diametro. Esso ha permesso di accelerare deutoni (ioni di idrogeno pesante) fino a 190 MEV e particelle alfa (ioni di elio) fino a 380 MEV. Strumenti analoghi in costruzione nelle università di Rochester, Columbia e Chicago permetteranno di ottenere protoni di 400 MEV.

« Per l'accelerazione di elettroni, si può impiegare il *betatrone*. Questo strumento può essere descritto come un trasformatore il cui secondario non è un circuito materiale, bensì uno sciame di elettroni, circolanti nel vuoto in orbita circolare, e mantenuti in tale orbita mediante un campo magnetico di intensità crescente col tempo man mano che aumenta l'energia degli elettroni. Tale energia è fornita da un flusso variabile d'induzione magnetica. Gli elettroni possono compiere un numero di rivoluzioni dell'ordine del milione e raggiungere energie di 100 MEV nel betatrone in funzione alla General Electric Company. Urtando un metallo, tali elettroni generano raggi X della stessa energia.

« Per energie superiori, il costo e potenza impiegati nel betatrone divengono proibitivi e si ricorre al *sincrotrone*. In questo strumento gli elettroni vengono dapprima accelerati col principio del betatrone, poi, quando la loro velocità è divenuta praticamente uguale alla velocità della luce e quindi costante, mediante un campo elettrico alternato ad alta frequenza simile a quello del ciclotrone. Diversi sincrotroni in avanzata costruzione daranno energie di 300 MEV.

« Infine a Berkeley e Brookhaven sono in progetto acceleratori colossali che daranno particelle di alcuni miliardi di volt–elettrone.

« Il risultato di gran lunga più importante fin qui ottenuto mediante acceleratori ad altissime energie è stato la *creazione artificiale di mesoni.*

« Già da tempo si sapeva che 3/4 delle particelle cariche che costituiscono i raggi cosmici al livello del mare sono *mesoni* positivi e negativi, di carica pari a quella del positrone o dell'elettrone, e massa 200 volte maggiore (1/10 della massa del protone). Queste particelle saranno indicate come *mesoni leggeri.* Più recentemente, Occhialini e Powell hanno dimostrato che a grandi altezze sul livello del mare sono pure presenti dei *mesoni pesanti* positivi e negativi, di massa circa 300 volte la massa elettronica. Essi hanno anche scoperto che questi mesoni pesanti sono altamente instabili, trasformandosi con periodo brevissimo in un mesone leggero e in una particella neutra di proprietà poco conosciute. A sua volta, il mesone leggero si disintegra, con vita media di $2 \cdot 10^{-6}$ secondi, in un elettrone (o positrone a seconda del segno) e in una particella neutra.

« Poichè i mesoni sono instabili, è chiaro che non provengono dagli spazi cosmici ma sono generati nell'alta atmosfera dalle particelle *primarie* dei raggi cosmici, probabilmente protoni, per urto contro i nuclei di ossigeno e di azoto, o meglio contro i protoni e neutroni (designati collettivamente *nucleoni*) che li compongono. È quindi chiaro che nell'urto nucleone–nucleone, se l'energia disponibile è sufficiente, devono generarsi dei mesoni. Il principio della conservazione della carica elettrica mostra che deve trattarsi di processi del tipo:

protone + protone = protone + neutrone + mesone positivo
protone + neutrone = protone + protone + mesone negativo.

« Tutto questo è in accordo con considerazioni teoriche sviluppate da Yukawa già prima della scoperta del mesone. Partendo da considerazioni generali di meccanica quantistica relativistica, si trova che ad ogni *campo di forze* deve corrispondere un tipo di *quanto.* Inoltre, si ricava che se il potenziale delle forze decresce con la distanza $e^{-r/b}/r$, cioè è sensibile fino a distanza dell'ordine di b (*raggio d'azione*) la massa del quanto è legata (approssimativamente) al raggio d'azione dalla formula $b = h/4\pi mc$ (h = costante di Planck). Ora si sa che le forze nucleari, che tengono legati i nucleoni nel nucleo, hanno un raggio d'azione dell'ordine di 10^{-13} cm. A questo valore del raggio d'azione corrisponde una massa uguale a qualche centinaio di volte la massa elettronica: da cui l'ipotesi che *il mesone sia il quanto delle forze nucleari* così come il *fotone* è il quanto del campo elettromagnetico (il potenziale elettrostatico non decresce esponenzialmente, ossia b è infinito, e il quanto ha massa nulla). In questa ipotesi, si avrebbe precisamente una alta probabilità di creazione di mesoni nell'urto tra nucleoni, quando l'energia cinetica disponibile, ossia valutata nel sistema di riferimento del baricentro, sia sufficiente a creare il mesone. Difficoltà gravissime che non possiamo esporre qui si opponevano all'ipotesi che il mesone leggero intervenisse come quanto del campo nucleare; ma dopo la scoperta del mesone pesante, era plausibile supporre che tale ruolo spettasse a quest'ultima particella. Le esperienze compiute a Berkeley qualche mese fa hanno effettivamente dimostrato che nell'urto di particelle alfa di 380 MEV contro nuclei in riposo si sprigionano abbondanti mesoni pesanti, che appaiono identici a quelli osservati nei raggi cosmici. A tutta prima sembrerebbe che l'energia

disponibile fosse insufficiente. Nella particella alfa di massa 4 e energia di 380 MEV, ciascun nucleone possiede l'energia cinetica di 95 MEV; di questa soltanto la metà, 47·5 MEV, è disponibile nell'urto contro un nucleone in riposo. La creazione del mesone pesante richiede almeno un'energia di 150 MEV corrispondente alla sua massa, trecento volte la massa elettronica. La spiegazione dell'apparente contraddizione è da ricercarsi nel fatto che i nucleoni, sia nella particella alfa come nel nucleo urtato, sono in rapido movimento, e qualche volta le velocità di agitazione interna si aggiungono a quelle dei baricentri dei nuclei in modo da dar luogo all'energia cinetica relativa sufficiente alla creazione del mesone. Si capisce che il rendimento del processo in queste condizioni non sia molto elevato; tuttavia il numero di mesoni prodotti è incomparabilmente più grande di quello dei mesoni cosmici e ne renderà più facile lo studio. I nuovi ciclotroni in costruzione permetteranno di ottenere mesoni pesanti nell'urto diretto protone–protone e protone–neutrone, con rendimento certamente molto migliore.

« È stato anche osservato che la vita media del mesone pesante è dell'ordine di 10^{-8} secondi. Inoltre, quando i mesoni pesanti vengono fermati nella materia solida, quelli positivi, respinti dai nuclei, si disintegrano, mentre quelli negativi sono catturati dai nuclei e producono complicati processi di esplosione nucleare. Una simile distinzione è stata anche osservata nel comportamento dei mesoni leggeri positivi e negativi. Anzi sono state proprio le ormai classiche esperienze effettuate a Roma da Pancini, Piccioni e Conversi nel 1946 sul decadimento dei mesoni leggeri negativi nella materia solida che hanno condotto a escludere che il mesone leggero potesse essere il quanto delle forze nucleari ».

La relazione del Socio Rasetti è salutata dai vivi applausi della Classe e il Presidente, dopo aver ringraziato l'oratore, si rende interprete dell'unanime desiderio dei Colleghi che la relazione stessa sia pubblicata nei Rendiconti accademici quale parte integrante del presente verbale.

Prega pertanto il Socio Rasetti di voler cortesemente presentare, a tal fine, una relazione scritta e il predetto Socio assicura che provvederà nel senso desiderato dal Presidente.

Il Presidente prega poi il Socio Beppo Levi di voler accennare all'attività da lui svolta in lunghi anni nel campo degli studi matematici in Argentina.

Il Socio Levi, per aderire al desiderio del Presidente, illustra brevemente un suo libro dal titolo « Leggendo Euclide », scritto in lingua spagnola, nel quale l'Autore, sulla scorta di alcuni dialoghi di Platone, formula l'ipotesi che Euclide abbia potuto far parte della scuola di Platone e sia quindi vissuto quasi un secolo prima dell'epoca in cui la tradizione ritiene siano stati composti gli « Elementi ».

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta dell'8 gennaio 1949

AZIENDA MINERALI METALLICI ITALIANI. — *Metalli non ferrosi e ferroleghe.* Statistiche 1948. Roma, Failli, 1948.

BORTOLOTTI Enea. — Vedi: CANDIDO Giacomo.

CANDIDO Giacomo. — *Scritti matematici di Giacomo Candido* (con cenno biografico di R. D'Ambrosio e ritratto) raccolti e ordinati per incarico del figlio Francesco dai proff. Enea Bortolotti ed Enrico Nannei. (Ed. fuori commercio). Firenze, Casa Ed. Marzocco, 1948. Pp. XV-802, in-8°.

NANNEI Enrico. – Vedi: CANDIDO Giacomo.

SILVESTRI Filippo. — *Descriptio novi Japygidae (Insecta; Diplura) in Angola reperti.* Lisboa, 1948. Pp. 7, in-4°. (Companhia de diamantes de Angola (Diamang). Serviços Culturais).

SILVESTRI Francesco. — *Diplopodum Penicillitorum (Arthropoda-Myriopoda) specierum novarum descriptio.* Lisboa, 1948. Pp. 10, in-4°. (Companhia de diamantes de Angola (Diamang). Serviços Culturais).

— *Sur les Japygidae (Insecta, Diplura) de Belgique.* Estr. da « Bull. et Ann. Soc. Entom. de Belgique », LXXXIV, 9–10, 1948.

— *Nuove specie di « Lophoproctidae » del Messico e del Perù.* Estr. da « Bollettino del Laboratorio di Entomologia Agraria di Portici », vol. IX, 1948.

VINCENT Maxime. — *La force atomique.* — La désintégration de l'atome n'est qu'une illusion, et la bombe atomique, qu'une force. 2me éd. Paris, Fischbacher, 1948. Pp. 40, in-16°.

U. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 12 febbraio 1949

Presidenza del Socio G. CASTELNUOVO

NOTE DI SOCI

Geometria. — *Sulle corrispondenze puntuali fra spazi proiettivi.* Nota (*) del Socio E. BOMPIANI.

1. INTRODUZIONE. – Le proprietà di una corrispondenza puntuale fra due spazi negli intorni dei primi ordini (≤ 3) di una coppia di punti regolari (cioè tali che la proiettività fra i fasci o le stelle di rette corrispondenti per esse, determinata dalla corrispondenza, non sia degenere) sono state ormai largamente studiate.

Tuttavia non mi pare inutile aggiungere qualche nuova idea geometrica, che potrà giovare anche in altri casi.

In questa Nota approfondisco alcune corrispondenze subordinate dalla corrispondenza data e relative all'intorno del 2° ordine: come spesso accade in quest'ordine di ricerche, enti che *a priori* sembrerebbero dipendere da determinati elementi (che intervengono nella costruzione) risultano in effetti largamente indipendenti da questi.

In una Nota successiva darò nuovi procedimenti atti a trovare gli invarianti del 3° ordine e altri risultati relativi particolarmente alle corrispondenze fra piani.

2. CORRISPONDENZE FRA PUNTEGGIATE TANGENTI AD ELEMENTI CORRISPONDENTI. – Si consideri una corrispondenza puntuale fra due piani proiettivi π e $\overline{\pi}$ nella quale si corrispondano le origini $O, \overline{O}$, non appartenenti alle Jacobiane.

La corrispondenza fino all'intorno del 2° ordine può sempre rappresentarsi con le equazioni

$$\begin{cases} \overline{x} = x + \varphi_2(x, y) + \cdots \\ \overline{y} = x + \psi_2(x, y) + \cdots . \end{cases} \tag{2.1}$$

(*) Presentata nella seduta dell'8 gennaio 1949.

Consideriamo ora un E_2 di origine O, $y = mx + px^2$ e proiettiamolo sulla sua tangente dal punto $P_0(x_0, y_0)$ non appartenente alla tangente. La corrispondenza fra la x di un punto di E_2 e la X del punto proiezione da P_0 sulla tangente è data da

$$X = x - \frac{p}{k-m}x^2 + \cdots \qquad (k \neq m) \tag{2.2}$$

ove $k = y_0 / x_0$: cioè, detta corrispondenza dipende *soltanto* dalla retta OP_0 e non dalla posizione di P_0 su di essa.

Per effetto della corrispondenza all'E_2 considerato corrisponde l'$\overline{E}_2$ di origine $\overline{O}$, $\bar{y} = m\bar{x} + \bar{p}\bar{x}^2$ con

$$p - \bar{p} = m\varphi_2(1, m) - \psi_2(1, m). \tag{2.3}$$

Pure per la corrispondenza, e precisamente per la proiettività da essa determinata fra i due fasci di centri O, $\overline{O}$, la retta $y = kx$ si muta nella $\bar{y} = k\bar{x}$ e la proiezione dell'$\overline{E}_2$ da un punto di questa retta sulla relativa tangente dà luogo alla corrispondenza analoga alla (2.2)

$$\overline{X} = \bar{x} - \frac{\bar{p}}{k-m}\bar{x}^2 + \cdots. \tag{2.4}$$

Ma sugli E_2, $\overline{E}_2$ corrispondenti si ha

$$\bar{x} = x + \varphi_2(1, m)x^2 + \cdots \tag{2.5}$$

quindi

$$\overline{X} = x + \left\{\varphi_2(1, m) - \frac{\bar{p}}{k-m}\right\}x^2 + \cdots. \tag{2.6}$$

Eliminando x fra (2.6) e (2.2), si ha

$$\overline{X} = X + \left\{\varphi_2(1, m) + \frac{p - \bar{p}}{k-m}\right\}X^2 + \cdots$$

cioè, per la (2.3)

$$\overline{X} = X + \frac{k\varphi_2(1, m) - \psi_2(1, m)}{k-m}X^2 + \cdots.$$

La corrispondenza così stabilita tra le due tangenti corrispondenti (fino al 2° ordine) equivale (fino allo stesso ordine) alla proiettività

$$\overline{X} = \frac{X}{1 - \dfrac{k\varphi_2(1, m) - \psi_2(1, m)}{k-m}X}.$$

Questa proiettività dipende (in modo non simmetrico) da m e da k, ma *non* dipende affatto da p, cioè dal particolare E_2 considerato: cioè, non varia al variare di questo in un fascio (con quella tangente).

Essa dipende in generale da k e non ne dipende se e solo se

$$m\varphi_2(1, m) - \psi_2(1, m) = 0$$

cioè, se e solo se la tangente all'E_2 dato è una delle tangenti inflessionali. Si ha quindi:

Assegnata una corrispondenza fra due piani e una coppia regolare di punti corrispondenti, un qualsiasi E_2 *avente tangente assegnata ed una retta per il suo*

centro determinano una proiettività fra la tangente all'E_2 *e la tangente corrispondente. Se e solo se la tangente considerata è inflessionale, detta proiettività non dipende affatto dalla retta (diversa dalla tangente) per il centro di* E_2.

In quest'ultimo caso la proiettività è quella detta dal Villa caratteristica (e considerata solo per l'E_2 inflessionale). In ogni caso essa dipende dall'intorno del 2° ordine della coppia data $(O, \overline{O})$ nella trasformazione.

3. PROIETTIVITÀ FRA PIANI INDIVIDUATA DA UNA COPPIA DI RETTE. – Se si scambia l'ufficio delle due rette, cioè di m e k, si ottiene una proiettività fra la retta $y = kx$ e la sua corrispondente.

Le proiettività fra le due rette uscenti da O e le loro corrispondenti determinano una proiettività fra i due piani.

Un calcolo elementare mostra che questa proiettività ha, in coordinate omogenee, le equazioni

$$\overline{X} = (k - m)^2 X \quad , \quad \overline{Y} = (k - m)^2 Y$$

$$\overline{Z} = \{k^2 \varphi_2(1, m) + m^2 \varphi_2(1, k) - k\psi_2(1, m) - m\psi_2(1; k)\} X$$
$$+ \{k\varphi_2(1, m) + m\ \varphi_2(1, k) - \psi_2(1, m) - \psi_2(1, k) Y + (k - m)\} Z^2.$$

Esse risultano, come devono essere, simmetriche rispetto a k ed m.

In particolare la proiettività associata dalla corrispondenza alla coppia degli assi (che sono due rette qualsiansi) è (posto $\varphi_2 = a_{11} x^2 + \cdots$, $\psi_2 = b_{22} y^2 + \cdots$)

$$\overline{X} = X \quad , \quad \overline{Y} = Y \quad , \quad \overline{Z} = a_{11} X - b_{22} Y + Z;$$

e perciò se nei due piani si assumono come rette « improprie » due rette corrispondenti in detta proiettività dev'essere $a_{11} = b_{22} = 0$. Sicchè:

Ad ogni coppia di rette uscenti da un punto è associata una proiettività fra i due piani determinata dall'intorno del 2° ordine del punto nella corrispondenza.

Riferito uno dei piani ad un sistema proiettivo arbitrario in cui le due rette siano lati del triangolo fondamentale, e l'altro piano al sistema che ha per elementi del riferimento i corrispondenti a quelli del primo nella proiettività individuata dalla coppia di rette, le equazioni della corrispondenza sono del tipo

$$\bar{x} = x + y(a_{12} x + a_{22} y) + \cdots \quad , \quad \bar{y} = y + x(b_{11} x + b_{12} y) + \cdots .$$

4. CORRISPONDENZE FRA S_n. – I risultati precedenti si estendono subito ad una corrispondenza fra due spazi S_n, $\overline{S}_n$ nei quali O ed $\overline{O}$ sia una coppia di punti corrispondenti regolare (cioè, in cui la proiettività fra le stelle di rette di centri O ed $\overline{O}$ sia non degenere).

Assumiamo come coordinate proiettive non omogenee in S_n $(x^1, x^2, \cdots, x^{n-1}, z)$ ossia (x^i, z), $i = 1, \cdots, n - 1$; e le analoghe sopralineate in $\overline{S}_n$. Nell'intorno dei due punti O, $\overline{O}$ le equazioni della corrispondenza si siano ridotte, come si può, alla forma

$$(4.1) \qquad \begin{cases} \bar{x}^i = x^i + \xi^i(x, z) + \cdots \\ \bar{z} = z + \zeta(x, z) + \cdots \end{cases} \qquad i = 1, \cdots, n - 1$$

essendo ξ e ζ forme del 2° ordine nelle variabili x^i, z.

Si consideri un E_2 di equazioni

$$x^i = l^i z + p^i z^2 + \cdots \tag{4.2}$$

e se ne proietti il punto generico da un S_{n-2} assegnato a piacere sulla tangente ad E_2 ($x^i = l^i z$). Indicheremo con Z l'ultima coordinata del punto proiezione (e con z quella del punto su E_2); fra Z e z si ha una relazione del tipo

$$Z = z + \rho z^2 , \tag{4.3}$$

ove ρ dipende naturalmente dal centro di proiezione S_{n-2}.

Se per esempio s'individua questo centro con i punti $(\underset{\alpha}{x^i}, \underset{\alpha}{z})$, $\alpha = 1, \cdots, n-1$ e se essi insieme ad O individuano l'iperpiano $a_i x^i + a z = 0$, un facile calcolo mostra che è

$$\rho = \frac{a_i p^i}{a_i l^i + a} . \tag{4.4}$$

L'elemento $\bar{E}_2$ trasformato di E_2 per le (4.1) sia

$$\bar{x}^i = \bar{l}^i \bar{z} + \bar{p}^i \bar{z}^2 + \cdots ; \tag{4.5}$$

è $\bar{l}^i = l^i$ e

$$p^i - \bar{p}^i = l^i \zeta(l) - \xi^i(l) \tag{4.6}$$

ove

$$\zeta(l) \equiv \zeta(l^1, \cdots, l^{n-1}, 1) \quad , \quad \xi^i(l) = \xi^i(l^1, \cdots, l^{n-1}, 1) .$$

La proiezione di un punto dell'$\bar{E}_2$ (4.5) da un $\bar{S}_{n-2}$ dello $\bar{S}_{n-1}$ corrispondente (nella proiettività fra gli intorni del 1° ordine) allo S_{n-1} $a_i x^i + a z = 0$ (ed avente l'equazione $a_i \bar{x}^i + a \bar{z} = 0$) sulla sua tangente dà luogo ad una relazione analoga alla (4.3)

$$\bar{Z} = \bar{z} + \bar{\rho} \bar{z}^2 . \tag{4.7}$$

Se ora si tiene conto del fatto che il legame fra z e $\bar{z}$ posto dalla corrispondenza data fra i due E_2 è

$$\bar{z} = z + \zeta(l) z^2 \tag{4.8}$$

la (4.7) si riscrive

$$\bar{Z} = z + \{ \zeta(l) + \bar{\rho} \} z^2$$

e per la (4.3)

$$\bar{Z} = Z + \{ \zeta(l) + \bar{\rho} - \rho \} Z^2 .$$

Ma per le (4.4) e (4.6)

$$\bar{\rho} - \rho = \frac{a_i (\bar{p}^i - p^i)}{a_i l^i + a} = \frac{- a_i l^i \zeta(l) + a_i \xi^i(l)}{a_i l^i + a}$$

e

$$\zeta(l) + \bar{\rho} - \rho = \frac{a_i \xi^i(l) + a \zeta(l)}{a_i l^i + a} .$$

La corrispondenza determinata dall'S_{n-1} per O sulle due tangenti agli $E_2, \overline{E}_2$ corrispondenti coincide fino all'intorno del 2° ordine con la proiettività

$$\overline{Z} = \frac{Z}{1 - \dfrac{a_i \xi^i(l) + a\zeta(l)}{a_i l^i + a} Z}.$$

Questa proiettività non dipende affatto dall'E_2 considerato, ma solo dalla sua tangente (e da S_{n-1}).

5. PROIETTIVITÀ FRA SPAZI S_n DETERMINATA DA n RETTE PER UN PUNTO. – Si considerino ora n rette uscenti da O, linearmente indipendenti. Lo S_{n-1} di $n-1$ qualsiansi di esse determina nel modo ora detto una proiettività fra la retta rimanente e la sua corrispondente in $\overline{S}_n$. Al variare della $(n-1)$-pla di rette si hanno n proiettività fra n coppie di rette corrispondenti (e in tutte ad O corrisponde $\overline{O}$).

Queste n proiettività determinano una collineazione fra i due spazî dipendente dalle n rette date e dall'intorno del 2° ordine della corrispondenza.

Mettiamo il risultato nella forma migliore, cioè in modo che nessuna delle coordinate sia privilegiata rispetto alle altre (come era la z rispetto alle x^i; il che conveniva quando si doveva rappresentare un E_2, per non introdurre su di esso un parametro arbitrario: ora che si è visto che per la proiettività in esame l'E_2 non ha interesse, ma solo la sua tangente, conviene adottare una notazione uniforme per tutte le coordinate). Siano perciò x^i, $i = 1, \cdots, n$, le n coordinate proiettive non omogenee, nulle in O; e le n rette per O siano rappresentate dalle equazioni

$$\frac{x^1}{\overset{\sigma}{l^1}} = \cdots = \frac{x^i}{\overset{\sigma}{l^i}} = \cdots = \frac{x^n}{\overset{\sigma}{l^n}} \qquad \sigma = 1, \cdots, n$$

con la condizione

$$\Delta = \text{Det.} \overset{\sigma}{l^i} \neq 0;$$

indicheremo poi con $\overset{\sigma}{l_i}$ gli *elementi reciproci* delle $\overset{\sigma}{l^i}$ in Δ (cioè i valori dei complementi algebrici delle $\overset{\sigma}{l^i}$ in Δ divisi per Δ).

Inoltre le equazioni della corrispondenza siano

$$\overline{x}^i = x^i + \xi^i(x) + \cdots \qquad i = 1, \cdots, n$$

ove $\xi^i(x) = \xi^i(x^1, \cdots, x^n)$ sono *forme* di 2° grado nelle variabili indicate. Ci occorrerà avere una notazione per il valore di ξ^i quando al posto delle x^i si sostituiscano le $\overset{\sigma}{l^i}$ e porremo $\overset{\sigma}{\xi^i} = \xi^i(\overset{\sigma}{l^1}, \cdots, \overset{\sigma}{l^n})$; così indicheremo con Δ_σ il valore di Δ quando al posto degli elementi della σ-esima riga $\overset{\sigma}{l^i}$ si sostituiscano le $\overset{\sigma}{\xi^i}$.

Con queste notazioni, la proiettività fra S_n ed $\overline{S}_n$ determinata dalla n-pla di rette per O attraverso la costruzione precedente è rappresentata dalle equazioni

$$X^i \frac{X^i}{1 - \alpha_j X^j} \qquad i, j = 1, \cdots, n$$

ove

$$\alpha_j = \overset{\sigma}{l}_j \overset{\sigma}{l}_k \overset{\sigma}{\xi}^h = \frac{1}{\Delta} \Delta_\sigma \overset{\sigma}{l}_j .$$

Queste sono le equazioni della proiettività associata dalla corrispondenza data (fino all'intorno del 2° ordine di O) ad una n-pla di rette (indipendenti) per O.

5. Corrispondenza fra iperpiani corrispondenti determinata da una retta. – Un'altra estensione delle considerazioni fatte nel piano è possibile passando agli spazi a più di due dimensioni. Ritorniamo perciò alle coordinate non omogenee (x^i, z), $i = 1, \cdots, n-1$, in S_n e consideriamo la *calotta d'iper-superficie* σ_2 definita da

$$z = a_i x^i + \varphi_2(x) + \cdots \qquad i = 1, \cdots, n-1 \tag{5.1}$$

ove $\varphi_2(x)$ è una forma di 2° grado nelle x^i.

Si proietti questa calotta dal punto $P_0 (\overset{0}{x}{}^i, \overset{0}{z})$ sullo S_{n-1} tangente in O: fra le coordinate x^i di un punto della calotta e le coordinate X^i della sua proiezione sull'S_{n-1} tangente valgono le relazioni

$$X^i = x^i - l^i \varphi_2(x) + \cdots \tag{5.2}$$

ove

$$l^i = \overset{0}{x}{}^i / \overset{0}{z} . \tag{5.3}$$

Consideriamo ora una corrispondenza fra i due spazi $S_n, \bar{S}_n$ in cui si corrispondono i punti (regolari per la corrispondenza) O ed $\bar{O}$ e le cui equazioni possono sempre scriversi (disponendo della proiettività fra le stelle di centri O ed $\bar{O}$)

$$\begin{cases} \bar{x}^i = x^i + \xi_2^i(x) + z\,\xi_1^i(x) + z^2 \xi_0^i + \cdots \\ \bar{z} = z + \zeta_2(x) + z\,\zeta_1(x) + z^2 \zeta_0 + \cdots . \end{cases} \tag{5.4}$$

Per effetto di essa, la calotta σ_2 si muta nella calotta $\bar{\sigma}_2$

$$\bar{z} = \bar{a}_i \bar{x}^i + \bar{\varphi}_2(\bar{x}) + \cdots \tag{5.5}$$

ove $\bar{a}_i = a_i$ e

$$\varphi_2(x) - \bar{\varphi}_2(\bar{x}) = a_i \xi_2^i - \zeta_2 + a_j x^j (a_i \xi_1^i - \zeta_1) + (a_j x^j)^2 (a_i \xi_0^i - \zeta_0) \tag{5.6}$$

ove le funzioni nei secondi membri s'intendono scritte nelle variabili x.

La proiezione della calotta (5.5) sull'iperpiano ad essa tangente in O da un punto della retta corrispondente a quella caratterizzata dalle l^i (e quindi caratterizzata *anche* nello spazio $\bar{S}_n$ dalle *stesse* l^i), dà luogo alla corrispondenza, analoga alla (5.2),

$$\bar{X}^i = \bar{x}^i - l^i \bar{\varphi}_2(\bar{x}) + \cdots . \tag{5.7}$$

Tenuto conto della (5.2) stessa e delle (5.4)

$$(5.8)\quad \begin{cases} \bar{X}^i - X^i = \bar{x}^i - x^i + l^i(\varphi_2(x) - \varphi_2(\bar{x})) \\ \qquad = \xi_2^i + l^i(a_j\xi_2^j - \zeta_2) + a_j X^j\{\xi_1^i + l^i(a_j\xi_1^j - \zeta_1)\} + \\ \qquad + (a_j X^j)^2\{\xi_0^i + l^i(a_j\xi_0^j - \zeta_0)\} \end{cases}$$

ove le funzioni nei secondi membri s'intendono scritte nelle variabili X^i.

Le (5.8) rappresentano la corrispondenza fra gli S_{n-1} tangenti alle due calotte determinata dalla retta assegnata per O: la corrispondenza *non* dipende dalla calotta σ_2 ma soltanto dall'interpiano tangente e dalla retta.

Geometria algebrica. — *Su una particolare varietà a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche.* Nota (*) del Socio GINO FANO.

1. Ho incontrato recentemente una varietà a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche, che naturalmente appartiene alla serie delle M_7^{2p-2} di S_{p+1} (qui $p = 12$), oggetto di mie ricerche in quest'ultimo periodo (1), ma non ha finora richiamata particolare attenzione. Ne darò qui un breve cenno.

Consideriamo nello spazio S_5 una rigata razionale normale R^4 (non cono), che per semplicità supponiamo del tipo più generale, cioè con ∞^1 coniche direttrici irriducibili; e con essa la varietà ∞^4 delle sue corde. Quale ne è l'immagine M_4 nella Grassmanniana M_8^{14} di S_{14} (2) delle rette di S_5 (3)?

Determiniamo anzitutto l'ordine di questa M_4, ad esempio l'ordine della superficie sua intersezione con un S_{12}, vale a dire della ∞^2 di rette comune alla ∞^4 suddetta e a due complessi lineari. Valendoci di due complessi costituiti risp. dalle rette incidenti a due S_3, questi ultimi contenuti in un $S_4 \equiv \sigma$ e aventi perciò a comune un piano π, la ∞^2 di rette in parola si spezzerà nei due sistemi delle corde di R^4 contenute in σ e di quelle incidenti al piano π. Le prime sono le ∞^2 corde di una C^4 razionale normale, e nella Grassmanniana delle rette di σ hanno per immagine una superficie φ^9 di S_9 di Del Pezzo (4). Della seconda ∞^2 prendiamo l'intersezione con un ulteriore complesso lineare, anche con un $S_3 \equiv \tau$ direttore incontrante π in una retta. Si ha una rigata composta di una parte luogo delle corde di R^4 contenute nello spazio $S_4 \equiv \tau\pi$ e incidenti a π, la cui imma-

(*) Presentata nella seduta dell'8 gennaio 1949.

(1) Più specialmente nella Memoria: *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche.* « Mem. Acc. d'Italia », classe sc. fis., vol. VIII (1937), n. 2.

(2) F. SEVERI, *Sulla varietà che rappresenta gli spazi subordinati* ... « Ann. di Matem. » (3) vol. 24 p. 89 (1915).

(3) Questione analoga per le rigate razionali normali di ordine inferiore: le corde di una quadrica di S_3 costituiscono la totalità delle rette di questo spazio, cioè una M_4^2 di S_5. Il sistema delle corde di una R^3 di S_4 è una M_4^9 di S_9 a curve-sezioni di genere 3, la cui superficie-sezione generica è rappresentata sul piano da un sistema lineare di quartiche con 7 punti base.

(4) Questa ∞^2 contiene infatti una rete omaloidica di rigate cubiche, generate dalle involuzioni di 2° ordine sulla C^4, e tutte irriducibili.

gine è sezione iperpiana di altra φ^9 di Del Pezzo; e di una seconda parte luogo delle corde incidenti alla retta $\tau\pi$. Quest'ultima rigata è di 4° ordine, avendo la retta $\tau\pi$ come direttrice semplice, e 3 generatrici in ogni S_4 per essa (poichè la proiezione della rigata dalla retta $\tau\pi$ ha una cubica doppia). Complessivamente la superficie immagine delle corde di R^4 appoggiate a un piano è dunque di ordine $9 + 4 = 13$ (5); e la M_4 immagine del sistema di tutte le corde di R^4 è di ordine $9 + 13 = 22$ (6). Le due superficie φ^9 e F^{13}, costituenti insieme una sezione superficiale della M_4^{22}, hanno a comune una curva sezione iperpiana della φ^9 (collo spazio σ), perciò ellittica, di ordine 9; la M_4^{22} ha quindi superficie-sezioni di genere uno, e curve-sezioni canoniche di genere 12 (appunto $= 1 + 3 + 9 - 1$). Le sezioni iperpiane della M_4^{22} sono pertanto M_3^{22} di S_{13}, corrispondenti al tipo generale M_3^{2p-2} di S_{p+3} per $p = 12$, e razionali (come risulterà pure dai sistemi lineari di superficie che vi sono contenuti). Indicheremo d'ora in poi questa varietà con μ_3^{22}, o semplicemente μ; essa è l'immagine del sistema ∞^3 di rette Σ intersezione della ∞^4 delle corde di R^4 con un complesso lineare $\mathbf{K}$ (che si supporrà per ora del tipo più generale, e in posizione generica rispetto a R^4).

2. Poichè per le ricerche della mia Memoria citata è importante la considerazione delle rigate contenute nella M_3^{2p-2}, vediamo quali rigate siano contenute in μ.

La varietà delle corde di R^4 contiene gli interi piani rigati delle sue ∞^1 coniche direttrici; e il complesso $\mathbf{K}$ sega questi secondo ∞^1 fasci di rette, aventi per immagini su μ le generatrici di una rigata. La M_3^3 di S_5 luogo di quegli ∞^1 piani ha come rigate direttrici minime ∞^2 quadriche; perciò sulla Grassmanniana delle rette di S_5 l'immagine di quegli ∞^1 piani rigati è anche una ∞^1 di piani, con ∞^2 coniche direttrici irriducibili, perciò una varietà del 6° ordine di S_8; e la ∞^1 di fasci suindicata – sistema ∞^2 di rette, che indicheremo con $\mathbf{R}$ – avrà per immagine una rigata razionale normale ρ^6 di S_7, con ∞^1 cubiche direttrici. Il sistema $\mathbf{R}$ deve avere a comune 6 rette con una coppia di complessi lineari, per esempio con due complessi aventi di nuovo spazi S_5 direttori contenuti in un $S_4 \equiv \sigma$ e intersecantisi in un piano π. Questo piano incontra la M_3^3 contenente R^4 in 3 punti, e perciò ad esso si appoggiano 3 rette di $\mathbf{R}$; le altre 3 staranno nello spazio σ, vale a dire la linea luogo dei centri degli ∞^1 fasci di rette contenuti in $\mathbf{R}$ sarà una cubica γ^3, direttrice della M_3^3.

(5) È una F^{13} di S_{11} a sezioni di genere 3, rappresentata sul piano da un sistema di quartiche con 3 punti base.

(6) A conferma di questo risultato, osserviamo che come una C^4 razionale normale può spezzarsi con continuità in 4 rette, di cui ciascuna, in ordine determinato, incidente alla consecutiva (F. Severi, *Vorlesungen über algebraische Geometrie*, traduz. Löffler, Teubner 1921; p. 366), così la R^4 può farsi spezzare in 4 piani $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, dei quali ciascuno dei primi 3 incontri il successivo in una retta. Il sistema delle corde di R^4 si spezza allora nei 6 sistemi delle rette incidenti a due di questi piani; dei quali sistemi tre ($\alpha_1\alpha_2, \alpha_2\alpha_3, \alpha_3\alpha_4$) sono di ordine 2; due ($\alpha_1\alpha_3, \alpha_2\alpha_4$) di ordine 5; e $\alpha_1\alpha_4$ di ordine 6 (è una M_4^6 di C. Segre, rappresentante le coppie di punti di due piani). E $2.3 + 5.2 + 6 = 22$.

Altri fasci di rette contenuti nel sistema Σ, e per conseguenza rette e superficie rigate contenute in μ, possono provenire soltanto dalla proiezione dei punti di una generatrice di R^4 da un punto ulteriore di questa rigata (di che il fascio delle tangenti di R^4 in un suo punto è caso limite). Osserviamo inoltre che due generatrici qualunque di R^4 stanno in uno spazio S_3, e sono ivi direttrici di una congruenza lineare di corde, incontrata dal complesso **K** in una rigata quadrica, eventualmente spezzata in due fasci del tipo testè indicato. Per generatrici infinitamente vicine si ha una congruenza lineare speciale, luogo delle tangenti di R^4 nei punti di questa generatrice. Queste ∞^2 rigate quadriche contenute in Σ hanno per immagini su μ coniche di una congruenza di 1° ordine Γ; e tali coniche bisecano la rigata ρ^6, poichè ciascuna di quelle quadriche ha due generatrici nei piani della M_3^3 contenente R^4, generatrici appartenenti perciò al sistema **R**. Di quelle quadriche, ∞^1 si spezzano in coppie di fasci, e indicheremo con **S** l'insieme di questi ∞^1 fasci; e ∞^1 coniche della congruenza Γ si spezzano in due rette. L'insieme di queste rette sarà l'unica rigata, in generale irriducibile, contenuta in μ, all'infuori di ρ^6.

3. Gli iperpiani dello spazio S_{13} di μ passanti per ρ^6 incontrano ulteriormente μ in un sistema lineare ∞^5 di superficie F^{16}, razionali, a sezioni di genere 5 e iperellittiche, tali F^{16} essendo luoghi di ∞^1 coniche della congruenza Γ. Ad esempio lo spazio S_5 congiungente due generatrici g, g' di R^4 è direttore di un complesso lineare che contiene sempre il sistema di rette **R**; perciò l'intersezione ulteriore di questo complesso con Σ avrà anche per immagine una F^{16}. D'altra parte le rette di questo sistema ∞^2, corde di R^4 e non contenute generalmente nei piani delle sue coniche direttrici, non possono incontrare lo spazio gg' che in punti o di g o di g'; perciò questa F^{16} si spezzerà in due F^8, a sezioni di genere 2, pure appartenenti alla congruenza Γ. Queste F^8, in altri termini, sono immagini dei sistemi ∞^2 di rette contenuti in Σ e costituiti dalle rigate quadriche aventi per direttrici g, oppure g', e un'altra generatrice variabile di R^4, cioè le coppie di rette di un'involuzione parabolica su R^4. E, più generalmente, tutti i sistemi di ∞^1 rigate quadriche aventi per direttrici le coppie di generatrici di una qualsiasi involuzione su R^4 avranno per immagini superficie F^8 di spazi S_7 di una rete, incontranti ρ^6 in C^4 razionali normali, della quale rete F^{16} è il sistema doppio.

Sopra ciascuna F^8, 4 fra le coniche della congruenza Γ si spezzano in coppie di rette; e da ciò si trae facilmente che la linea luogo dei centri dei fasci di rette contenuti nel sistema **S** deve incontrare in 4 punti sia le generatrici che le coniche di R^4; è quindi una linea di ordine 12, e di genere virtuale 9, ma con 4 punti doppi nelle intersezioni di R^4 collo spazio S_3 di γ^3 e quindi con questa stessa curva (7), perciò di genere effettivo 5. Invero lo spazio S_4 polare di un punto di R^4 rispetto al complesso **K** incontra R^4 in una C^4 passante per questo punto;

(7) Le rette direttrici della M_3^3 contenente R^4 che passano pei punti di γ^3 costituiscono un'altra rigata di 4° ordine, avente a comune con R^4 quattro generatrici, che passano appunto per le intersezioni di γ^3 e R^4.

e le rette del sistema Σ uscenti da tale punto hanno per luogo il cono cubico che proietta questa C^4. Per ciascuno dei 4 punti in parola questo cono cubico comprende il fascio di rette del sistema **R** che ne esce, e perciò altri 2 fasci proiettanti generatrici di R^4, contenuti nel sistema **S**.

Gli ∞^1 fasci del sistema **S** hanno per immagini su μ le generatrici di una rigata ξ incontrante le F^5 e le F^{10} rispettivamente in 4 e 8 coniche riducibili; rigata perciò di ordine 32, appartenente al sistema lineare di superficie quadruplo di $|F^8|$ e doppio di $|F^{16}|$.

Sulla C^{12}, luogo dei centri dei fasci di rette contenuti nel sistema **S**, le coppie di punti centri di fasci costituenti quadriche riducibili formano un'involuzione δ_2^1; e le congiungenti di queste coppie di punti coniugati, raggi doppi di quelle coppie di fasci, formano una rigata di 8° ordine. Fra le generatrici di R^4 quest'involuzione determina una corrispondenza (4 , 4) simmetrica, le cui 8 generatrici doppie sono le 4 generatrici di R^4 appartenenti al complesso **K**, ciascuna contata due volte. Per ciascuna di queste generatrici la congruenza lineare speciale delle tangenti a R^4 nei singoli suoi punti è incontrata dal complesso **K** in una coppia di fasci del sistema **S**, i cui centri X_1 , X_2 sono coniugati nella δ_2^1. Gli S_4 polari dei punti di una di queste generatrici rispetto a **K** contengono tutti questa generatrice, e segano ulteriormente R^4 in cubiche, non passanti in generale per il punto considerato; tali cubiche formano un fascio con 2 punti base, e delle 4 generatrici che nella corrispondenza (4 , 4) corrispondono a quella considerata, due coincidono con questa, e le altre due passano pei due punti base suddetti. Sopra ciascuna delle stesse 4 generatrici i singoli punti corrispondono proiettivamente alle intersezioni colle cubiche segate dai relativi S_4 polari; punti uniti di questa corrispondenza sono X_1 , X_2 .

4. Sommando la rete $|F^8|$ e la rigata ρ^6, si ha un sistema lineare $|F^{14}|$, anche ∞^7 e a sezioni di genere 5, residuo a sua volta delle sezioni iperpiane di μ $(= \rho^6 + 2\,F^8)$ rispetto alla rete $|F^8|$. Il sistema lineare caratteristico di $|F^{14}|$ è pertanto la differenza fra il sistema delle sezioni iperpiane di una F^{14} e la rete ivi segata dalle F^8, composta di C_1^0, somme su F^8 delle coniche caratteristiche e della quartica $F^8 . \rho^6$; perciò di grado $14 + 2 - 2.6 = 4$. Il sistema $|F^{14}|$ è pertanto di grado 4, dimensione 5, a intersezioni ellittiche; riferibile perciò al sistema delle sezioni iperpiane di una M_5^4, intersezione di due quadriche di S_5, e al suo sistema rappresentativo su S_3, composto delle superficie di 3° ordine passanti per una C_2^5 (8).

Sommando ora alle sezioni iperpiane di μ $(= \rho^6 + 2\,F^8)$ una seconda volta la rigata ρ^6, si ha il sistema $2\,(\rho^6 + F^8)$, doppio del precedente $|F^{14}|$, riferibile perciò ai sistemi lineari doppi di quelli testè indicati. Esso rappresenta una M_7^{12}, ancora della serie M_7^{2p-2} di S_{p+1}, per $p = 17$, priva di rette (9), della quale μ è proiezione dallo spazio S_4 di una sua quartica razionale ε. I punti di ε hanno

(8) Enriques. « Mathem. Ann. », *46*, p. 179 (1895); Scorza, « Ann. di Matem. » (3) vol. 15, p. 217 (1908).

(9) Varietà compresa, per $n = 4$, tra quelle considerate a p. 46 della mia Mem. cit.

per immagini le generatrici di ρ^6; per ciascuno di quei punti passano 4 coniche della M_3^{32} che si proiettano in generatrici della rigata ξ^{32} di μ. Alle 4 coniche di M_3^{32} passanti per un suo punto generico corrispondono nella rappresentazione su S_3 le 4 corde della C_2^3 per un punto. Anche per un punto di μ passano 4 coniche di questa, più quella della congruenza Γ, che è proiezione di una quartica bisecante la ε.

5. Il sistema ∞^3 di rette Σ e la varietà μ che ne è immagine dànno luogo a qualche caso particolare, degno di menzione.

Il complesso lineare **K** può contenere la rigata R^4. Allora per tutte le generatrici di questa si verificherà quanto è detto alla fine del n. 3 per le 4 generatrici di R^4 contenute in **K**; vale a dire dei 4 fasci di rette del sistema **S** aventi i centri su ogni generatrice, due si comporranno di tangenti a R^4 nel punto stesso considerato, e gli altri due di rette proiettanti generatrici generalmente distinte da quella. Pertanto la curva C^{12} del caso generale si spezzerà in due γ_1^6 bisecanti sia le generatrici che le coniche di R^4, e luoghi rispett. di questi due tipi di punti. I 4 punti comuni alla cubica γ^3 e alla rigata R^4, in generale doppi per la C^{12}, sono ora comuni alle due γ_1^6. Da ciascuno di essi esce, nel piano della conica direttrice di R^4, un fascio di rette del sistema **R**; e il cono cubico del sistema Σ si spezza perciò in questo fascio e altri due del sistema **S**, rispett. dei due tipi di cui sono luoghi dei centri le due γ_1^6. Il sistema di fasci **S** si spezza pertanto in due ∞^1, una delle quali si compone di fasci di tangenti di R^4; la rigata ξ^{32} si spezza in due di ordine 16; e le ulteriori 4 intersezioni delle due γ_1^6 sono centri di altrettanti fasci **S** che, contati due volte, sono le coppie comuni alle due ∞^1. Invero, gli S_4 polari dei punti di una generatrice di R^4 contenente centri di questi fasci comuni dovranno segare ulteriormente R^4 in un fascio di cubiche coi 2 punti base tutti sulla generatrice stessa; e poichè tali cubiche sono direttrici di R^4, esse non potranno essere che tangenti fra loro in un punto.

Altro caso particolare interessante è quello in cui la cubica γ^3 sta sulla rigata R^4; e ciò può avvenire sia che il complesso **K** non contenga R^4, sia che la contenga. Invero, scelta la cubica γ^3 su R^4 e fissato così il sistema di rette **R**, per questo passano ∞^6 complessi lineari **K**, e ∞^1 fra questi contengono R^4. Il cono cubico di rette di Σ uscente da un punto di γ^3 si compone allora sempre (sia che **K** contenga o non contenga R^4) di un fascio del sistema **R** e di *due* fasci del sistema **S**; perciò la curva C^{12} del caso generale comprende la γ^3 contata due volte. Se la rigata R^4 non è contenuta nel complesso **K**, i due fasci del sistema **S** uscenti da un punto generico della cubica γ^3 proietteranno generatrici non passanti per questo punto; e la parte residua della C^{12}, oltre la γ^3 doppia, sarà una γ_1^6, generalmente irriducibile, che incontrerà γ^3 nei 4 punti di essa appartenenti alle generatrici di R^4 contenute in **K**, i quali saranno pure centri di fasci doppi comuni alle due ∞^1 in cui **S** si spezza. Le coppie dell'involuzione δ_2^1 appartenenti a γ^3 sono su di essa, come curva semplice, coppie di una corrispondenza (2, 2) simmetrica. La rigata ξ^{32} contenuta in μ si spezza ancora in due di ordine 16. Se invece R^4 è contenuta nel complesso **K**, lo spazio S_4 polare di un punto generico

di γ^3 rispetto a **K** incontra R^4 secondo la generatrice e la conica direttrice passanti per questo punto, più un'altra generatrice; e dei due fasci di rette del sistema S uscenti da questo punto, uno proietta quest'ultima generatrice, e l'altro si compone delle tangenti di R^4 in quel punto. Pertanto, con riferimento alla prima parte di questo numero e allo spezzamento della C^{12} luogo dei centri dei fasci del sistema S in due γ_1^6, la γ^3 doppia si compone ora di due curve sovrapposte, parti rispett. dell'una e dell'altra γ_1^5; e le parti residue di queste saranno altre due cubiche direttrici di R^4.

Equazioni differenziali. — *Sopra una classe di equazioni di Liénard prive di integrali periodici.* Nota (*) del Corrisp. GIOVANNI SANSONE.

1. *Sia $f(i)$ una funzione continua di i in $(-\infty, +\infty)$, la quale soddisfi le seguenti condizioni: esistono due numeri $\delta_{-1} < 0$, $\delta_1 > 0$ tali che*

$$(1_1) \qquad f(i) < 0 \quad \text{per} \quad \delta_{-1} < i < \delta_1,$$

$$(1_2) \qquad f(\delta_{-1}) = f(\delta_1) = 0,$$

$$(1_3) \qquad f(i) > 0 \quad \text{per} \quad i < \delta_{-1}, \quad \text{oppure per } i > \delta_1,$$

e posto

$$(2) \qquad F(i) = \int_0^i f(s)\, ds$$

risulti per $i \neq 0$

$$(3) \qquad i F(i) < 0.$$

In queste ipotesi, qualunque integrale $i(t)$ dell'equazione di Liénard

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \omega f(i) \frac{di}{dt} + \omega^2 i = 0,$$

dove ω è una costante positiva, risulta definito in $(-\infty, +\infty)$, e si ha

$$(5_1) \qquad \lim_{t \to -\infty} i(t) = \lim_{t \to -\infty} i'(t) = 0, \qquad (5_2) \qquad \overline{\lim_{t \to +\infty}}\, i(t) = +\infty, \quad \underline{\lim_{t \to -\infty}}\, i(t) = -\infty.$$

Inoltre l'integrale $i(t)$, quando $t \to +\infty$, diventa oscillante; la successione delle ordinate dei suoi massimi, e la successione dei valori assoluti delle ordinate dei suoi minimi, sono crescenti, e divergenti a $+\infty$.

L'equazione (4) non possiede quindi integrali periodici.

a) Per dimostrare il teorema enunciato procediamo per gradi; proviamo preliminarmente che *l'integrale $i(t)$ determinato dalle condizioni iniziali*

$$(6) \qquad i(t_0) = i_0 \quad , \quad i'(t_0) = i'_0 \quad , \quad (i_0^2 + i'^2_0 \neq 0),$$

ha a destra di t_0 per campo di esistenza $(t_0, +\infty)$.

(*) Presentata nella seduta dell'8 gennaio 1949.

Supponiamo per assurdo che l'estremo superiore $\bar{t}$ dei valori di t per i quali l'integrale $i(t)$ esiste, sia finito.

Poichè dalla (4) segue che gli zeri di $i'(t)$ sono punti estremanti per $i(t)$ e ne separano gli zeri, ed è pure noto che la distanza tra due zeri consecutivi di $i(t)$ non può essere inferiore a π/ω [1], se consideriamo un intorno $(\bar{t}-h, \bar{t}-0)$ appartenente a $(t_0, \bar{t})$ con $0 < h < \pi/\omega$, $i'(t)$ internamente a tale intervallo può avere due soli punti di zero, e non si altera la generalità a supporre $i'(t) \neq 0$ in $(\bar{t}-h, \bar{t}-0)$; ne segue che $i(t)$ è monotona in tale intervallo, ed esiste il limite

$$\lim_{t \to \bar{t}-0} i(t) = \bar{i}.$$

Supponiamo $\bar{i} = +\infty, [\bar{i} = -\infty]$, e si consideri la funzione

$$\mathrm{E}(t) = i^2 + \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{di}{dt}\right)^2; \tag{7}$$

si ha

$$\frac{d\mathrm{E}(t)}{dt} = 2i\frac{di}{dt} + \frac{2}{\omega^2}\frac{di}{dt}\frac{di^2}{dt^2} = -\frac{2}{\omega}f(i)\left(\frac{di}{dt}\right)^2, \tag{8}$$

e a motivo della (1_3), quando t è sufficientemente vicino a $\bar{t}$, $d\mathrm{E}(t)/dt \leq 0$, cioè $\mathrm{E}(t)$ diventa non crescente, perciò $i^2(t)$ limitata in $(\bar{t}-h, \bar{t}-0)$, ed allora è stato assurdo supporre $\lim_{t \to \bar{t}-0} i(t) = \pm\infty$.

Abbiamo dunque che $\bar{t}$ è finito.

Dalla (4) integrando tra t_0 e t, con $t_0 < t < \bar{t}$, si ha

$$i'(t) = i'_0 - \int_{i_0}^{i(t)} f(i)\,di - \omega^2 \int_{t_0}^{t} i\,dt, \tag{9}$$

perciò la $i'(t)$ si mantiene limitata in $(t_0, \bar{t}-0)$ e per la (4) anche $i''(t)$ si mantiene limitata; da ciò consegue che $\lim_{t \to \bar{t}-0} i'(t) = \bar{i}'$ finito, ma allora l'integrale della (4) che in $\bar{t}$ soddisfa le condizioni iniziali $i(\bar{t}) = \bar{i}$, $i'(\bar{t}) = \bar{i}'$ effettua il prolungamento a destra dell'integrale $i(t)$ considerato, il quale possiede quindi un campo di esistenza più ampio dell'intervallo $(t_0, \bar{t})$, e siamo così caduti in assurdo.

b) Proviamo che *l'integrale $i(t)$ individuato dalle condizioni iniziali* (6), *è pure definito in* $(-\infty, t_0)$.

Si ha infatti per la (4) e la (3)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[i^2 + \left\{\frac{i'}{\omega} + \mathrm{F}(i)\right\}^2\right] = i\,i' + \left\{\frac{i'}{\omega} + \mathrm{F}(i)\right\}(-\omega i) = -\omega\,\mathrm{F}(i)\,i > 0, \tag{10}$$

(1) Cfr. D. GRAFFI, *Sopra alcune equazioni differenziali della radiotecnica.* « Mem. della R. Acc. delle Sc. dell'Istituto di Bologna », (9), 9, (1942) (pp. 83–91), pp. 83–84.

e perciò *la funzione* $E^*(t)$ [proporzionale all'energia dissipata dal sistema]

$$(10_2) \qquad E^*(t) = i^2 + \left\{ \frac{i'}{\omega} + F(i) \right\}^2$$

è [*per la* (3)] *crescente con* t [2].

Sia allora $\bar{t}$ l'estremo inferiore dei valori di $t < t_0$ per i quali esiste (ed è unico) l'integrale $i(t)$ della (4) che soddisfa le condizioni iniziali (6), e sia per assurdo $\bar{t}$ finito. Essendo $E^*(t)$ decrescente con t decrescente, $i(t)$ è limitata in $(\bar{t}, t_0)$, e tale risulta $i'(t)$, esiste perciò finito il limite $\lim_{t \to \bar{t}+0} i(t)$, e di conseguenza è pure finito $\lim_{t \to \bar{t}+0} i'(t)$, a da ciò consegue che l'integrale $i(t)$ può prolungarsi a sinistra di $\bar{t}$, ed è dunque assurdo supporre $\bar{t}$ finito.

c) L'integrale $i(t)$ *è oscillante quando* $t \to +\infty$.

Basterà dimostrare che non può esistere un $\bar{t}$ tale che per $t \geqq \bar{t}$ riesca $i'(t) = 0$. In caso opposto $i(t)$ riuscirebbe monotona e possono presentarsi tre casi

$$\lim_{t \to +\infty} i(t) = +\infty \quad , \quad \lim_{t \to +\infty} i(t) = -\infty \quad , \quad \lim_{t \to +\infty} i(t) = \text{finito}.$$

Nel primo e nel secondo caso dalle (8) e (1_3) risulta che $E(t)$ diventa definitivamente decrescente e perciò $i(t)$ dovrebbe essere limitata, e resta da esaminare il caso $\lim_{t \to +\infty} i(t) = i_\infty$, con i_∞ finito.

Se $f(i_\infty) > 0$ dalla (8) si ha che $E(t)$ diventa definitivamente decrescente, e perciò per la (7) $\lim_{t \to +\infty} \frac{di}{dt}$ esiste, ed è necessariamente nullo; per la (4) esiste $\lim_{t \to +\infty} \frac{d^2 i}{dt^2}$ necessariamente pure nullo, allora $i_\infty = 0$, $f(0) > 0$, contro la (1_1).

Se $f(i_\infty) < 0$, dalla (8) si ha che $E(t)$ diventa definitivamente crescente, quindi per la (7) $\lim_{t \to +\infty} di/dt$ esiste ed è necessariamente nullo, e ancora per la (7) $i_\infty \neq 0$. Dalla (4) si ha poi che $\lim_{t \to +\infty} d^2 i/dt^2$ esiste ed è necessariamente nullo, quindi $i_\infty = 0$, mentre abbiamo osservato che è $i_\infty \neq 0$. Abbiamo dunque $f(i_\infty) = 0$.

Se $i_\infty > 0$ dalla (9) si avrebbe $\lim_{t \to +\infty} i'(t) = -\infty$ e ciò non può essere; se $i_\infty < 0$ si avrebbe ancora dalla (9) $\lim_{t \to +\infty} i'(t) = +\infty$ e ciò non può essere; sarà quindi $i_\infty = 0$, $f(0) = 0$ e ciò è contro la (1_1).

Abbiamo dunque che *nelle ipotesi dichiarate, quando* $t \to +\infty$, $i'(t)$ *si annulla infinite volte, e se* $\{t_n\}$ *è la successione dei suoi zeri dopo* t_0,

$$t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \cdots \quad ; \quad i'(t_n) = 0 \, , \qquad (n = 1, 2, \cdots),$$

(2) La funzione $E^*(t)$ è stata considerata da Liénard. Cfr. A. Liénard, *Étude des oscillatonis entretenues*. «Revue Général de l'Électricité», *23*, pp. 901–912, 946–954 (1928).

e $\{\tau_{n+1}\}$ *la successione degli zeri di* $i(t)$ *dopo* t_1

$$t_1 < \tau_2 < t_2 < \tau_3 < \cdots \quad ; \quad i(\tau_{n+1}) = 0 , \qquad (n = 1, 2, \cdots),$$

essendo per *b*) la funzione $E^*(t)$ crescente, si ha

$$i^2(t_1) + F^2[i(t_1)] < \frac{i'^2(\tau_2)}{\omega^2} < i^2(t_2) + F^2[i(t_2)] < \frac{i'^2(\tau_3)}{\omega^2} < \cdots$$

e ne viene

$$i'^2(\tau_2) < i'^2(\tau_3) < i'^2(\tau_4) < \cdots , \tag{11}$$

e perciò *la* (4) *non possiede integrali periodici.*

d) *Supponiamo che per* $t \to -\infty$, $i'(t)$ *diventi definitivamente non nulla*; $i(t)$ diventa allora definitivamente monotona, e siccome è limitata [per *b*) $E^*(t)$ è decrescente con t], esiste finito $\lim_{t\to-\infty} i(t)$, e per la ricordata decrescenza di $E^*(t)$ con t decrescente, esiste pure finito il $\lim_{t\to-\infty} i'(t) = C$, e poichè da $C < 0$ si avrebbe $\lim_{t\to-\infty} i(t) = +\infty$, e da $C > 0$ si avrebbe $\lim_{t\to-\infty} i(t) = -\infty$ ne viene $\lim_{t\to-\infty} i'(t) = 0$, e dalla (4) segue che esiste finito $\lim_{t\to-\infty} i''(t)$, e per il ragionamento prima fatto $\lim_{t\to-\infty} i''(t) = 0$, e allora $\lim_{t\to-\infty} i(t) = 0$, cioè *nell'ipotesi considerata valgono le* (5_1) [3].

e) Resta da considerare il caso che $i'(t)$ *sia oscillante per* $t \to -\infty$, e a questo scopo proviamo preliminarmente che *la successione dei massimi di* $i(t)$, *e la successione dei valori assoluti dei minimi di* $i(t)$ *formano due successioni monotone.* Basterà mostrare che se τ e $\bar\tau$ sono due zeri di $i(t)$,

$$i(\tau) = 0 \quad , \quad i(\bar\tau) = 0 \quad , \quad \tau < \bar\tau$$

e se $0 < i'(\tau) < i'(\bar\tau)$, indicati con t_1 e t_2 i due zeri di $i'(t)$ precedenti e seguenti τ, $\bar t_1$, $\bar t_2$ i due zeri di $i'(t)$ precedenti e seguenti $\bar\tau$, $t_1 < \tau < t_2 < \bar t_1 < \bar\tau < \bar t_2$, si ha allora

$$0 > i(t_1) > i(\bar t_1) \quad , \quad 0 < i(t_2) < i(\bar t_2) .$$

Si ponga infatti quando t varia in (t_1, t_2), o $(\bar t_1, \bar t_2)$ rispettivamente

$$di/dt = \omega u \quad , \quad di/dt = \omega \bar u ;$$

risulta $u > 0$, $\bar u > 0$,

$$\frac{du}{di} = \frac{1}{\omega}\frac{di'}{di} = \frac{i''}{\omega i'} = \frac{i''}{\omega^2 u} \quad , \quad i'' = \omega^2 u \frac{du}{di} ,$$

quindi

$$\frac{du}{di} = -f(i) - \frac{i}{u} \quad , \quad \frac{d\bar u}{di} = -f(i) - \frac{i}{\bar u} ,$$

(3) Per risultati conseguiti in una Nota precedente si verifica ad esempio questo caso se $f(0) < -2$, ed $f(i)$ è lipschitziana nel punto 0.

e perciò fino a quando i varia nel comune campo di esistenza di $u(i)$ e $\bar{u}(i)$

$$\frac{d(\bar{u}-u)}{di} \doteq i\frac{\bar{u}-u}{u\,\bar{u}}.$$

Per $i=0$ è $\bar{u}(0)-u(0)>0$, e siccome la differenza $\bar{u}(i)-u(i)$ non può mai annullarsi per il teorema di unicità relativo a quest'ultima equazione [chè in caso opposto ne seguirebbe $\bar{u}(0)-u(0)=0$], la differenza $\bar{u}(i)-u(i)$ si mantiene sempre positiva, e ove si avesse $i(\bar{t}_2)\leq i(t_2)$, $[i(\bar{t}_1)\geq i(t_1)]$ ne verrebbe l'assurdo $\bar{u}[i(\bar{t}_2)]-u[i(\bar{t}_2)]=-u[i(\bar{t}_2)]>0$, $[\bar{u}(i(\bar{t}_1))-u(i(\bar{t}_1))=$ $=-u(i(\bar{t}_1))>0]$.

Ciò premesso $\{\bar{t}_n\}$ indichi la successione degli zeri di $i'(t)$, disposti in ordine decrescente, e divergenti a $-\infty$, si abbia

$$i(\bar{t}_1)>i(\bar{t}_3)>\cdots>0 \quad , \quad i(\bar{t}_2)<i(\bar{t}_4)<\cdots<0;$$

proviamo che è

$$\lim_{n\to\infty} i(\bar{t}_{2n+1})=0 \quad , \quad \lim_{n\to\infty} i(\bar{t}_{2n})=0.$$

Si abbia per assurdo $\lim_{n\to+\infty} i(\bar{t}_{2n+1})=A>0$, e dimostriamo che l'integrale $\bar{i}(t)$ della (4) che soddisfa in un punto t_0^* le condizioni iniziali $\bar{i}(t_0^*)=A$, $\bar{i}'(t_0^*)=0$ è periodico [risultato impossibile per c)]. Non sia $\bar{i}(t)$ periodico, e nel massimo t_2^* di $\bar{i}(t)$ successivo a t_0^*, $t_0^*<t_2^*$, si abbia $\bar{i}(t_2^*)=B$ con $A-B\neq 0$. Poichè l'ordinata B è una funzione continua di A [4] si può determinare un numero positivo $d<A$, tale che se $|\bar{i}_0-A|<d$, l'integrale $\bar{\bar{i}}(t)$ determinato dalle condizioni iniziali $\bar{\bar{i}}(t_1^*)=\bar{i}_0$, $\bar{\bar{i}}'(t_1^*)=0$ [5] sia tale che il massimo successivo B^* soddisfi la limitazione $|B^*-B|<|A-B|/2$.

Si può ora trovare un n_0 tale che per $n>n_0$ sia $|i(\bar{t}_{2n-1})-A|<d$, e perciò per $n>n_0$ $|i(\bar{t}_{2n-1})-B|<|A-B|/2$, dalla quale se $B>A$, $i(\bar{t}_{2n-1})>$ $>B-\frac{B-A}{2}>A$, e se $B<A$, $i(\bar{t}_{2n-1})<B+\frac{A-B}{2}<A$, e in ogni caso il $\lim_{n\to\infty} i(\bar{t}_{2n-1})$ non sarebbe A, e ciò è contro l'ipotesi. Abbiamo così dimostrato che è $\lim_{n\to\infty} i(\bar{t}_{2n+1})=0$, e analogamente $\lim_{n\to\infty} i(\bar{t}_{2n})=0$ [6].

f) Con lo stesso ragionamento dell'ultima parte di *c*) si prova che se $\{t_n\}$ è la successione degli zeri di $i'(t)$ disposti in ordine crescente (divergente a $+\infty$),

$$0<i(t_1)<i(t_3)<\cdots \quad , \quad 0>i(t_2)>i(t_4)>\cdots$$

si ha $\lim_{n\to\infty} i(t_{2n+1})=+\infty$, $\lim_{n\to+\infty} i(t_{2n})=-\infty$, e il teorema enunciato è completamente dimostrato.

(4) Questo risultato è dimostrato quando $f(i)$ verifica le ipotesi (1_1), (1_2), (1_3) in un lavoro dell'A. in corso di pubblicazione.

(5) Non contenendo i coefficienti dell'equazione (4) la variabile t esplicitamente, t_1^* è un punto arbitrario.

(6) Per risultati conseguiti in una Nota precedente, si verifica questo caso se ad esempio $-2<f(0)<0$, ed $f(i)$ è lipschitziana nel punto 0.

Meccanica. — *Il Turboreattore d'alta quota.* Nota (*) del Socio G. A. Crocco.

In una precedente Nota (1) s'accenna alla necessità di un *superdimensionamento* nel problema del reattore d'alta quota. Ma i calcoli dimosttativi sono basati su due ipotesi di prima impostazione: e cioè che i rendimenti dei vari meccanismi costituenti il turboreattore siano eguali alla unità e che il suddetto superdimensionamento non venga ad alterare la resistenza precalcolata del velivolo. Ad attenuare le conseguenze di tali ipotesi si era provveduto, nelle precedenti Note, considerando un coefficiente di attrito dell'aria nell'interno dei condotti propulsivi; e di una capace fusoliera nel velivolo, che si presumeva equivalente all'ingombro generico dei propulsori.

La presente Nota ha ora lo scopo di sciogliere il problema da queste due ipotesi, sia introducendo opportuni coefficienti di rendimento nel calcolo delle *spinte* propulsive, sia esaminando separatamente l'influenza delle superdimensioni dei condotti propulsivi sulle resistenze al moto del velivolo. Con ciò si fa un passo innanzi dal reattore *ideale* a quello *reale*: e si penetra nel campo vasto e polimorfo della Meccanica Applicata.

Rendimenti di compressione e di espansione. – La nuova impostazione non abbandona tuttavia i concetti di ideale semplicità cui è ispirata la precedente; sempre nello scopo di conseguire una formulazione agevole ed espressiva. D'altra parte l'introduzione stessa dei rendimenti, di origine sperimentale, contamina col suo empirismo ogni rigore di analisi teorica. Sono state quindi adottate le seguenti approssimazioni.

Anzitutto si sono virtualmente raggruppati i singoli organi del turboreattore nei quali ha luogo un lavoro di compressione; e quelli ove si verifica un lavoro di espansione. Al complesso dei primi (diffusore e compressore) è stato attribuito un globale *rendimento di compressione*, η_c; che è stato preso eguale alla media dei rendimenti dei singoli organi; supposti inoltre per brevità eguali tra loro. Tale rendimento riguarda quindi il percorso dell'aria dalla bocca d'entrata, ove si comprime automaticamente per effetto della velocità di captazione, sino a quella zona della camera di combustione, che chiameremo brevemente *zona di ristagno*, ove l'aria, ulteriormente compressa per via meccanica, raggiunge la massima pressione e la minima velocità.

Analogamente sono stati virtualmente raggruppati gli organi di espansione, del reattore, cioè camera di combustione, turbina ed effusore, attribuendo al complesso un globale *rendimento di espansione*, η_t, cogli stessi criteri. Esso con-

(*) Presentata nella seduta del 12 febbraio 1949.

(1) G. A. Crocco, *Il superamento della velocità del suono in Aviazione.* Questi «Rendiconti», fasc. 2, 1947.

sidera quindi il successivo percorso del fluido dalla zona di ristagno sino alla finale uscita del getto nell'atmosfera ambiente.

In secondo luogo è stata conservata l'approssimazione che il fluido operante segua ovunque le leggi dei *gas perfetti*; e che d'altra parte si trascuri, nella valutazione della sua massa, la massa additiva del combustibile. I trattatisti fanno infatti osservare che queste due approssimazioni introducono errori di segno contrario, che si compensano nel calcolo: e conviene quindi giovarsi delle grandi semplificazioni che esse consentono.

In terzo luogo, sempre seguendo i recenti trattatisti, si sono supposte *nulle* le cadute di pressione, sia continue che localizzate, ritenendole conglobate nella opportuna scelta dei valori numerici dei due rendimenti η_c ed η_t: il che permette di usufruire nel calcolo delle semplici relazioni intercorrenti fra due trasformazioni isobariche ben definite.

In quarto luogo, sulla scia di alcuni trattatisti, si è ritenuto che nelle trasformazioni adiabatiche con attrito, il rendimento eguagli il rapporto tra il salto di temperatura isoentropico e quello reale, se si tratta di compressione: oppure il rapporto inverso se si tratta di espansione. L'approssimazione sta in questo: che così il rendimento viene espresso come rapporto di differenze di temperatura, anzichè di differenze di logaritmi di temperatura, secondo risulta dalle leggi delle trasformazioni politropiche. Così operando i risultati possono condensarsi in formule generali analitiche, anzichè diluirsi in particolari casistiche di diagrammi e di tabelle.

Diagramma entropico. – Sebbene le accennate espressioni del rendimento, sia lineari che logaritmiche, consentano di calcolare senz'altro i salti di temperatura in gioco, conviene tuttavia seguire tale calcolo attraverso un diagramma entropico. Sceglieremo il classico T — S (temperatura–entropia); rappresentato nella fig. 1; dove il quadrilatero curvilineo $T_0 T_2 T_3 T_5$ mostra il ciclo termico *reale* di un turboreattore, il cui quarto lato $T_5 T_0$ si svolge fuori dal meccanismo. Nella stessa figura il quadrilatero $T_0 T_2' T_3 T_5'$, formato da due isoentropiche e da due isobare, rappresenta invece il ciclo *ideale*, quale considerato nelle Note precedenti; e vi si trovano rappresentati due altri cicli, di cui appresso.

L'ipotesi quarta può essere ora formulata come segue, nella forma lineare da noi adottata:

$$(1) \qquad \eta_c = \frac{T_2' - T_0}{T_2 - T_0} \quad ; \quad \eta_t = \frac{T_3 - T_5}{T_3 - T_5'} ;$$

e messa a confronto colla forma logaritmica, che non seguiremo:

$$(2) \qquad \eta_c = \frac{\log T_2' - \log T_0}{\log T_2 - \log T_0} \quad ; \quad \eta_t = \frac{\log T_3 - \log T_5}{\log T_3 - \log T_5'} .$$

Ne segue, adottando le (1), che le trasformazioni $T_0 T_2$ e $T_5' T_5$ non risultano *politropiche*, cioè non seguono la relazione $p v^n =$ costante con n costante, come farebbero se si adottassero le (2), le quali fornirebbero altresì un calore specifico costante; cioè $C_{nc} = (1 - \eta_c) C_p$ per la compressione; e $C_{nt} = \frac{1 - \eta_t}{\eta_t} C_p$

per la espansione; ma seguono invece l'andamento che si ottiene determinando gli incroci tra le orizzontali delle temperature reali, calcolate con le (1) e le corrispondenti linee isobariche o meglio le loro tangenti iniziali, agevolmente esprimibili. Le chiameremo quindi *linee di compressione e di espansione:* e le considereremo come puramente rappresentative.

Nella figura abbiamo denominato p_0, T_0 la pressione e la temperatura esterna; p_1, T_1', T_1 la pressione e le temperature, ideali e reali, all'uscita dell'aria dal diffusore di captazione; p_2, T_2', T_2 la pressione e le temperature, ideali e reali, nella zona di ristagno; T_3 la temperatura alla fine della combustione; p_4, T_4', T_4 la pressione e le due temperature all'ingresso della turbina ed infine T_5' e T_5 le due temperature allo sbocco finale del fluido dall'effusore nell'aria ambiente.

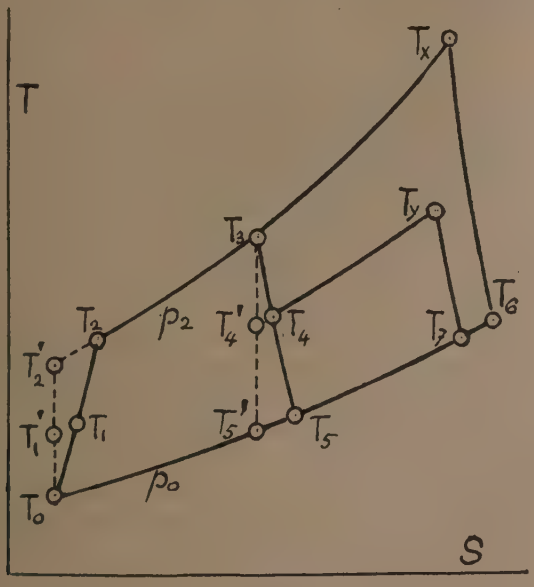


Fig. 1.

Per brevità indicheremo con

$$(3) \qquad \tau = T_1' - T_0 \quad ; \quad \vartheta = T_2' - T_1' \quad ; \quad \Theta = T_4 - T_5 ;$$

i *salti ideali* di temperatura nel diffusore e nel compressore; e il *salto utile reale* nell'effusore.

Salto utile reale in caso di flusso unico. – Ciò premesso, assumeremo come *dati* del calcolo p_0, T_0, T_1', T_2' e T_3: e come *risultato* il salto utile reale Θ. Si calcoleranno T_1 e T_2 mediante le (1): e poi si determinerà T_4 attraverso la relazione di eguaglianza fra il lavoro fornito dalla turbina e quello assorbito dal compressore. Si avrà

$$(4) \qquad \eta_c (T_2' - T_1') = \frac{T_3 - T_4'}{\eta'} \quad ; \quad T_2 - T_1 = T_3 - T_4 .$$

Si calcolerà poi T_5 valendosi della relazione intercorrente fra le isobare p_0 e p_2; che fornisce, insieme alle (1),

$$(5) \qquad T_2' T_5' = T_0 T_3 \quad ; \quad T_5 = T_3 \left(1 - \eta_t \frac{T_2' - T_0}{T_2'}\right).$$

Cosicchè si avrà in definitiva il salto utile reale

$$(6) \qquad \Theta = T_4 - T_5 = \eta_t T_3 \frac{T_2' - T_0}{T_2'} - \frac{T_2' - T_1'}{\eta_c};$$

ossia, ponendo per brevità $T_2' - T_0 = \xi T_2'$,

$$(7) \qquad \Theta = \eta_t \xi T_3 - \frac{\vartheta}{\eta_c};$$

da confrontare col salto utile ideale Θ_1, già calcolato nelle precedenti note per il caso isoentropico

$$(8) \qquad \Theta_1 = \xi T_3 - \vartheta.$$

Chiameremo $(T_3)_u$ il valore di T_3 nel caso del flusso unico.

Dalla (7) si deduce intanto che per $\vartheta = 0$, cioè nel caso dell'*autoreattore*, senza compressione meccanica, il salto utile reale non dipende dal rendimento η_c, ma soltanto da η_t: cioè, non dipende dalle perdite per urto e per attrito nella compressione ma soltanto da quella nella espansione. Si deduce altresì che in un turboreattore, per ogni valore di τ, esiste un valore di ϑ che rende massimo Θ.

Ma ciò che ora importa è il confronto fra il salto reale Θ e quello ideale Θ_1. Si ricorda che nelle precedenti Note si elevava il valore del salto utile introducendo una arbitraria resistenza di canalizzazione della quale ora va depurato. Si ottiene così, per $\vartheta = 120°$ e $\tau = 180°$, $\Theta_1 = 434°$ C; corrispondente a $T_3 = 970°$ K.

Prendendo ora $T_3 = 1000°$ K nel caso reale; assumendo $\eta_c = 0.85$; $\eta_t = 0.90$; per il volo a numero di Mach 2 nella stratosfera ($\tau = 180°$) e tenendo ancora $\vartheta = 120°$ C; si otterrà $\Theta = 373°$ C al posto di $\Theta_1 = 434°$ C; il che conduce a una riduzione di oltre il 18 per cento nella spinta propulsiva.

Esaminiamo ora l'altro piattello della bilancia.

L'INGOMBRO DEL REATTORE D'ALTA QUOTA. – Nelle Note precedenti fu tenuto conto dell'ingombro del tubo propulsivo supponendo una fusoliera di sezione maestra *tripla* dello stretto necessario al pilotaggio ed al carico utile. Qui la riporteremo allo stretto necessario e introdurremo separatamente gli ingombri dei tubi propulsivi, come ora ce lo consentono studi teorici e sperimentali sulle fusoliere tubolari a velocità ipersonore (2).

La fig. 2 dà lo schema di un tubo *tipo*, di diametro maestro D e di lunghezza $l = 8{,}5$ D; con una bocca di entrata, di luce ω_0, eguale ad *un terzo* della sezione maestra; e una luce del getto $\omega_5 = 1{,}6\ \omega_0$.

Per questa fusoliera aperta è stata sperimentata la resistenza *di forma*, R_F, per $M_0 = 2$; cui si deve quindi aggiungere la resistenza d'attrito *esterna*, valuta-

(2) M. J. LIGHTHILL, A. R. C. Report. N. 2003 del 3 gennaio 1945; CLINTON E BROWN, N. A. C. A. Report. N. 808 del 29 dicembre 1945.

bile approssimatamente per una superficie tronconica pari a $84\,\omega_0$, con un coefficiente 0.0015, cosicchè si ottiene

$$R_F = 0.06\,\rho\,V_0^2\,\omega_0 \quad ; \quad R_A = 0.126\,\rho\,V_0^2\,\omega_0\,;$$

e il coefficiente somma sale perciò a 0.186. Aggiungendo ora questa resistenza a quella del velivolo già considerato, con fusoliera ridotta al minimo, il coefficiente C_r del velivolo, espresso in funzione della superficie alare, diviene 0.037 invece di 0.03, per $M_0 = 2$; cioè cresce del 23 per cento.

Se pertanto la spinta del reattore dovesse bilanciare la nuova resistenza, essa dovrebbe crescere più del 50 %. In tal caso il salto utile reale dovrebbe elevarsi a circa 600° C al posto del salto ideale 434° C; e la temperatura di combustione dovrebbe elevarsi, nel caso di flusso unico, a 1440° K; il che non è consentito dalle palette della turbina.

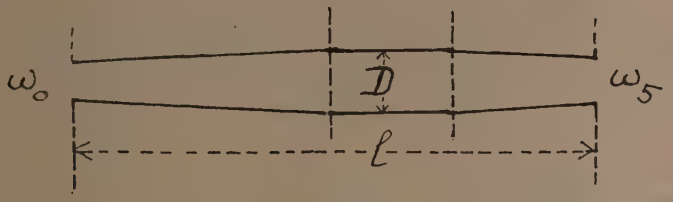


Fig. 2.

Salto utile in caso di flusso bipartito. – Esaminiamo quindi un reattore a *flusso bipartito*, nel quale si avvia alla turbina soltanto una frazione m del flusso attraversante la camera di combustione, quando si sia raggiunta la temperatura T_3, mentre si lascia salire la frazione residua, $1 - m$, a una più alta temperatura, T_x, prima della sua diretta espansione nell'effusore.

Consideriamo, a titolo d'esempio, il caso limite per cui la frazione m esaurisca tutta la sua energia nella turbina sino alla pressione atmosferica, potenziando la compressione dell'intera massa di flusso; ed ove in conseguenza la frazione $1 - m$ del flusso provveda da sola al salto utile. Nella fig. 1 sono sovrapposti i due cicli corrispondenti, in $T_0\,T_2\,T_3\,T_5$ e $T_0\,T_2\,T_x\,T_6$.

L'aliquota m si valuta allora dalla eguaglianza $m\,(T_3 - T_4) = T_2 - T_1$; ed il salto utile, Θ_B, dalla relazione intercorrente fra due isobare $T_5'\,T_3 = T_4'\,T_x$ e dalle (1) dei rendimenti; per cui si ottiene in definitiva

$$(9) \qquad m = \frac{\vartheta}{\eta_c\,\eta_t\,\xi\,T_3} \quad ; \quad \Theta_B = (1 - m)\,\eta_t\,\xi\,T_x\,.$$

Le (9) con l'ausilio delle (7) rivelano che, nel confronto tra il caso del flusso bipartito e quello del flusso unico, si ha la notevole proprietà della *eguaglianza dei consumi specifici*, a parità di ϑ e di Θ. Se prendiamo infatti come *indici di consumo* i salti di temperatura nella camera di combustione, che rappresentano o meno del fattore *calore specifico*, le calorie fornite al fluido, si trova

$$m\,(T_3 - T_2) + (1 - m)\,(T_x - T_2) = (T_3)_u - T_2\,.$$

Se si assume durante la combustione un calore specifico medio uguale a 0.25, tali salti di temperatura corrispondono alle calorie assorbite da *quattro* chilogrammi di fluido.

Numericamente, per $\vartheta, \eta_c, \eta_t$ come negli esempi precedenti e per $T_3 = 1000°$ K, si ottiene $m = 0.275$; onde per ottenere $\Theta_B = 600°$ C, occorre $T_x = 1600°$ K. Il consumo, comune al caso del flusso unico ove $(T_3)_u = 1440$, risulta indicato dal salto di temperatura $(T_3)_u - T_2 = 862°$ C.

Reattore a combustione supplementare. – Si possono abbassare alquanto, a parità di salto utile reale, le temperature massime se si ricorre al reattore a combustione supplementare, il cui ciclo è rappresentato nella fig. 1, in $T_0\, T_2\, T_3\, T_4\, T_y\, T_7$. In esso il flusso unico, che attraversa la turbina dopo aver conseguito la temperatura T_3, riceve, appena uscito dalla turbina e prima di espandersi nell'effusore, una sopraelevazione di temperatura da T_4 a T_y.

Giovandosi delle solite relazioni intercorrenti fra due isobare e delle espressioni dei rendimenti fra le temperature reali e quelle ideali, non segnate in figura, si ottiene in definitiva

$$\Theta_S = T_y \frac{\eta_t \xi T_3 - \vartheta/\eta_c}{T_3 - \vartheta/\eta_c};$$

che, volendo anche qui $\Theta_S = 600°$ C, richiede, se T_3 è limitato a 1000° K, un riscaldamento supplementare sino a $T_y = 1385$ K.

Il consumo sale alquanto, avendosi

$$T_3 - T_2 + T_y - T_4 = 948° \text{ C};$$

al posto del precedente 862° C.

Minimo ingombro del tubo propulsivo. – Dappoichè, crescendo la prevalenza termica ϑ del compressore, crescerà la densità dell'aria immessa nella zona di ristagno e quindi potrà diminuire la sezione maestra occorrente alle camere di combustione, converrà ricercare se e per qual valore di ϑ si possa ridurre al minimo tale sezione maestra, sino ad ottenere un *tubo propulsivo cilindrico*.

Per tale ricerca basterà imporsi la condizione, indicata dagli specialisti, che la velocità del fluido attraversante la zona di ristagno debba corrispondere a un massimo numero di Mach locale di 0.05; sicchè l'equazione di continuità diviene

$$M_0\, c_0\, \omega_0\, \rho_0 = 0.05\, c_2\, \omega_2\, \rho_2;$$

dove $c_0\, \rho_0$ sono la velocità del suono e la densità dell'aria nell'ambiente esterno e $c_2\, \rho_2$ le corrispondenti quantità nella zona di ristagno. Per $M_0 = 2$, ponendo $\omega_0 = \omega_2$, se ne trarrà

$$\frac{c_2\, \rho_2}{c_0\, \rho_0} = 20\, M_0 = 40 = \left(\frac{T_2}{T_0}\right)^{\frac{1+n}{2(1-n)}};$$

dove n è il generico esponente della politropica di compressione.

Per maggiore generalità porremo tuttavia $n = x = 1.4$; ricavandone

$$\frac{T_2}{T_0} = \sqrt[3]{40} \quad ; \quad \vartheta = 282° \text{ C} \quad ; \quad \xi = \frac{2{,}42\, \eta_c}{1 + 2.42\, \eta_c}.$$

Il rapporto di compressione, tra T_2 e T_1, risulterà di 6.35; mostrando così la possibilità concettuale della soluzione indicata.

In tal caso la resistenza del tubo propulsivo potrà considerarsi ridotta al solo attrito con un coefficiente 0.09, se espressa in funzione di ω_0; o di 0.006, se in funzione della superficie alare. Cosicchè il coefficiente C_r del velivolo, per $M_0 = 2$, conserverà in queste ipotesi il valore 0.03 che gli avevamo assegnato nelle precedenti Note. Per equilibrare la resistenza del velivolo basterà in tal modo che il salto utile reale rimanga lo stesso del salto ideale, cioè $\Theta_1 = 434$; già dimostrato sufficiente a tale scopo. Naturalmente la spinta propulsiva sarà trasmessa dalla sagomatura interna che riveste il macchinario; e si provvederà alla diseguaglianza tra ω_1 ed ω_0 disponendo la imboccatura come indicato da Lighthill nello studio citato. Nel calcolo che precede non è compresa questa considerazione.

Si vedrà ora, nelle conclusioni che seguono, la favorevole influenza del criterio su esposto sulle caratteristiche dei tre tipi di reattori considerati.

Conclusioni. – Le *temperature massime* occorrenti nelle camere di combustione e gli *indici di consumo*, valutati come sopra, sono riassunti nel quadro seguente, ove sono anche riportate le cifre calcolate per il caso $\vartheta = 120°$ e $\Theta = 600°$:

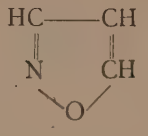
	$\vartheta = 120°$; $\Theta = 600°$ (Tubo normale)			$\vartheta = 282°$; $\Theta = 434°$ (Tubo cilindrico)		
		T_{max} (gradi Kelvin)	Indice di consumo (centigradi)		T_{max} (gradi Kelvin)	Indice di consumo (centigradi)
Flusso unico . .	. .	1440°	862°		1265°	497°
Flusso bipartito .	Turbina	1000°	862°	Turbina	1000°	497°
	Effusore	1600°		Effusore	1570°	
Combustione supplementare . .	Turbina	1000°	948°	Turbina	1000°	622°
	Effusore	1385°		Effusore	1060°	

Dal quadro si deduce non solo che le temperature massime richieste nel caso del tubo propulsivo cilindrico sono sempre inferiori alle corrispondenti del caso normale; ma sopratutto che i consumi risultano notevolmente più bassi. Ciò si deve non solo alle minori temperature ma anche al miglior rendimento del ciclo, indicato dal rapporto ξ.

Queste cifre confermano la possibilità del turboreattore d'alta quota nel caso reale e additano utili criteri alla Tecnica per conseguire lo scopo.

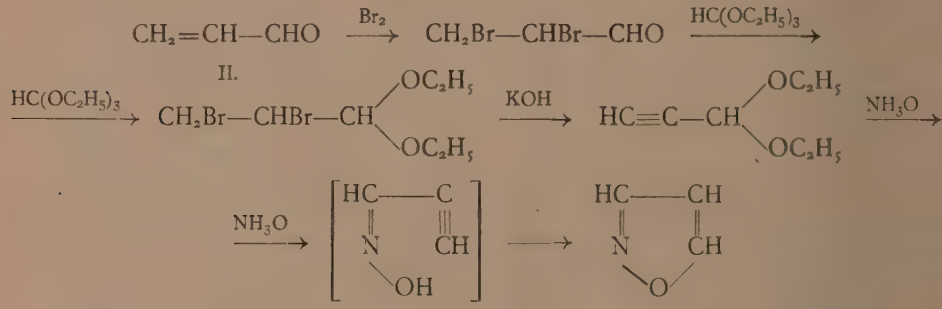
Chimica organica. — *Sulla preparazione dell'isossazolo* (*). Nota di ADOLFO QUILICO e GIUSEPPE PALAZZO, presentata (**) dal Corrisp. A. QUILICO.

Ad onta delle numerose ricerche condotte in questi ultimi anni sulla chimica dei derivati dell'*isossazolo*, la preparazione del termine fondamentale (I) della serie presenta ancor oggi notevoli difficoltà, tanto che è dubbio se dopo L. Claisen, che lo ottenne per la prima volta nel 1903 (1), altri chimici lo abbiano avuto tra le mani.



I.

Il metodo originario di Claisen parte infatti dall'acroleina (II) e comprende la serie di trasformazioni:



che sono state solo assai sommariamente descritte dall'Autore, si svolgono con rendimenti poco soddisfacenti, e richiedono l'uso di un reagente di costosa e difficile preparazione come è l'etere ortoformico (2).

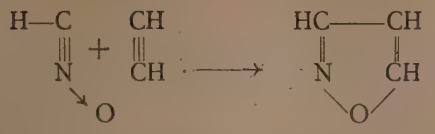
Considerato l'interesse che avrebbe presentato per la conoscenza della chimica di questo nucleo uno studio più approfondito del termine fondamentale, stiamo da tempo ricercando una via più agevole per giungere a questa sostanza. Precedenti tentativi di arrivare all'isossazolo da *acetilene* e *acido fulminico* (III), secondo lo schema:

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Generale del Politecnico di Milano, Centro di Chimica Industriale del C. N. R.

(**) Nella seduta dell' 8 gennaio 1949.

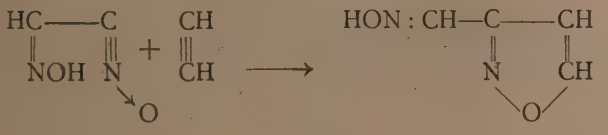
(1) L. CLAISEN, «Ber.», *36*, 3665 (1903).

(2) G. SPERONI, che ha recentemente seguito questo procedimento per preparare l'isossazolo nelle sue ricerche sul dipolmomento di questo eterociclo, ha avuto rese inferiori al 3,5 % del teorico sulla glicerina impiegata.



III.

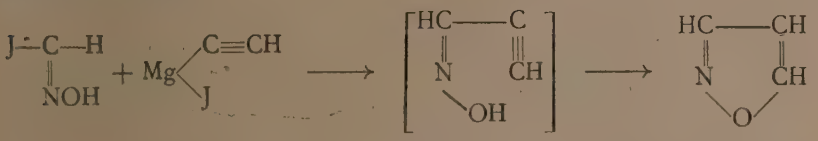
della sintesi con l'acido fulminico e i nitrilossidi in genere descritta da uno di noi e collaboratori [3] non avevano dato il risultato voluto a causa della tendenza che l'acido fulminico mostra, almeno nelle condizioni sperimentate, a reagire nella sua *forma dimera* (IV), per cui invece del composto desiderato, si forma l'*ossima* (V) *della γ – isossazolaldeide :*



IV. V.

e, in altre condizioni, prodotti anche più complessi.

Nè un successo migliore hanno avuto le prove da noi recentemente condotte facendo reagire la *jodoformossima* (VI) sul magnesiaco dell' acetilene, secondo la reazione :



VI.

che applicata alle cloroossime omologhe e al magnesiaco del fenilacetilene procede invece nel senso desiderato [4].

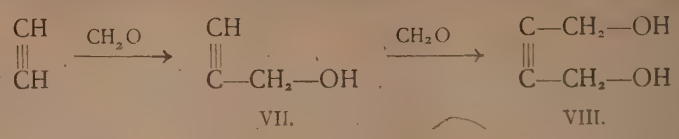
I recenti progressi della chimica dell'acetilene ci hanno però suggerito la possibilità di una sintesi assai semplice e rapida dell'isossazolo, che costituisce un metodo preparativo pratico di questa sostanza molto più conveniente di quello originario di Claisen.

È noto dalla letteratura tecnica [5] che facendo agire la formaldeide sull'acetilene in presenza di un opportuno catalizzatore (acetiluro di Cu) e di un adatto solvente, accanto al *butindiolo* 1–4 (VIII) che rappresenta il prodotto principale della reazione, si formano quantità non indifferenti di *alcool propargilico* (VII), che costituisce evidentemente il prodotto primario della reazione :

(3) A. QUILICO e G. SPERONI, « Gazz. Chim. It. », *69*, 508 (1939); 70, 779 (1940); 76, 148 (1946); A. QUILICO e L. PANIZZI, « Gazz. Chim. It. », 72, 155, 458 (1942).

(4) G. PALAZZO, « Gazz. Chim. It. », 77, 214 (1947).

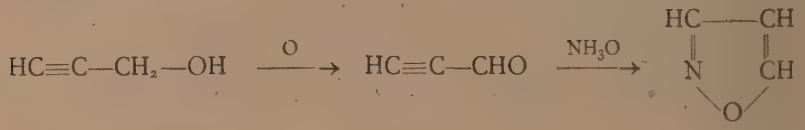
(5) C. *1938*, I, 4108; F. P. 865.299 dell'I. G. Farbenindustrie, C. *1942*, I, 107.



VII. VIII.

È anzi possibile, con una scelta opportuna delle condizioni di lavoro, far sì che l'alcool (VII) costituisca il prodotto più abbondante della reazione stessa.

Avendo la Soc. Montecatini [6] messo a nostra disposizione una discreta quantità di questo alcool, abbiamo potuto studiare la sua ossidazione ad *aldeide propiolica* (IX), direttamente utilizzabile per la preparazione dell'isossazolo secondo il semplice schema:



IX.

Sulla possibilità di trasformare l'alcool propargilico nella corrispondente aldeide non si aveva notizia nella letteratura. Delle due vie che si presentavano applicabili, e cioè la deidrogenazione catalitica e l'ossidazione per via chimica, secondo la normale reazione di ossidazione degli alcooli primari, abbiamo scelto quest'ultima con tutte le cautele che la particolare alterabilità dei prodotti in istudio suggeriva.

Dopo alcune prove preliminari ci siamo orientati sull'impiego dell'acido cromico in soluzione solforica diluita. La soluzione dell'ossidante, $(NH_4)_2Cr_2O_7$ all' 8,4 %, addizionata dell'alcool propargilico (i due non reagiscono a temperatura ordinaria), veniva fatta gocciolare in una soluzione di H_2SO_4 al 10 % contenuta in un pallone e mantenuta all'ebollizione, raccogliendo il distillato che presenta il caratteristico odore pungente dell'aldeide propargilica, in un volume noto di una soluzione titolata di cloridrato d'idrossilammina raffreddata con ghiaccio. I prodotti carbonilici formatisi venivano dosati titolando su una aliquota del liquido, con borato sodico e arancio di metile, l'HCl messo in libertà nella reazione:

$$HC{\equiv}C{-}CHO + NH_3O \cdot HCl \longrightarrow C_3H_3NO + H_2O + HCl$$

secondo il metodo proposto da Romijn [7].

La seguente Tabella I riporta i rendimenti in prodotti carbonilici (espressi in aldeide propiolica) ottenuti operando con quantità differenti di ossidante rispetto al teorico necessario:

(6) Ci è grato ringraziare l'ing. G. Marullo e il dr. E. Dallolio dell'Istituto Ricerche Montecatini «G. Donegani» di Novara, per averci fornito questo prodotto che rappresentava fino ad oggi una vera rarità di laboratorio.

(7) Romijn, «Zeitschr. f. anal. Chem.», *36*, 19 (1897).

TABELLA I.

N.	Quantità di ossidante usato in % del teorico necessario	Resa in prodotti carbonilici (espressi in ald. propiolica) % del teorico
1	80	25,6
2	80	25,4
3	120	33,0
4	120	33,7
5	180	39,4
6	180	42,7
7	200	40,0
8	200	39,5
(9)	200	(23,8)

La prova N. 9 che è stata condotta a differenza delle altre, facendo gocciolare la soluzione dell'alcool propargilico nella miscela cromica bollente, mette in evidenza l'influenza sfavorevole della presenza iniziale dell'ossidante in forte eccesso. Da queste prove risulta che, almeno nelle condizioni in cui si è operato, conviene usare un eccesso di ossidante dell'80 – 100 % su quello teoricamente necessario, con che la resa in prodotti carbonilici (espressi in aldeide propiolica), si aggira intorno al 40 % del teorico. Tentativi di migliorare le rese applicando al pallone una colonnina di Vigreux in modo da provocare una retrogradazione dell'alcool non ancora ossidato hanno portato al risultato opposto: i rendimenti sono risultati notevolmente inferiori e si notò la formazione nella colonna di prodotti scuri resinosi.

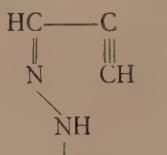
Restava a stabilire se, oltre all'aldeide propargilica, si fossero formate altre sostanze volatili capaci di reagire con l'idrossilammina, titolabili con quella nel distillato. Si è infatti notato che anche operando nelle condizioni delle prove 5-8 che l'esperienza indicava come più favorevoli, le *rese in isossazolo* (vedi parte sperimentale) si aggirano intorno al 28 % del teorico sull'alcool impiegato. Pur considerando che l'isolamento di questa sostanza non può essere quantitativo, le differenze osservate rendevano probabile che altre sostanze carboniliche volatili si fossero formate nell'ossidazione. In una seconda serie di prove si è quindi proceduto al dosamento per via ponderale dell'aldeide propiolica contenuta nel distillato, sotto forma del suo *p-nitrofenilidrazone*. I risultati ottenuti sono raccolti nella Tabella II.

I rendimenti in p-nitrofenilidrazone che sono in buon accordo con quelli pratici della preparazione dell'isossazolo, confermano l'ipotesi sopra avanzata.

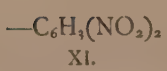
Tabella II.

N.	Quantità di ossidante usato in % del teorico necessario	Resa in p. nitrofenilidrazone dell'aldeide propiolica, % del teorico
1	120	23,03
2	150	30,1
3	160	31,7
4	180	29,7
5	190	27,1
6	200	27,8

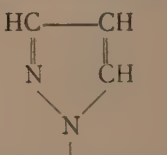
Facciamo rilevare di passaggio che le proprietà dei prodotti ottenuti per azione della p·nitrofenilidrazina e della o·p·dinitrofenilidrazina sulle soluzioni acquose di aldeide propiolica da ossidazione dell'alcool, conducono ad assegnar loro le formule aperte (X) e (XI) di *p·nitrofenilidrazone* e *o·p·dinitrofenilidrazone dell'aldeide propiolica* in luogo di quelle isomere cicliche (XII) e (XIII) di N–p·nitrofenil e N–o·p·dinitrofenilpirazolo che si potevano attendere. Essi si sciolgono infatti prontamente negli alcali diluiti con intensa colorazione rossa e precipitano le soluzioni ammoniacali dei sali rameosi. Lo stesso fa il *semicarbazone*.



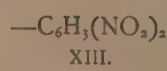
X.



XI.



XII.



XIII.

È da attendere che con l'impiego di altri ossidanti e lo studio più approfondito delle condizioni di esperienza i rendimenti in aldeide propiolica possano essere aumentati; comunque, anche allo stato attuale questo procedimento, che permette di ottenere con facilità 32 – 35 gr. di isossazolo da 100 gr. di alcool propargilico, rappresenta il metodo più conveniente e più rapido per la preparazione di questo composto eterociclico.

Parte Sperimentale. — 1. *Prove di ossidazione cromica dell'alcool propargilico*[8]. – In un pallone da distillazione contenente 50 cm$_3$ di H_2SO_4 al 10 %

(8) Per l'estrazione dell'alcool propargilico dalle sue soluzioni acquose attraverso l'azeotropo con acqua, nonchè per la sua disidratazione e purificazione, rimandiamo al lavoro eseguito nel

mantenuto in vivace ebollizione, si fa gocciolare non troppo rapidamente da un imbuto a rubinetto la soluzione acquosa al 5 % dell'alcool (28 cm_3, pari a gr. 1,4 di alcool) addizionata della quantità voluta di una soluzione di $(NH_4)_2Cr_2O_7$ all' 8,4 % (da cm_3 20 a 50, secondo le varie prove riportate nella Tabella I). L'aldeide propiolica che distilla con l'acqua viene raccolta direttamente in una soluzione al 10 % di $NH_3O \cdot HCl$ (cm_3 17,5) raffreddata con ghiaccio. Ultimata l'aggiunta della miscela dell'alcool e dell'ossidante, si distilla ancora per 5 minuti, si porta a volume il distillato e su una aliquota di questo si esegue la titolazione dell' HCl libero con una soluzione N : 10 di borato sodico, usando come indicatore l'arancio di metile. I risultati ottenuti sono raccolti nella Tabella I: da essi appare che conviene usare un eccesso di ossidante dell' 80–100 % con che la resa in prodotti aldeidici si aggira intorno al 40 %.

Per il *dosamento ponderale* dell'aldeide propiolica come p·nitrofenilidrazone si è proceduto come segue: gr. 1,4 di alcool disciolti in 28 cm_3 di acqua sono ossidati nel modo descritto con $(NH_4)_2Cr_2O_7$ e H_2SO_4, e il distillato raccolto in un tubo di Peligot raffreddato con ghiaccio. Si porta in pallone tarato ad un volume di 100 cm_3 e a 25 cm_3 di questo liquido si aggiunge la soluzione di p·nitrofenilidrazina (1 gr. sciolto in 5 cm_3 di acido acetico glaciale, diluita con 10 cm_3 di H_2O e filtrata dalle impurezze eventualmente precipitate). Si separa subito un abbondante precipitato giallo chiaro che dopo conveniente riposo viene filtrato alla pompa, lavato con acido acetico diluito e con acqua e seccato nel vuoto fino a peso costante. I rendimenti ottenuti nelle varie prove sono riportati nella Tabella II.

Il *p·nitrofenilidrazone* dell'aldeide propiolica (form. X), non ancora descritto nella letteratura, ricristallizzato dal toluolo forma begli aghi gialli riuniti in gruppi arborescenti che riscaldati passano al rossastro verso 120° e fondano poi decomponendosi a 152°–153°. È facilmente solubile negli alcali con colorazione rossa intensa, ma le soluzioni si alterano rapidamente.

Analisi:

trov. % : N 22,30

per $C_9H_7O_2N_3$, calc. : 22,21

L'*o·p·dinitrofenilidrazone* (form. XI) ottenuto in modo analogo, ha un colore simile al precedente, e ricristallizzato dall'alcool forma aghetti gialli p·f·112° con dec.

Analisi:

trov. % : N 24,72

per $C_9H_6O_4N_4$, calc. : 23,93

Il *semicarbazone* dell'aldeide propiolica si separa in aghi bianchi setacei abbandonando per qualche giorno la soluzione dell'aldeide addizionata di cloridrato di

nostro Istituto da M. SIMONETTA e E. MUGNAINI, pubblicato in « Chim. e l'Ind. », *30*, 73 (1948). Il prodotto da noi utilizzato nelle prove aveva le seguenti caratteristiche: $D_4^{20°}$ 0,9503 $n_D^{20°}$ 1,4331 p. e. $_{760}$ 113° 5 che corrispondono ai dati più recenti riportati nella letteratura. Vedi « Journ. Am. Soc. », *67*, 484 (1945).

semicarbazide e acetato sodico. Ricristallizzato da metanolo forma aghi p·f· 165° – 166°. Il prodotto è solubile negli alcali diluiti e dà con soluzione ammoniacale di Cu_2Cl_2 un precipitato giallo sporco di sale di Cu.

Analisi:

trov. % : N 38,66

per $C_4H_5ON_3$, calc. : 37,82

2. *Preparazione dell'isossazolo.* – gr. 11,2 (1 : 5 di gr. mol.) di alcool propargilico disciolti in 200 cm_3 di acqua vengono mescolati con 350 cm_3 (circa il doppio del teorico) di una soluzione all'8,4 % di bicromato ammonico, e il tutto viene fatto gocciolare non troppo rapidamente in 400 cm_3 di H_2SO_4 al 10 % contenuti in un pallone e mantenuti in costante ebollizione. Il distillato viene raccolto in una soluzione di 10 gr. di cloridrato d'idrossilammina in 100 cm_3 di acqua, contenuta in un tubo di Peligot immerso nel ghiaccio. Cessata l'aggiunta della miscela di alcool e di bicromato si distilla ancora per 5 minuti, poi si trasferisce il condensato in un pallone munito di colonna Vigreux e si distilla lentamente; l'isossazolo passa in miscela binaria con l'acqua in forma di grosse gocce oleose di caratteristico odore piridico. L'operazione viene interrotta quando una prova del distillato non dà più intorbidamento per aggiunta di soluzione satura di $CdCl_2$.

Tutto il condensato viene allora trattato con un eccesso di soluzione satura di $CdCl_2$, con che si separa abbondantemente il *sale doppio* $CdCl_2 \cdot C_3H_3NO$ in massa bianca cristallina, che dopo raffreddamento con ghiaccio e conveniente riposo viene filtrato alla pompa. Il precipitato ancora umido, dopo lavaggio con poca acqua fredda, ben sgocciolato alla pompa, pesava gr. 18,66. Poichè non è possibile essiccarlo senza avere perdite in isossazolo, il rendimento venne determinato riscaldando a 120° in istufa fino a peso costante un campione di circa mezzo grammo del sale umido, pesando il $CdCl_2$ rimasto. Nel sale erano contenuti gr. 3,9 di isossazolo, corrispondenti ad un rendimento del 28 % rispetto al teorico sull'alcool impiegato (9).

Per isolare l'isossazolo, il sale di Cd di 5 operazioni condotte nel modo indicato venne sospeso in 200 cm_3 di acqua e distillato in pallone munito di colonna di Vigreux. Il condensato, saturato con solfato ammonico, si estrae ripetutamente con etere; dall'estratto etereo seccato su Na_2SO_4 anidro, si elimina il solvente per cauta distillazione in colonna, e a 94° – 95° distilla poi l'isossazolo come liquido incoloro di odore caratteristico piridico non sgradevole, avente tutte le proprietà assegnategli da Claisen. Operando nel modo descritto, da 56 gr. di alcool propargilico (1 gr. mol.), si ottengono 18–19 gr. di isossazolo praticamente puro.

(9) Dalle acque madri del sale di Cd si può ricavare ancora un po di prodotto ridistillandole in pallone munito di colonna, e raccogliendo la prima porzione del distillato in una nuova soluzione satura di $CdCl_2$.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Relazioni tra il metodo della trasformata multipla di Laplace e il metodo di M. Riesz per l'integrazione di equazioni di tipo iperbolico.* Nota III di LUIGI AMERIO, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

3. – *a*) Calcoliamo la trasformata di Laplace della funzione

$$r^\alpha(x_1, \cdots, x_m) = \left(x_1^2 - \sum_2^m{}_h x_h^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} \qquad (\Re(\alpha) > -2)$$

supponendo $r = 0$ nei punti esterni al dominio τ.

Si ha

$$L(r^\alpha) = \int_0^\infty e^{-p_1 x_1}\, dx_1 \int_{\sum_2^m{}_h x_h^2 \le x_1^2} e^{-\sum_2^m{}_h p_h x_h} \left(x_1^2 - \sum_2^m{}_h x_h^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} dx_2 \cdots dx_m$$

e quindi, posto

$$x_h = x_1 \xi_h \qquad (h = 2, \cdots, m)$$

$$(31)\quad L(r^\alpha) = \int_0^\infty e^{-p_1 x_1} x_1^{\alpha+m-1} \int_{\sum_2^m{}_h \xi_h^2 \le 1} e^{-\left(\sum_2^m{}_h p_h \xi_h\right) x_1} \left(1 - \sum_2^m{}_h \xi_h^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} d\xi_2 \cdots d\xi_m =$$

$$= \int_{\sum_2^m{}_h \xi_h^2 \le 1} \left(1 - \sum_2^m{}_h \xi_h^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} d\xi_2 \cdots d\xi_m \int_0^\infty e^{-\left(p_1 + \sum_2^m{}_h p_h \xi_h\right) x_1} x_1^{\alpha+m-1}\, dx_1 .$$

Poichè segue dalla disuguaglianza di Lagrange

$$\left| \sum_2^m{}_h \Re(p_h)\, \xi_h \right| \le \left(\sum_2^m{}_h \Re^2(p_h)\right)\left(\sum_2^m{}_h \xi_h^2\right) \le \sum_2^m{}_h \Re^2(p_h),$$

si ricava, per

$$(32)\qquad \Re(p_1) > \sqrt{\sum_2^m{}_h \Re^2(p_h)},$$

$$\int_0^\infty e^{-\left(p_1 + \sum_2^m{}_h p_h \xi_h\right) x_1} x_1^{\alpha+m-1}\, dx_1 = \frac{\Gamma(\alpha+m)}{\left(p_1 + \sum_2^m{}_h p_h \xi_h\right)^{\alpha+m}}$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 9 ottobre 1948.

e quindi, per la (1),

$$(33)\qquad L(r^\alpha) = \Gamma(\alpha+m)\int_{\sum_2^m{}_h \xi_h^2 \le 1} \left(1 - \sum_2^m{}_h \xi_h^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} \left(p_1 + \sum_2^m{}_h p_1 \xi_h\right)^{-\alpha-m} d\xi_2 \cdots d\xi_m .$$

Per calcolare l'integrale a secondo membro possiamo supporre (ciò che è lecito per l'analiticità) che $p_1, \cdots, p_m$ siano reali e sia quindi, per la (32),

$$(34)\qquad p_1 > \sqrt{\sum_2^m{}_h p_h^2} .$$

Posto, per $h = 2, \cdots, m$,

$$(35)\qquad p_h = \lambda_h \sqrt{\sum_2^m{}_i p_i^2} \qquad \left(\sum_2^m{}_i \lambda_i^2 = 1\right),$$

effettuiamo una sostituzione lineare ortogonale nello spazio $S_{m-1}(\xi_2, \cdots, \xi_m)$, ponendo

$$\eta_2 = \sum_2^m{}_h \alpha_h \xi_h$$

$$\eta_3 = \sum_2^m{}_h \beta_h \xi_h$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\eta_m = \sum_2^m{}_h \lambda_h \xi_h$$

dove le λ_h sono date dalle (35), le $\alpha_h, \beta_h, \cdots$ sono arbitrarie e legate dalle sole condizioni

$$\sum_2^m{}_h \alpha_h^2 = 1 \;,\; \sum_2^m{}_h \beta_h^2 = 1 \;,\cdots,\; \sum_2^m{}_h \alpha_h \beta_h = 0 \;,\cdots .$$

Risulta allora

$$\sum_2^m{}_h \xi_h^2 = \sum_2^m{}_h \eta_h^2 \quad , \quad \frac{\partial(\xi_2, \cdots, \xi_m)}{\partial(\eta_2, \cdots, \eta_m)} = 1$$

e quindi, per la (33) e (34),

$$L(r^\alpha) = \Gamma(\alpha+m)\int_{\sum_2^m{}_h \eta_h^2 \le 1} \left(1 - \sum_2^m{}_h \eta_h^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} \left(p_1 + \eta_m \sqrt{\sum_2^m{}_h p_h^2}\right)^{-\alpha-m} d\eta_2 \cdots d\eta_m =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+m)}{p_1^{\alpha+m}} \sum_0^\infty{}_n \binom{-\alpha-m}{n} \left(\sum_2^m{}_h \frac{p_h^2}{p_1^2}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\sum_2^m{}_h \eta_h^2 \le 1} \eta_m^n \left(1 - \sum_2^m{}_h \eta_h^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} d\eta_2 \cdots d\eta_m .$$

Per n dispari si ha manifestamente

$$\int_{\sum_2^m \eta_h^2 \leq 1} \eta_m^n \left(1 - \sum_2^m{}_h \eta_h^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} d\eta_2 \cdots d\eta_m = 0 .$$

Sia n pari: $n = 2k$ e calcoliamo l'integrale

$$G_k(\alpha) = \int_{\sum_2^m \eta_h^2 \leq 1} \eta_m^{2k} \left(1 - \sum_2^m{}_h \eta_h^2\right)^{\frac{\alpha}{2}} d\eta_2 \cdots d\eta_m .$$

Si ha

$$G_k(\alpha) = \int_{\sum_3^m \eta_h^2 \leq 1} \eta_m^{2k} \, d\eta_3 \cdots d\eta_m \int_{-\sqrt{1 - \sum_3^m{}_h \eta_h^2}}^{\sqrt{1 - \sum_3^m{}_h \eta_h^2}} \left\{ \left(1 - \sum_3^m{}_h \eta_h^2\right) - \eta_2^2 \right\}^{\frac{\alpha}{2}} d\eta_2$$

e poichè risulta, per note formule,

$$\int_0^a (a^2 - x^2)^p x^q \, dx = a^{2p+q+1} B\left(p+1, \frac{q+1}{2}\right) = a^{2p+q+1} \frac{\Gamma(p+1)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(p+1+\frac{q+1}{2}\right)},$$

si ricava, per $\Re(\alpha) > -2$,

$$G_k(\alpha) = 2 \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}+1\right)} \int_{\sum_3^m \eta_h^2 \leq 1} \eta_m^{2k} \left(1 - \sum_3^m{}_h \eta_h^2\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} d\eta_3 \cdots d\eta_m .$$

Ne segue, ricordando che è

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} ,$$

$$G_k(\alpha) = (2\sqrt{\pi}) \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}+1\right)} (2\sqrt{\pi}) \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+2}{2}+1\right)} \int_{\sum_4^m \eta_h^2 \leq 1} \eta_m^{2k} \left(1 - \sum_4^m{}_h \eta_h^2\right)^{\frac{\alpha+2}{2}} d\eta_4 \cdots d\eta_m =$$

$$= (2\sqrt{\pi})^{m-2} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+m-2}{2}+1\right)} \int_{-1}^{1} \eta_m^{2k} (1 - \eta_m^2)^{\frac{\alpha+m-2}{2}} d\eta_m ,$$

cioè

$$G_k(\alpha) = 2^{m-1}(\sqrt{\pi})^{m-2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+m+2k+1}{2}\right)}\,.$$

Si ricava perciò

$$(36)\quad L(r^\alpha)=2^{m-1}(\sqrt{\pi})^{m-2}\,\frac{\Gamma(\alpha+m)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)}{p_1^{\alpha+m}}\sum_0^\infty{}_k\binom{-\alpha-m}{2k}\frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+m+2k+1}{2}\right)}\left(\sum_2^m{}_h\frac{p_h^2}{p_1^2}\right.$$

Si ha poi

$$\binom{-\alpha-m}{2k}=\frac{(-\alpha-m)(-\alpha-m-1)\cdots(-\alpha-m-2k+1)}{1\cdot 2\cdots(2k)}=$$

$$=\frac{\left(\frac{\alpha+m}{2}+k-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\alpha+m}{2}+k-1\right)\cdots\left(\frac{\alpha+m}{2}\right)}{k!\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)},$$

$$\frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+m}{2}+k+\frac{1}{2}\right)}=$$

$$=\frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{\alpha+m}{2}+k-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\alpha+m}{2}+k-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{\alpha+m}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+m+1}{2}\right)}$$

e quindi

$$\binom{-\alpha-m}{2k}\frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+m}{2}+k+\frac{1}{2}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\frac{\alpha+m}{2}\right)\left(\frac{\alpha+m}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{\alpha+m}{2}+k-1\right)}{k!}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+m+1}{2}\right)}=$$

$$=(-1)^k\binom{-\frac{\alpha+m}{2}}{k}\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{\alpha+m+1}{2}\right)}\,.$$

Ne segue, per la (36),

$$(37)\quad L(f^{\alpha}) = (2\sqrt{\pi})^{m-1} \frac{\Gamma(\alpha+m)\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+m+1}{2}\right) p_1^{\alpha+m}} \sum_0^{\infty}{}_k (-1)^k \binom{-\frac{\alpha+m}{2}}{k} \left(\sum_2^m{}_h \frac{p_h^2}{p_1^2}\right)^k =$$

$$= \frac{(2\sqrt{\pi})^{m-1}\,\Gamma(\alpha+m)\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha+m+1}{2}\right)\left\{p_1^2 - \sum_2^m{}_h p_h^2\right\}^{\frac{\alpha+m}{2}}}$$

e questa formula continua a valere nel campo definito dalla (32).

b) Determiniamo ora la funzione $G(r)$ tale che risulti

$$L(G) = \frac{1}{\left\{p_1^2 - \sum_2^m{}_h p_h^2 + \lambda\right\}^{\frac{\alpha+m}{2}}}.$$

Se le costanti $p_1, \cdots, p_m$ sono reali e soddisfano alla condizione

$$(38)\qquad p_1 > \sqrt{\sum_2^m{}_h p_h^2 + |\lambda|},$$

risulta

$$\frac{1}{\left\{p_1^2 - \sum_2^m{}_h p_h^2 + \lambda\right\}^{\frac{\alpha+m}{2}}} = \sum_0^{\infty}{}_k \binom{-\frac{\alpha+m}{2}}{k} \frac{\lambda^k}{\left\{p_1^2 - \sum_2^m{}_h p_h^2\right\}^{\frac{\alpha+2k+m}{2}}}.$$

Ne segue, per la (37),

$$(39)\quad G(r) = \sum_0^{\infty}{}_k \binom{-\frac{\alpha+m}{2}}{k} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+m+1}{2}+k\right)\lambda^k\, r^{\alpha+2k}}{(2\sqrt{\pi})^{m-1}\,\Gamma(\alpha+m+2k)\,\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+k+1\right)}.$$

Si ha poi

$$\binom{-\frac{\alpha+m}{2}}{k} = \frac{\left(-\frac{\alpha+m}{2}\right)\left(-\frac{\alpha+m}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{\alpha+m}{2}-k+1\right)}{k!} =$$

$$= \frac{(-1)^k}{2^k} \frac{(\alpha+m+2k-2)(\alpha+m+2k-4)\cdots(\alpha+m)}{k!},$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+m+1}{2}+k\right)}{\Gamma(\alpha+m+2k)} =$$

$$= \frac{\left(\frac{\alpha+m+1}{2}+k-1\right)\left(\frac{\alpha+m+1}{2}+k-2\right)\cdots\left(\frac{\alpha+m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+m+1}{2}\right)}{(\alpha+m+2k-1)(\alpha+m+2k-2)\cdots(\alpha+m)\,\Gamma(\alpha+m)} =$$

$$= \frac{1}{2^k} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+m+1}{2}\right)}{(\alpha+m+2k-2)(\alpha+m+2k-4)\cdots(\alpha+m)\,\Gamma(\alpha+m},$$

da cui segue, per le (39),

$$G(r) = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+m+1}{2}\right)}{\left(2\sqrt{\pi}\right)^{m-1}\Gamma(\alpha+m)} \sum_0^\infty{}_k (-1)^k \frac{\lambda^k r^{\alpha+2k}}{2^{2k}\, k!\, \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+k+1\right)} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+m+1}{2}\right)}{\left(2\sqrt{\pi}\right)^{m-1}\Gamma(\alpha+m)} \left(\frac{2r}{\sqrt{\lambda}}\right)^{\frac{\alpha}{2}} J_{\frac{\alpha}{2}}\left(r\sqrt{\lambda}\right).$$

Si constata senza difficoltà (7) che la funzione $G(r)$ è trasformabile in valore assoluto quando valga la (38) e quindi anche per

$$\Re(p_1) > \sqrt{\sum_2^m{}_h \Re^2(p_h) + |\lambda|}\,.$$

Osserviamo infine che per $\frac{\alpha+m}{2} = k$, intero positivo, la funzione $G(r)$ diventa:

$$G(r) = \frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\left(2\sqrt{\pi}\right)^{m-1}(2k-1)!} \left(\frac{2r}{\sqrt{\lambda}}\right)^{k-\frac{m}{2}} J_{k-\frac{m}{2}}\left(r\sqrt{\lambda}\right) =$$

$$= \frac{\left(k-\frac{1}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(2\sqrt{\pi}\right)^{m-1}(2k-1)\cdots 2\cdot 1} \left(\frac{2r}{\sqrt{\lambda}}\right)^{k-\frac{m}{2}} J_{k-\frac{m}{2}}\left(r\sqrt{\lambda}\right) =$$

$$= \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi}\right)^{m-2} 2^{2k}\,(k-1)!} \left(\frac{2r}{\sqrt{\lambda}}\right)^{k-\frac{m}{2}} J_{k-\frac{m}{2}}\left(r\sqrt{\lambda}\right),$$

formula già utilizzata nel § 1.

(7) Basta, ad esempio, osservare che se vale la (38), converge la serie

$$\sum_0^\infty{}_k L\left(\left|\frac{\lambda^k r^{\alpha+2k}}{2^{2k}\, k!\, \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+k+1\right)}\right|\right)$$

(L. AMERIO, *Su alcune questioni relative alla trasformazione di Laplace*. « R. Ist. Lombardo di Sc. e Lett. », vol. LXXVI, 1942–43, p. 194).

Matematica. — *Sul calcolo degli autovalori mediante differenze finite ed estrapolazione.* Nota (*) di MARIO SALVADORI, presentata dal Corrisp. G. KRALL.

1. Nella risoluzione approssimata di un problema lineare agli autovalori le derivate della funzione incognita vengono sostituite dai corrispondenti rapporti incrementali sia nella equazione differenziale omogenea che nelle condizioni al contorno, anch'esse omogenee.

Applicando gli operatori così ottenuti ad un certo numero di punti P_i ($i = 1, 2, \cdots, N$) del dominio considerato (generalmente equidistanziati sulla retta, se il dominio è ad una dimensione, o ai vertici di una rete poligonale regolare, se il dominio è bidimensionale), si ottiene un sistema omogeneo di equazioni algebriche lineari nei valori incogniti della funzione in P_i e, perchè il sistema abbia radici non identicamente nulle, il suo determinante deve risultare nullo.

L'equazione algebrica di grado p nell'autovalore K ottenuta uguagliando a zero il determinante del sistema, definisce con le sue radici valori approssimati dei primi p autovalori del problema.

2. Sheppard (1) ha dimostrato che l'errore in un operatore differenziale lineare $\mathfrak{L}$, dovuto alla sostituzione di rapporti incrementali di prima approssimazione al posto delle derivate, è dato da:

$$\mathfrak{L}Y - lY = f_2(x)\,h^2 + f_4(x)\,h^4 + \cdots \tag{1}$$

dove l è l'operatore alle differenze finite corrispondente a $\mathfrak{L}$, h è la distanza, costante, fra i punti P_i e le $f_j(x)$ ($j = 2, 4, \cdots$) sono funzioni di x indipendenti da h.

Richardson (2) ha dimostrato, in base al teorema di Sheppard, che l'errore nell'integrale di una equazione differenziale lineare, dovuto alla sostituzione di rapporti incrementali al posto delle derivate, è dello stesso tipo, cioè che:

$$Y(x) - y(x) = g_2(x)\,h^2 + g_4(x)\,h^4 + \cdots \tag{2}$$

dove $Y(x)$ è l'integrale dell'equazione differenziale e $y(x)$ è l'integrale approssimato ottenuto mediante differenze finite (e quindi definito soltanto in P_i).

Errori del tipo (1) e (2) sono detti « del tipo h^2 ».

(*) Pervenuta all'Accademia l'8 novembre 1948.

(1) W. F. SHEPPARD, *Central Difference Formulae.* « Proc. London Math. Soc. », vol. 31 (1899).

(2) L. F. RICHARDSON, *The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations.* « Phys. Trans. Royal Soc. of London », vol. 210 (1911).

3. Data una equazione agli autovalori:

$$\mathfrak{L}\,Y \equiv \mathfrak{L}_2\,Y + K\mathfrak{L}_1\,Y = 0 \tag{3}$$

con le corrispondenti condizioni al contorno:

$$\mathfrak{L}_c\,Y = 0 \tag{4}$$

indichiamo col l, l_2, l_1, l_c gli operatori alle differenze corrispondenti a $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{L}_1$ e $\mathfrak{L}_c$, con y_h e k_h i valori approssimati di Y e K, ottenuti mediante differenze finite e corrispondenti al valore h della equidistanza fra i punti P_i, e con e_h l'errore in k_h, cioè la differenza:

$$e_h = K - k_h . \tag{5}$$

Il sistema alle differenze finite corrispondente al sistema differenziale (3), (4) può ora scriversi:

$$\begin{cases} l_2\,y_h(x_i) + k_h\,l_1\,y_h(x_i) = 0 & (i = 1, 2, \cdots, m) \\ l_c\,y_h(x_i) = 0 & (i = m+1, m+2, \cdots, N). \end{cases} \tag{6}$$

Nella Memoria citata, Richardson calcola mediante il sistema (6) la frequenza vibratoria fondamentale di due sistemi elastici continui (corda, piastra quadrata incastrata) per valori di h tendenti a zero e fa quindi *l'ipotesi che l'errore e_h sia del tipo h^2 a coefficienti costanti*:

$$e_h = a\,h^2 + b\,h^4 + c\,h^6 + \cdots \tag{7}$$

Troncando la serie (7) dopo il primo (o il secondo) termine, Richardson ottiene, mediante due (o tre) successive approssimazioni k_h, dei valori estrapolati di K notevolmente vicini al valore esatto.

4. Malgrado un grande numero di risultati ugualmente eccellenti da me ottenuti in modo analogo, è facile vedere che l'ipotesi di Richardson è, in generale, utile ma *non esatta*. Infatti, sostituendo nella (6) il valore k_h dato dalla (5) e ricavandone e_h, si ottiene:

$$e_h = l\,y_h / l_1\,y_h \qquad (x = x_i) \tag{8}$$

e, chiamando:

$$\begin{cases} \varepsilon_h = \mathfrak{L}\,\bar{y}_h - l\,\bar{y}_h \\ \varepsilon_{h,1} = \mathfrak{L}_1\,\bar{y}_h - l_1\,\bar{y}_h \end{cases} \tag{9}$$

dove $\bar{y}_h$ è una funzione che ammette lo sviluppo in serie di Taylor e per la quale inoltre:

$$\bar{y}_h(x_i) = y_h(x_i) \qquad (i = 1, 2, \cdots, N)$$

anche:

$$e_h = \frac{\mathfrak{L}\,\bar{y}_h - \varepsilon_h}{\mathfrak{L}_1\,\bar{y}_h - \varepsilon_{h,1}} \qquad (x = x_i) \tag{10}$$

Poichè ε_h e $\varepsilon_{h,1}$ sono del tipo h^2, mentre $\mathfrak{L}\,\bar{y}_h$ e $\mathfrak{L}_1\bar{y}_h$ non lo sono necessariamente, è ovvio che e_h non è, in generale, del tipo h^2.

5. Una serie di ricerche numeriche sul calcolo dei carichi critici di aste, piastre e volte mediante differenze finite [3] mi permette di fare le seguenti osservazioni di carattere empirico sull'andamento di e_h in questo tipo di problemi.

a) Nella maggioranza dei casi incontrati in pratica, e_h tende a zero monotonamente per h tendente a zero.

In questi casi l'ipotesi di Richardson è valida e dà ottimi risultati.

b) In alcuni casi l'andamento di e_h, per h tendente a zero, è oscillatorio ad ampiezza decrescente.

Le serie dei valori positivi e dei valori negativi di e_h tendono a zero monotonamente e l'ipotesi di Richardson dà ottimi risultati se applicata all'una o all'altra di queste serie.

c) In altri casi ancora l'andamento di e_h, per h tendente a zero, è ondulatorio con ampiezza decrescente, ma di segno costante.

L'ipotesi di Richardson dà ottimi risultati purchè applicata ad una serie monotona di valori successivi di e_h.

In conclusione, risulta vero, da un punto di vista puramente empirico, che *le estrapolazioni di Richardson dànno ottimi risultati sempre che applicate a serie monotone di successive approssimazioni di* K. Per questa ragione ho pubblicato altrove [3] alcune delle formule più utili per l'estrapolazione alla Richardson, basate sul primo o sui primi due termini della serie (7).

6. Nella seguente tabella ho riportato, a titolo di esempio, i risultati del calcolo mediante differenze finite del primo autovalore K del problema di Eulero:

$$y'' + K^2 y = 0$$
$$y(0) = y(L) = 0$$

e i valori estrapolati mediante le formule suddette [4].

L/h	k_h	e_h %	estr. h^2	e %	estr. h^2, h^4	e %
2	8,00000	— 18,9	9,80000	— 0,705	9,86881	— 0,0080
3	9,00000	— 8,8	9,85161	— 0,182	9,86962	+ 0,0002
4	9,37258	— 5,0	9,86314	— 0,065	9,86932	— 0,0028
5	9,54918	— 3,2	9,86657	— 0,031	9,86974	+ 0,0014
6	9,64616	— 2,3	9,86817	— 0,014		
7	9,70506	— 1,7				

Le estrapolazioni accelerano notevolmente la convergenza del metodo delle differenze finite, la cui utilità pratica potrebbe altrimenti mettersi in dubbio.

(3) M. G. SALVADORI, *The evaluation of buckling loads by finite differences and extrapolations*. (In corso di pubblicazione) « Proc. Am. Soc. of Civ. Eng. », 1949 o 1950.

(4) Risultati di più rapida convergenza possono ottenersi mediante sostituzione delle derivate con rapporti incrementali più approssimati. Tali rapporti sono stati calcolati da Bickley (5) e riportati da Southwell (6).

(5) W. G. BICKLEY, *Formulae for differentiation*. « Math. Gazette », vol. 23, (1939) e vol. 25 (1941).

(6) R. V. SOUTHWELL, *Relaxation methods in Teorical Physics*. Oxford University Press (Clarendon Press) (1946).

Geometria. — *Le trasformazioni puntuali in una coppia a Jacobiano nullo.* – I. *Intorno del 2° ordine* (*). Nota di MARIO VILLA e GUIDO VAONA, presentata (**) dal Socio L. BERZOLARI.

1. Nel presente lavoro si studiano le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari in una coppia di punti corrispondenti a Jacobiano nullo. Nei nn. 2, 3, 4 vengono esaminate le principali proprietà relative all'intorno del 2° ordine di una tale coppia. Passando all'intorno del 3° ordine (limitandosi per semplicità al caso in cui la caratteristica del determinante Jacobiano è massima) si perviene nei nn. 5, 6, 7 alla determinazione di riferimenti proiettivi intrinseci. Questi riferimenti si ottengono considerando certe coppie di punti corrispondenti, situate nell'intorno della coppia data, e la *posizione limite* di certi punti; altrimenti non si vede come si possa pervenire alla determinazione intrinseca dei riferimenti stessi (1).

2. Fra due spazi lineari $S_r(x_1, x_2, \cdots, x_r)$, $S'_r(y_1, y_2, \cdots, y_r)$ ad r dimensioni $(r > 1)$ consideriamo una trasformazione puntuale T e riferiamoci ad una coppia (O, O') di punti corrispondenti a Jacobiano nullo. Assumendo O, O' come origini dei due sistemi di coordinate proiettive non omogenee dei rispettivi spazi, le equazioni di T, nell'intorno di (O, O'), si possono scrivere

$$(1) \qquad y_i = \sum a_j^i x_j + [2] \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, r),$$

(*) Lavoro eseguito nel Seminario matematico dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta dell'8 gennaio 1949.

(1) Alle trasformazioni puntuali fra due piani in una coppia a Jacobiano nullo sono dedicati i seguenti lavori: G. JULIA, *Remarques sur les trasformations ponctuelles planes au voisinage d'un point ou le jacobien est nul.* « Bull. Sciences Mathém. », vol. 53, p. 225 (1929); E. BOMPIANI, *Corrispondenza puntuale fra piani proiettivi: esame delle Jacobiane.* « Memorie dell'Accademia d'Italia », vol. XIV, p. 11 (1943); M. VILLA, *Sulle trasformazioni puntuali in una coppia a Jacobiano nullo nel caso cremoniano.* « Questi Rendiconti », ser. VIII, vol. II, p. 136 (1947); E. BOMPIANI, *Sulle Jacobiane di una corrispondenza puntuale fra piani.* « Questi Rendiconti », ser. VIII, vol. II, p. 22 (1947); M. VILLA, *Sulle trasformazioni puntuali in una coppia a Jacobiano nullo.* « Boll. dell'U. M. I. », ser. III, vol. II, p. 3 (1947).

Alle trasformazioni puntuali fra due spazi ordinari in una coppia a Jacobiano nullo è dedicato il lavoro: M. VILLA, *Sulle trasformazioni puntuali fra due spazi ordinari in una coppia a Jacobiano nullo.* « Boll. dell'U. M. I. », ser. III, vol. II, p. 95 (1947).

Per le trasformazioni puntuali fra spazi lineari in una coppia a Jacobiano nullo: M. VILLA, in una conferenza al Seminario Matematico dell'Università di Bologna (*Recenti ricerche sulle trasformazioni puntuali fra due spazi lineari*, marzo 1947) e un accenno in una comunicazione al III Congresso dell'U. M. I. (Pisa, settembre 1948).

Si veda pure: C. SANGERMANO, *Sulle trasformazioni puntuali fra due spazi ordinari.* « Boll. dell'U. M. I. », ser. III, vol. III, p. 119 (1948); U. SALINI, *Sulle trasformazioni puntuali fra due spazi ordinari in una coppia ad Jacobiano nullo di caratteristica uno.* « Rend. di Mat. dell'Univ. di Roma », ser. V, vol. VII, p. 44 (1948) e « Questi Rendiconti », ser. VIII, vol. IV, p. 652 (1948).

dove le a_j^i sono costanti per cui

$$J = |a_j^i| \neq 0, \tag{2}$$

e indicando con [2] i termini di grado > 1. Sia $k\,(0 < k < r)$ la caratteristica del determinante Jacobiano (2). Si può supporre che il minore formato dalle prime k righe e dalle prime k colonne di J sia $\neq 0$ [2]. Si ha allora

$$a_j^t = \sum_s \lambda_t^s a_j^s \qquad (s = 1, 2, \cdots, k\,;\ t = k+1, \cdots, r), \tag{3}$$

le λ essendo costanti.

La T *subordina fra le direzioni uscenti da* O *e quelle uscenti da* O′ *un'omografia singolare* Ω *di specie* $h = r - k$.

Gli spazi singolari di Ω risultano pertanto intrinsecamente associati a T. Tali spazi sono, com'è ben noto [3], un S_{r-k} di S_r ad ogni retta per O del quale corrispondono tutte le rette per O′ di S_r' ed un S_k' di S_r' ad ogni retta per O′ del quale corrispondono tutte le rette per O appartenenti ad un S_{r-k+1} passante per lo spazio singolare S_{r-k} di S_r. Questi spazi singolari di Ω si chiameranno *spazi stazionari* di T [4]. Le equazioni dell'S_{r-k} stazionario di S_r sono

$$\sum_j a_j^s x_j = 0, \tag{4}$$

quelle dell'S_k' stazionario di S_r' sono

$$y_t = \sum_s \lambda_t^s y_s. \tag{5}$$

Assumendo gli spazi stazionari (4) e (5) rispettivamente come spazi coordinati $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$ e $y_{k+1} = y_{k+2} = \cdots = y_r = 0$, si ha

$$a_t^s = 0, \quad \lambda_t^s = 0 \qquad (s = 1, 2, \cdots, k\,;\ t = k+1, \cdots, r). \tag{6}$$

L'omografia Ω determina inoltre fra gli iperpiani di S_r passanti per l'S_{r-k} stazionario e gli S_{k-1}' per O′ appartenenti all'S_k' stazionario un'omografia ω non singolare. Se $u_1 x_1 + u_2 x_2 + \cdots + u_k x_k = 0$, $v_1 y_1 + v_2 y_2 + \cdots + v_k y_k = y_{k+1} = \cdots = y_r = 0$ sono un iperpiano e un S_{k-1}' generici, le equazioni di ω si scrivono

$$\rho u_p = \sum_s a_p^s v_s \qquad (s, p = 1, 2, \cdots, k). \tag{7}$$

Orbene assumiamo nell'S_k' stazionario come spazi coordinati

$$y_1 = 0, y_2 = 0, \cdots, y_k = 0$$

(2) Viene qui escluso il caso in cui la caratteristica di J sia nulla. Tale caso si presenta profondamente diverso da quelli qui studiati e va quindi esaminato a parte.

(3) Si veda ad esempio: E. BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*. Principato, Messina, pp. 69–74 (1923).

(4) Per $r = 2$ gli spazi stazionari si riducono alla retta *stazionaria* e alla retta *fissa*, cfr. BOMPIANI, il 1° dei lav. cit. nella (1). Per $r = 3$, $k = 2$ gli spazi stazionari si riducono al piano stazionario di S_3 e alla retta stazionaria di S_3', cfr. VILLA, il 3° dei lav. cit. nella (1). Per $r = 3$, $k = 1$ si riducono alla retta stazionaria di S_3 e al piano stazionario di S_3', cfr. SANGERMANO e SALINI, op. cit. nella (1).

gli spazi corrispondenti in ω rispettivamente agli iperpiani coordinati

$$x_1 = 0\,,\ x_2 = 0\,,\cdots,\ x_k = 0$$

ed assumiamo pure corrispondenti gli spazi $y_1 + y_2 + \cdots + y_k = 0\,,\ x_1 + x_2 + \cdots + x_k = 0$; si ha allora

$$a^s_p = 0 \quad \text{per} \quad s \neq p\,,\ a^s_s = a, \tag{8}$$

a costante non nulla.

3. Per le (3), (6), (8) le equazioni di T, scrivendo i termini di 2° grado, acquistano la forma

$$\begin{cases} y_s = a x_s + \sum_{i,j} a^s_{ij}\, x_i\, x_j + [3] \\ y_t = \sum_{i,j} a^t_{ij}\, x_i\, x_j + [3] \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} i,j = 1,2,\cdots,r\ ;\ s = 1,2,\cdots,k\ ; \\ t = k+1,\cdots,r \end{pmatrix} \tag{9}$$

dove le a_{ij} sono costanti ed è $a_{ij} = a_{ji}$.

All'S'_k stazionario ($y_{k+1} = y_{k+2} = \cdots = y_k = 0$) di S'_r corrisponde in S_r una V_k per cui O ha (almeno) la multiplicità 2^{r-k}; il cono (*cono principale*) tangente in O a V_k ha le equazioni

$$\sum_{i,j} a^t_{ij}\, x_i\, x_j = 0\,. \tag{10}$$

All'S_{r-k} stazionario di S_r ($x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$) corrisponde in S'_r una V'_{r-k} avente in O' la multiplicità 2^k. Il cono tangente in O' a V'_{r-k} ha le equazioni parametriche

$$y_i = \sum_{t,q} a^i_{tq}\, \tau_t\, \tau_q \qquad (i = 1,2,\cdots,r\ ;\ t,q = k+1,\cdots,r)\,. \tag{11}$$

Questo cono si dirà *cono cuspidale* poichè è il luogo delle tangenti cuspidali alle curve di S'_r corrispondenti in T alle rette per O dell'S_{r-k} stazionario di S_r.

La ipersuperficie Jacobiana di S_r ha in O la multiplicità $r-k$ e il cono tangente ad essa in O (*cono Jacobiano*) ha l'equazione

$$\left| \sum_m a^t_{qm}\, x_m \right| = 0 \qquad (m,t,q = k+1,\cdots,r)\ (5). \tag{12}$$

Esistono rette per O di S_r (*rette caratteristiche*) per le quali le curve corrispondenti in T hanno in O' un flesso (6). Le equazioni complessive delle rette caratteristiche di S_r sono:

(5) Per $r = 2$ i tre coni precedenti si riducono rispettivamente alle tangenti *nodali*, *cuspidale* e *Jacobiana*, cfr. BOMPIANI, il 1° dei lav. cit. nella (1) pp. 13 e 14. Per $r = 3\,,\ k = 2$ si riducono rispettivamente al *cono principale* (del 2° ordine), alla *direzione cuspidale*, al *piano Jacobiano*, cfr. VILLA, il 3° dei lav. cit. nella (1), pp. 97 e 98. Per $r = 3\,,\ k = 1$ si riducono a quattro rette per O, al *cono cuspidale* (del 2° ordine), al *cono Jacobiano* (del 2° ordine), cfr. SANGERMANO e SALINI, op. cit. nella (1).

(6) Si ritrova qui, nel caso di una coppia a Jacobiano nullo, la stessa nozione di rette caratteristiche che si è già presentata per le coppie a Jacobiano $= 0$. (Si veda ad esempio: M. VILLA, *Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari*. – I. *Intorno del 2° ordine*. «Questi Rendiconti», ser. VIII, vol. IV, p. 56, 1948). Qui però le rette corrispondenti in Ω alle rette caratteristiche di S_r non godono della stessa proprietà.

$$\sum_{i,j} a^t_{ij}\, x_i\, x_j = 0, \tag{13}$$

$$\left\| \begin{matrix} \sum_{i,j} a^s_{ij}\, x_i\, x_j \\ x_s \end{matrix} \right\| = 0 \tag{14}$$

$$(i, j = 1, 2, \cdots, r \; ; \; s = 1, \cdots, k \; ; \; t = k+1, \cdots, r).$$

Il loro numero è (in generale) $N = 2^{r-k}(2^k - 1)$, essendo 2^{r-k} l'ordine de la V_k rappresentata dalle (13) e $2^k - 1$ quello della V_{r-k+1} rappresentata dalle (14) [7]. Le (13) sono le equazioni del cono principale: *le rette caratteristiche appartengono quindi al cono principale.*

In S_r si assumano come assi $x_1, x_2, \cdots, x_k$ e come retta $x_1 = x_2 = \cdots = x_r$ $k+1$ rette caratteristiche [8]. Si hanno allora le condizioni

$$a^i_{ss} = 0 \quad \text{per} \quad i \neq s, \tag{15}$$

$$\sum_{i,j} a^t_{ij} = 0, \tag{16}$$

$$\sum_i a^1_{ij} = \sum a^2_{ij} = \cdots = \sum a^k_{ij}. \tag{17}$$

Resta quindi intrinsecamente determinato il riferimento nella stella di centro O' nell'S'_k stazionario (n. 2).

Fra ciascuna delle N rette caratteristiche e la retta dell'S'_k stazionario che le corrisponde in Ω, intercede una proiettività (*caratteristica*) che approssima T fino all'intorno del 2° ordine di (O, O'). Le equazioni delle proiettività caratteristiche fra gli assi x_s, y_s $(s = 1, 2, \cdots, k)$ sono

$$a^s_{ss}\, x_s\, y_s - a y_s + a^2 x_s = 0. \tag{18}$$

La proiettività caratteristica fra le rette $x_1 = x_2 = \cdots = x_r$, $y_1 = y_2 = \cdots = y_k$, $y_{k+1} = \cdots = y_r = 0$ è

$$\left(\sum_{i,j} a^1_{ij}\right) x_1\, y_1 - a y_1 + a^2 x_1 = 0. \tag{19}$$

Assumiamo come punti impropri degli assi x_s e della retta $x_1 = x_2 = \cdots = x_r$ i corrispondenti, nelle relative proiettività caratteristiche, dei punti impropri degli assi y_s e della retta $y_1 = y_2 = \cdots = y_k$, $y_{k+1} = \cdots = y_r = 0$. Ciò impone

$$a^s_{ss} = 0 \quad , \quad \sum_{i,j} a^1_{ij} = 0 \qquad (i, j = 1, \cdots, r \; ; \; s = 1, \cdots, k). \tag{20}$$

Assumendo poi sugli assi x_1, y_1 i due punti unità corrispondenti nella relativa proiettività caratteristica si ha

$$a = 1. \tag{21}$$

(7) L'ordine della V_{r-k+1} rappresentata dalla (14) si può ricavare da una formula dovuta al SALMON per la quale si veda ad esempio: C. SEGRE, *Mehrdimensionale Räume.* «Encykl. Math. Wiss.», Teubner, Berlin, Bd. III, T. 2, H. 2, p. 929 (1921–28).

(8) Le rette per O dell'S_{r-k} stazionario $(x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0)$ vengono mutate da T in curve aventi cuspide in O' e perciò non vi sono rette caratteristiche in detto spazio.

Infine si possono assumere in S'_r come assi $y_{k+1}, y_{k+2}, \cdots, y_r$ le tangenti cuspidali alle curve corrispondenti in T agli assi $x_{k+1}, x_{k+2}, \cdots, x_r$ di S_r. Si ha così

$$a^i_{tt} = 0 \quad \text{per} \quad i \neq t. \tag{22}$$

4. Nel presente numero, come pure nei nn. 5, 6, supporremo che la caratteristica del determinante Jacobiano sia massima, cioè $k = r - 1$, e che sia $r > 2$. Il caso $r = 2$, già studiato dal Bompiani, verrà riesaminato nel n. 7. Le rette caratteristiche, la retta stazionaria e la retta cuspidale porgono qui il riferimento intrinseco nella stella di centro O di S_r e gli assi del riferimento nella stella di centro O' di S'_r. Le equazioni (9) di T, tenendo conto delle (15), (16), (17), (20), (21), (22) del n. 3, si scrivono

$$\begin{cases} y_s = x_s + \sum_{i,j} a^s_{ij}\, x_i x_j + [3] \\ y_r = \sum_{i,j} a^r_{ij}\, x_i x_j + [3] \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} i, j = 1, 2, \cdots, r \\ s = 1, 2, \cdots, r-1 \end{pmatrix}, \tag{23}$$

dove

$$a^n_{ij} = a^n_{ji} \;,\; a^n_{ii} = 0 \;,\; a^r_{rr} \neq 0 \;,\; \sum_{i,j} a^n_{ij} = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots, r). \tag{24}$$

Per avere il riferimento proiettivo intrinseco anche nella stella di centro O' occorre determinare intrinsecamente la retta $y_1 = y_2 = \cdots = y_r$. Avendo già intrinsecamente determinata la retta $y_1 = y_2 = \cdots = y_{r-1}, y_r = 0$, basterà ad esempio caratterizzare geometricamente un iperpiano contenente gli assi $y_1, y_2, \cdots, y_{r-2}$ ed assumerlo come iperpiano $y_{r-1} = y_r$. Consideriamo perciò l'S'_{r-1} di equazione $y_{r-1} = \alpha y_r$. Ad esso corrisponde, fino all'intorno del 2° ordine di O, la calotta σ_2 appartenente all'ipersuperficie

$$x_{r-1} + \sum_{i,j} a^{r-1}_{ij}\, x_i x_j = \alpha \sum_{ij} a^r_{ij}\, x_i x_j .$$

Segando tale calotta con l'S_3 $x_1 = x_2 = \cdots = x_{r-3} = 0$ si ha una calotta di superficie dello spazio ordinario che risulta parabolica se e solo se

$$a^{r-1}_{r-2,r} = \alpha\, a^r_{r-2,r}.$$

È dunque unico l'iperpiano di S'_r contenente gli assi $y_1, y_2, \cdots, y_{r-2}$ per il quale si verifica la circostanza imposta. Assumendolo come iperpiano $y_{r-1} = y_r$ si ha la condizione

$$a^{r-1}_{r-2,r} = a^r_{r-2,r}\ (9). \tag{25}$$

Si verifica subito che i rapporti di due qualunque fra gli $r\binom{r}{2} - r$ coefficienti che figurano negli sviluppi (23), fino all'intorno del 2° ordine, tenuto conto delle (24) e (25), sono altrettanti invarianti proiettivi di T.

(9) Tale procedimento per $r = 3$ risulta semplificato ottenendo, come corrispondente di un piano, una calotta superficiale dello spazio ordinario.

Geometria. — *Sur le point principal des courbes tracées sur une surface.* Nota di E. ARGHIRIADE, presentata (*) dal Socio E. BOMPIANI.

1. Étant données deux courbes gauches C et $\bar{C}$, ayant au point M un contact d'ordre n, Halphen (1) a démontré qu'il existe un plan passant par la tangente commune des deux courbes, *le plan principal*, tel que les cônes projetant les deux courbes d'un point quelconque O de ce plan, aient le long de la génératrice OM un contact d'ordre $n + 1$. Ce théorème a été repris par M. E. Bompiani (2) qui a démontré que si $n \geqq 2$ et si le plan principal est différent du plan osculateur commun des deux courbes, alors il existe dans le plan principal une droite passant par M, *la droite principale*, et sur cette droite un point, *le point principal*, tels que si l'on projète les deux courbes d'un point quelconque de la droite principale, ou du point principal, le contact des deux cônes s'élève respectivement a $n + 2$ et $n + 3$.

Si les deux courbes C et $\bar{C}$ sont situées sur une surface S, M. E. Bompiani (3) a démontré que le plan principal coïncide avec le plan tangent à la surface. Trois cas peuvent alors se présenter:

a) la tangente commune M*t* aux deux courbes est différente d'une direction asymptotique et les deux courbes ont au point de contact M, des plans osculateurs différents; le contact est d'ordre $n = 1$.

b) M*t* est différente d'une direction asymptotique, mais les courbes C et $\bar{C}$ ont en M le même plan osculateur. Le contact est d'ordre $n \geqq 2$ et le plan osculateur commun des deux courbes est forcément différent du plan tangent à la surface.

c) M*t* coïncide avec une direction asymptotique.

Le cas *b*) a été éxaminé par M. E. Bompiani (4) qui a montré que dans ce cas la droite principale est la conjuguée de M*t* et le point principal est le point de rebroussement de la développable circonscrite à S le long de C ou de $\bar{C}$.

Dans le cas *c*) si M n'est pas un point d'inflexion, pour C ou pour $\bar{C}$, alors quelque soit l'ordre du contact des deux courbes, elles ont en M pour plan osculateur, le plan tangent à la surface. Donc le plan osculateur commun coïncide

(*) Nella seduta dell'8 gennaio 1949.

(1) G. H. HALPHEN, *Sur les invariants differentiels des courbes gauches.* « Journal de l'Ec. Polyt. », XXVII, 1880, p. 25.

(2) E. BOMPIANI, *Sul contatto di due curve sghembe.* « Memorie della R. Acc. delle Scienze di Bologna », ser. VIII, tomo III, 1925-6.

(3) Loc. cit., voir aussi G. FUBINI-E. ČECH, *Introd. à la Géom. diff. proj. des surfaces*, p. 31.

(4) Loc. cit.; voir aussi pour les autres cas: E. BOMPIANI, *Gli analoghi proiettivi dei teoremi di Meusnier e di Eulero.* « Rend Semin. Matem. Università di Roma », ser. IV, vol. II, pp. 4-24 (1938); *Costruzione di elementi superficiali a partire da elementi curvilinei.* « Rend. Acc. Lincei », ser. VI, vol. XXV, pp. 149-154; *Costruzione delle calotte superficiali del 2° ordine in un iperspazio.* « Rend. Acc. Lincei », ser. VI, vol. XXIX, pp. 3-11 (1939); *Geometria proiettiva di elementi differenziali.* « Ann. di Matem. », ser. IV, vol. 22, pp. 1-32.

avec le plan principal et dans ce cas comme l'a montré M. G. Palozzi [5] il n'existe pas de droite principale et non plus de point principal.

Le cas *a*) n'a pas encore été examiné et l'étude de ce cas fait l'objet de cette note.

2. Prenons l'équation de la surface sous la forme [6]

$$(1) \qquad z = xy + \frac{1}{3}(x^3 + y^3) + \frac{1}{12}(ax^4 + by^4) +$$

$$+ \frac{1}{60}(Ax^5 + 5Bx^4 y + 10Cx^3 y^2 + 10Dx^2 y^3 + 5Exy^4 + Fy^5) + (6)$$

l'origine étant le point M. Une courbe C située sur S et qui n'est pas tangente à une direction asymptotique, est définié par:

$$(2) \qquad y = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \cdots$$

Remplaçant cette valeur dans (1) on trouve:

$$(3) \qquad z = \alpha x^2 + \left(\beta + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\alpha^3\right)x^3 + \left[\gamma + \alpha^2\beta + \frac{1}{12}(a + b\alpha^4)\right]x^4 +$$

$$+ \left[\delta + \alpha\beta^2 + \alpha^2\gamma + \frac{1}{3}b\alpha^3\beta + \frac{1}{60}(A + 5B\alpha + 10C\alpha^2 + 10D\alpha^3 + 5E\alpha^4 + F\alpha^5)\right]x^5 + \cdots$$

Les équations (2) et (3) définissent la courbe C; en changeant dans ces formules $\beta, \gamma, \delta, \cdots$ en $\bar{\beta}, \bar{\gamma}, \delta, \cdots$ on obtient les équations de $\bar{C}$. Considérons le cône qui projète la courbe C du point O $(\xi, \eta, 0)$ du plan tangent et cherchons l'intersection Γ de ce cône avec le plan $y = 0$. Soit N (x, y, z) un point de C et N_1 $(X, 0, Z)$ le point où ON coupe $y = 0$. On trouve:

$$X = \frac{\eta x - \xi y}{\eta - y} \quad , \quad Z = \frac{\eta z}{\eta - y}$$

En remplaçant y par la valeur (2) il résulte:

$$\frac{1}{\eta - y} = \frac{1}{\eta}\left\{1 + \frac{\alpha}{\eta}x + \left(\frac{\beta}{\eta} + \frac{\alpha^2}{\eta^2}\right)x^2 + \left(\frac{\gamma}{\eta} + \frac{2\alpha\beta}{\eta^2} + \frac{\alpha^3}{\eta^3}\right)x^3 + \right.$$

$$+ \left(\frac{\delta}{\eta} + \frac{\beta^2}{\eta^2} + \frac{2\alpha\gamma}{\eta^2} + \frac{3\alpha^2\beta}{\eta^3} + \frac{\alpha^4}{\eta^4}\right)x^4 +$$

$$\left. + \left(\frac{\varepsilon}{\eta} + \frac{2\alpha\delta}{\eta^2} + \frac{2\beta\gamma}{\eta^2} + \frac{3\alpha\beta^2}{\eta^3} + \frac{3\alpha^2\gamma}{\eta^3} + \frac{4\alpha^3\beta}{\eta^4} + \frac{\alpha^5}{\eta^5}\right)x^5 + \cdots\right\}$$

$$\eta x - \xi y = (\eta - \xi\alpha)x - \xi\beta x^2 - \xi\gamma x^3 - \xi\delta x^4 - \xi\varepsilon x^5 - \cdots$$

(5) G. Palozzi, *Sugli inv. proiet. di contatto fra curve sghembe.* « Atti dell'Accad. dei Lincei », ser. VI, vol. VII, p. 321 (1928).

(6) G. Fubini-E. Čech, *Introd. à la Géom. diff. proj. des surfaces*, p. 73 et 101.

En tenant compte aussi de la valeur (3) de z, on trouve finalement:

$$(4)\quad X = \frac{\eta - \xi\alpha}{\eta}x + \left[-\frac{\xi\beta}{\eta} + \frac{\alpha(\eta - \xi\alpha)}{\eta^2}\right]x^2 + \left[-\frac{\xi\gamma}{\eta} + \frac{\beta(\eta - 2\xi\alpha)}{\eta^2} + \frac{\alpha^2(\eta - \xi\alpha)}{\eta^3}\right]x^3 + \left[-\frac{\xi\delta}{\eta} + \frac{\gamma(\eta - 2\xi\alpha)}{\eta^2} + \frac{\alpha\beta(2\eta - 3\xi\alpha)}{\eta^3} - \frac{\xi\beta^2}{\eta^2} + \frac{\alpha^3(\eta - \xi\alpha)}{\eta^4}\right]x^4 + \left[-\frac{\xi\varepsilon}{\eta} + \frac{\delta(\eta - 2\xi\alpha)}{\eta^2} + \frac{\alpha\gamma(2\eta - 3\xi\alpha)}{\eta^3} + \frac{\alpha^2\beta(3\eta - 4\xi\alpha)}{\eta^4} - \frac{2\xi\beta\gamma}{\eta^2} + \frac{\beta^2(\eta - 3\xi\alpha)}{\eta^3} + \frac{\alpha^4(\eta - \xi\alpha)}{\eta^5}\right]x^5 + (6)$$

$$(5)\quad Z = \alpha x^2 + \left(\beta + \frac{1}{3} + \frac{\alpha^2}{\eta} + \frac{\alpha^3}{3}\right)x^3 + \left[\gamma + \alpha^2\beta + \frac{2\alpha\beta}{\eta} + \frac{\alpha}{3\eta} + \frac{\alpha^3}{\eta^2} + \frac{\alpha^4}{3\eta} + \frac{1}{12}(a + b\alpha^4)\right]x^4 + \left[\delta + \alpha^2\gamma + \frac{2\alpha\gamma}{\eta} + \beta^2\left(\alpha + \frac{1}{\eta}\right) + \alpha^3\beta\left(\frac{b}{3} + \frac{1}{\eta}\right) + \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\alpha^3 + \frac{3\alpha^2}{\eta}\right) + \frac{\alpha}{12\eta}(a + b\alpha^4) + \frac{\alpha^2}{\eta^2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\alpha^3\right) + \frac{\alpha^4}{\eta^3} + \frac{1}{60}(A + 5B\alpha + 10C\alpha^2 + 10D\alpha^3 + 5E\alpha^4 + F\alpha^5)\right]x^5 + (6).$$

La courbe Γ est définie par (4) et (5). Ecrivons l'équation de Γ sous la forme:

$$(6)\quad Z = MX^2 + NX^3 + PX^4 + QX^5 + \cdots$$

De la même manière, en partant de $\bar{C}$ on obtient une courbe $\bar{\Gamma}$ dont l'équation se déduit de (6) en changeant $\beta, \gamma, \delta, \cdots$ en $\beta, \bar{\gamma}, \delta, \cdots$ Examinons maintenant le contact de divers ordres des courbes Γ et $\bar{\Gamma}$.

3. CONTACT DU SECOND'ORDRE. – Egalant dans (6), dans les deux membres les coefficients de x^2, on trouve:

$$(7)\quad M = \frac{\alpha\eta^2}{(\eta - \xi\alpha)^2}.$$

Un contact du second ordre exige $M = \bar{M}$, condition qui est toujours verifiée; ce résultat était à prevoir, puisque le sommet $O(\xi, \eta, o)$ des cônes a été pris dans le plan principal.

4. CONTACT DU TROISIÈME ORDRE. – Egalant les coefficients de x^3 dans (6), on trouve, tous calculs faits:

$$(8)\quad N = \frac{\eta^3(\eta + \xi\alpha)\beta}{(\eta - \xi\alpha)^4} + \frac{\eta^3}{(\eta - \xi\alpha)^3}\left(\frac{1}{3} - \frac{\alpha^2}{\eta} + \frac{\alpha^3}{3}\right).$$

Un contact du troisième ordre exige $N = \bar{N}$, ce qui nous donne:

$$(9)\quad \eta + \xi\alpha = o$$

le sommet O des deux cônes doit être pris sur la conjuguée de la tangente M*t* des deux courbes C et $\bar{C}$, qui est la droite principale.

Si dans (7) et (8) on remplace $\xi\alpha$ par la valeur deduite de (9), à savoir $\xi\alpha = -\eta$, on trouve:

$$(10) \qquad M = \frac{\alpha}{4} \quad , \quad N = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{3} - \frac{\alpha^2}{\eta} + \frac{\alpha^3}{3}\right).$$

5. Contact du quatrième ordre. – Egalant dans (6) les coefficients de x^4, en tenant compte de (10) et en remplaçant partout ξ par $-\frac{\eta}{\alpha}$ on trouve:

$$16\,P = \frac{1}{12}(a + b\alpha^4) - \frac{2\alpha}{3\eta} + \frac{\alpha^3}{\eta^2} - \frac{2\alpha^4}{3\eta} + \beta\left(-\frac{1}{2\alpha} - \frac{\alpha}{2\eta} + \frac{\alpha^2}{2}\right) - \frac{\beta^2}{4\alpha}$$

Un contact du quatrième ordre exige $P = \bar{P}$, ce qui nous donne:

$$(11) \qquad \xi = \frac{-2\alpha}{2(\alpha^3 - 1) - (\beta + \bar{\beta})} \quad , \quad \eta = \frac{2\alpha^2}{2(\alpha^3 - 1) - (\beta + \bar{\beta})}$$

telles sont les coordonnées du point principal P; on remarque qu'elles dépendent seulement de α, β, β.

D'autre part l'équation du plan tangent à S le long de C est:

$$(12) \qquad \Phi(X, Y, Z, x) \equiv X\left(\alpha x + x^2 + \beta x^2 + \gamma x^3 + \frac{1}{3}ax^3 + \cdots\right) +$$

$$+ Y\left(x + \alpha^2 x^2 + 2\alpha\beta x^3 + \frac{1}{3}b\alpha^3 x^3 + \cdots\right) - Z - \alpha x^2 - \left(\beta + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\alpha^3\right)x^3 + \cdots = 0.$$

On trouve que les equations

$$(13) \qquad \Phi = 0 \quad ; \quad \Phi'_x = 0 \quad ; \quad \Phi''_{x^2} = 0$$

déterminent le point

$$(14) \qquad X = \frac{-\alpha}{\alpha^3 - 1 - \beta} \quad , \quad Y = \frac{\alpha^2}{\alpha^3 - 1 - \beta}$$

ces formules définissent le point de rebroussement de la développable circonscrite à S le long de C; c'est le transformé du plan osculateur de C en M, dans la correspondance de Segre. Cela étant, soient N et $\bar{N}$ les transformés dans la correspondance de Segre, des plans osculateurs des courbes C et $\bar{C}$ et soit P le point principal de ces courbes. On déduit facilement de (11) et (14) que le birapport (MPN$\bar{N}$) est harmonique. On peut donc enoncer: *deux courbes* C *et* $\bar{C}$ *situées sur la surface* S *et tangentes entre elles au point* M *où elles ont des plans osculateurs différents, ont même point principal que les sections faites dans la surface par leurs plans osculateurs*;

soient N *et* $\bar{N}$ *les transformés des plans osculateurs des deux courbes dans la correspondence de Segre: le point principal des deux courbes est l'harmonique conjugué de* M *par rapport a* N$\bar{N}$.

6. CONTACT DU CINQUIÈME ORDRE. – Cherchons maintenant les courbes pour lesquelles les cônes qui les projetent de leur point principal, ont un contact augmenté d'une unite. En égalant dans (6) les coefficients de x^5 on trouve:

$$32\,Q=\gamma\left(\frac{1}{2}\alpha^2-\frac{\alpha}{2\eta}-\frac{1}{2\alpha}\right)-\frac{\beta\gamma}{2\alpha}+\beta\left(-\frac{a}{6\alpha}+\frac{7}{6\eta}+\frac{3\alpha^2}{2\eta^2}+\frac{b\alpha^3}{6}-\frac{11\alpha^3}{6\eta}\right)+$$
$$+\frac{5\beta^2}{4\eta}-\frac{\alpha\beta^2}{4}+\frac{3\beta^2}{4\alpha^2}+\frac{\beta^3}{2\alpha^2}-\frac{a\alpha}{4\eta}+\frac{\alpha^2}{\eta^2}-\frac{\alpha^4}{\eta^3}-\frac{ba^5}{4\eta}+\frac{\alpha^5}{\eta^2}+$$
$$+\frac{1}{60}(A+5B\alpha+10C\alpha^2+10D\alpha^3+5E\alpha^4+F\alpha^5).$$

Pour un contact du cinquième ordre on doit avoir $Q=\bar{Q}$ ce qui donne:

$$(15)\quad \left(\frac{1}{2}\alpha^2-\frac{\alpha}{2\eta}-\frac{1}{2\alpha}\right)(\gamma-\bar{\gamma})-\frac{\beta\gamma}{2\alpha}+\frac{\bar{\beta}\bar{\gamma}}{2\alpha}+(\beta-\bar{\beta})\left(-\frac{a}{6\alpha}+\frac{7}{6\eta}+\right.$$
$$\left.+\frac{3\alpha^2}{2\eta^2}+\frac{b\alpha^3}{6}-\frac{11\alpha^3}{6\eta}\right)+(\beta^2-\bar{\beta}^2)\left(\frac{5}{4\eta}-\frac{\alpha}{4}+\frac{3}{4\alpha^2}\right)+\frac{\beta^3-\bar{\beta}^3}{2\alpha^2}=0$$

η ayant la valeur (11). Examinons maitenant le cas de deux courbes planes. L'équation du plan osculateur de la courbe C en M étant, comme on s'en assure avec le développement (2) et (3),

$$\alpha^2X-\alpha Y+\beta Z=0$$

on déduit que le plan osculateur est surosculateur si

$$(16)\qquad \gamma=\frac{\beta^2}{\alpha}+\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{1}{3}+\frac{\alpha^3}{3}\right)$$

et on a une relation analogue pour la courbe $\bar{C}$, en remplaçant β par β. Les courbes C et $\bar{C}$ étant planes, on déduit de (16):

$$\gamma-\bar{\gamma}=(\beta-\bar{\beta})\left(\frac{\beta+\bar{\beta}}{\alpha}+\frac{\alpha^3+1}{3\alpha}\right)$$
$$\frac{-\beta\gamma+\bar{\beta}\gamma}{2\alpha}=-(\beta-\bar{\beta})\left[\frac{\beta^2+\beta\bar{\beta}+\bar{\beta}^2}{2\alpha^2}+\frac{\beta+\bar{\beta}}{6\alpha^2}(1+\alpha^3)\right]$$

en remplaçant ces valeurs dans (15), en tenant compte de la valeur (11) de η, et en notant $\beta+\bar{\beta}=\omega$, on trouve que de tous les termes qui contienent β et $\bar{\beta}$ il ne reste que ceux qui contienent ω; il en résulte:

$$\omega=\beta+\bar{\beta}=\frac{2(\alpha^6-1)-b\alpha^5+a\alpha}{2(\alpha^3+1)}$$

en remplaçant cette valeur de $\beta+\bar{\beta}$ dans (11), on trouve que le lieu du point principal P est la sextique

$$(17)\qquad 2(\xi^6-\eta^6)-\xi\eta(a\xi^4-b\eta^4)+4\xi\eta(\xi^3-\eta^3)=0$$

on retrouve cette même relation (17) en cherchant la condition pour que le point (14) vérifie les relations (13) et en plus la relation:

$$\Phi'''_{xy}=0$$

par conséquent la sextique (17) se transforme dans la correspondence de Segre, dans le cône de Segre. En tenant compte du théorème énoncé à la fin du § 5, il en résulte cette nouvelle propriété du cône de Segre: *Considérons une droite* Mt *tangente en* M *à la surface* S. *On mène par* Mt *deux plans* π_1 *et* π_2 *harmoniquement conjugués par rapport au plan tangent à* S *et par rapport au plan mené par* Mt, *tangente au cône de Segre. Les sections faites dans la surface par le plans* π_1 *et* π_2 *sont projetées de leur point principal suivant des cônes surosculateurs (contact 7–génératrices au lieu de 6–génératrices).*

Reciproquement, si deux courbes planes situées sur la surface S, *ont en* M *la tangente commune* Mt *(sans avoir en ce point le même plan osculateur) et sont projetées de leur point principal suivant des cônes surosculateurs, alors les plans des deux courbes sont harmoniquement conjugués par rapport au plan tangent de* S *et par rapport au plan mené par* Mt, *tangent au cône de Segre.*

Geometria. — *Trasformazioni puntuali fra due piani in una coppia a direzioni caratteristiche indeterminate* (*). Nota di Guido Vaona, presentata (**) dal Socio E. Bompiani.

1. Il presente lavoro dà un contributo allo studio di una corrispondenza T fra due piani proiettivi π, π' nell'intorno di una coppia di punti O, O′ in cui la T sia approssimata fino all'intorno del 2° ordine da una proiettività non degenere Ω.

2. Nelle condizioni dette, scelti O, O′ come origini dei riferimenti proiettivi nei due piani e gli elementi di questi riferimenti ordinatamente corrispondenti in Ω, la T si scrive evidentemente

$$x' = x + a_{30}x^3 + 3a_{21}x^2y + 3a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + [4]$$
$$y' = y + b_{30}x^3 + 3b_{21}x^2y + 3b_{12}xy^2 + b_{03}y^3 + [4]$$

ove le a e b sono costanti non tutte nulle e [4] indica termini in x, y di grado ≥ 4.

Esistono com'è noto (1), in O quattro *direzioni caratteristiche* o *inflessionali di* 2^a *specie* (cioè, tali che un elemento E, di flesso appartenente ad una di esse si muta in un altro dello stesso tipo per effetto di T).

Supposte tre di esse distinte ed assunte come rette $x = 0, y = 0, x = y$ in π si ha

$$a_{03} = b_{30} = 0$$
$$a_{30} + 3a_{21} + 3a_{12} = 3b_{21} + 3b_{12} + b_{03}$$

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Bologna. Comunicato al III Congresso dell'U. M. I. (23–26 settembre 1948, Pisa).

(**) Nella seduta dell'8 gennaio 1949.

(1) M. Villa: *Direzioni d'osculazione e d'iperosculazione di due trasformazioni puntuali.* « Boll. Unione Matematica Italiana », ser. III, vol. II, p. 193 (1947).

sicchè le equazioni di T divengono

$$(1)\qquad \begin{cases} x' = x + a_{30}x^3 + 3a_{21}x^2y + 3a_{12}xy^2 + [4] \\ y' = y + 3b_{21}x^2y + 3b_{12}xy^2 + b_{03}y^3 + [4], \end{cases}$$

con le a e b legate dalla precedente.

3. Per avere gli invarianti proiettivi fino al 3° ordine della trasformazione occorre, com'è noto [2], ricercare l'effetto sulle (1) di omografie di π e di π' che trasformano Ω in una omografia $\overline{\Omega}$ nella quale si corrispondono ordinatamente i punti fondamentali e i punti unità. Un calcolo elementare mostra che ciò facendo si alterano i coefficienti a e b per uno stesso fattore, è perciò che *vi sono quattro invarianti della trasformazione dipendenti dall'intorno del 3° ordine della coppia* O , O'.

Un'interpretazione geometrica degli invarianti detti si ha in base al teorema seguente [3]:

Se a ciascuna retta r per O (*opp.* O') *si associano le tre rette posizione limite della terna di rette caratteristiche di* T *uscenti da un punto* P *di r prossimo ad* O, *quando* P *tende ad* O *su r, si ottiene fra le rette per* O (*opp.* O') *una corrispondenza algebrica* [1 , 3] *nella quale le quattro rette unite sono le quattro direzioni caratteristiche di* T *in* O.

L'equazione di questa corrispondenza è

$$a_{12}k^3 + (2a_{21} - b_{12})k^2 + (a_{30} - 2b_{21})k + \\ + h[(2a_{12} - b_{03})k^2 + (a_{21} - 2b_{12})k - b_{21}] = 0,$$

in cui la retta OP è rappresentata da $y = hx$ e le rette ad essa corrispondenti da $y = kx$, essendo k una radice della precedente equazione.

Poichè nel fascio di centro O il riferimento è fissato da tre rette caratteristiche (supposte distinte), la quarta retta caratteristica e le tre corrispondenti ad una retta per O forniscono i quattro invarianti.

Si può ulteriormente vincolare il punto unità in π rimanendo nell'intorno del 3° ordine.

Si consideri l'E_3' di flesso di 2ª specie appartenente alla $y' = -x'$ di centro O'; il suo corrispondente è l'E_3

$$y = -x + 6(a_{21} - b_{12})x^3.$$

Questo E_3 appartiene ad una sola cubica avente per cuspide il punto improprio dell'asse y e per tangente cuspidale la retta impropria (non ancora fissata). Scelto il punto unità su questa cubica (e su $y = x$) si ha

$$3(a_{21} - b_{12}) = 1.$$

(2) Si segua esattamente il procedimento indicato in E. BOMPIANI, *Sulle trasformazioni puntuali fra piani proiettivi.* «Mem. Acc. d'Italia», ser. VI, vol. XIII, n. 6 (1942).

(3) Il procedimento è analogo a quello seguito dal VILLA nelle sue Note: *Sulle trasformazioni puntuali in una coppia a Jacobiano nullo.* «Rend. Acc. Lincei», ser. VIII, vol. II, p. 140, (1947) e «Boll. Un. Mat. Ital.», ser. III, vol. II, p. 6 (1947).

4. Per finire di fissare i riferimenti occorre servirsi dell'intorno del 4° ordine.

Si considerino [4] gli E_4 con flesso ordinario in O corrispondenti agli E_4 aventi un flesso di 3ª specie in O'; ciascun E_4 individua sulla sua tangente in O un punto P [5]: *il luogo del punto* P *è una quintica razionale avente un punto quadruplo in* O *e per tangenti ivi le quattro direzioni caratteristiche (tangenti inflessionali di 2ª specie)*.

Scritte le equazioni di T nella forma

$$x' = x + f_3(x, y) + f_4(x, y) + [5]$$
$$y' = y + \varphi_3(x, y) + \varphi_4(x, y) + [5],$$

al flesso di 3ª specie appartenente a $y' = kx'$ corrisponde in T l'E_4

$$y = kx + [kf_3(1, k) - \varphi_3(1, k)]\, x^3 + [kf_4(1, k) - \varphi_4(1, k)]\, x^4$$

e il punto P ad esso corrispondente è

$$x = 2\,\frac{kf_3(1, k) - \varphi_3(1, k)}{kf_4(1, k) - \varphi_4(1, k)} \quad , \quad y = 2k\,\frac{kf_3(1, k) - \varphi_3(1, k)}{kf_4(1, k) - \varphi_4(1, k)}.$$

La quintica luogo di questo punto è

$$2y f_3(x, y) - 2x\varphi_3(x, y) + x\varphi_4(x, y) - y f_4(x, y) = 0,$$

ed è configurazione covariante di T ogni covariante di essa.

Assumiamo come retta impropria di π la congiungente i punti d'intersezione diversi da O della quintica con le rette $y = \pm 2x$.

Con ciò, i riferimenti risultano fissati, e si hanno per T le *equazioni canoniche*

$$x' = x + a_{30}x^3 + 3a_{21}x^2 y + 3a_{12}xy^2 + f_4(x, y) + [5]$$
$$y' = y + 3b_{21}x^2 y + (3a_{21} - 1)\,xy^2 + (a_{30} + 3a_{12} - 3b_{21} + 1)\,y^3 + \varphi_4(x, y) + [5]$$

in cui

$$2f_4(1, 2) = \varphi_4(1, 2) \quad , \quad 2f_4(1, -2) + \varphi_4(1, -2) = 0.$$

5. Esaminiamo qui i casi particolari, esclusi precedentemente, in cui le quattro direzioni caratteristiche sono in tutto o in parte coincidenti.

a) *Caso in cui esistono tre direzioni caratteristiche distinte.* — In questo caso si stabiliscono riferimenti intrinseci come nel caso generale. L'intorno del 3° ordine possiede solo *tre invarianti proiettivi indipendenti.*

b) *Caso in cui esistono due direzioni caratteristiche distinte.* — Si possono assumere le due rette caratteristiche distinte come assi x, y. Come retta $x = y$ si può assumere una delle due rette corrispondenti all'asse x nella corrispondenza $[1, 3]$ definita nel n. 3 nel caso generale. L'intorno del 3° ordine possiede *due invarianti proiettivi indipendenti.*

(4) Il procedimento è analogo a quello usato dal Villa: *Un fascio di quintiche collegato alle trasformazioni puntuali.* «Boll. Un. Mat. Ital.», ser. III, vol. III, p. 8 (1948).

(5) Si veda E. Bompiani, *Per lo studio proiettivo differenziale delle singolarità.* «Boll. Un. Mat. Ital.», ser. I, vol. V, p. 118 (1926); vedasi anche la mia Nota: *Sui flessi di specie superiore delle curve piane.* Ibidem, ser. III, vol. II, p. 118 (1947).

c) *Caso delle direzioni caratteristiche coincidenti.* — Assunta l'unica retta caratteristica come asse x, si possono assumere come asse y e retta $x = y$ le due rette che la corrispondenza $[1, 3]$ associa all'asse x. Passando all'intorno del 4° ordine si può assumere come retta impropria la congiungente i due punti intersezione (diversi da O) dell'asse y e della retta $x = y$ colla quintica introdotta nel n. 4.

L'intorno del 3° ordine possiede *un solo invariante proiettivo.*

6. Supponiamo ora che la trasformazione T sia approssimata fino all'intorno di ordine $s > 2$ di (O, O') mediante un'omografia Ω. Le equazioni di T, scelti nei due piani i riferimenti proiettivi con gli elementi fondamentali ed unità ordinatamente corrispondenti in Ω sono del tipo

$$x' = x + \sum_i a_{i,s-i+1}\, x^i\, y^{s-i+1} + [s+2]$$

$$y' = y + \sum_i b_{i,s-i+1}\, x^i\, y^{s-i+1} + [s+2] \quad (i = 0, 1, \cdots, s+1).$$

È noto che (6) in questo caso esistono $s + 2$ rette per O (ed altrettante per O') che godono della proprietà di conservare i flessi di specie s delle curve ad esse tangenti. La loro equazione complessiva è data da

$$y \sum_i a_{i,s-i+1}\, x^i\, y^{s-i+1} = x \sum_i b_{i,s-i+1}\, x^i\, y^{s-i+1}.$$

Tre di queste rette possono assumersi come assi x, y e come retta $x = y$, ottenendo le condizioni

$$a_{0,s+1} = b_{s+1,0} = 0 \quad , \quad \sum_i a_{i,s-i+1} = \sum_i b_{i,s-i+1}.$$

I rapporti di due qualunque dei $2s + 1$ coefficienti indipendenti a, b sono invarianti proiettivi. Si ha quindi:

Esistono, in generale, $2s$ *invarianti proiettivi indipendenti di* T *d'ordine* $s+1$.

Per fissare nei due piani riferimenti proiettivi intrinseci, occorre considerare l'intorno di ordine $s + 2$ di T. Estendendo il procedimento del n. 4, si può associare a T una curva algebrica razionale di ordine $s + 3$ avente punto $(s + 2)$-plo in O e per tangenti ivi le direzioni inflessionali. Basta considerare gli E_{s+2} di flesso di specie $s + 1$ di centro O corrispondenti in T alle rette per O'. Ciascuno di essi individua sulla relativa tangente un punto il cui luogo costituisce la curva in discorso. Di essa ci si può servire per fissare la retta impropria. Il punto unità si può fissare estendendo il procedimento adottato nel caso $s = 2$.

(6) M. VILLA, loc. cit. (1), p. 194.

Analisi. — *Sulle successioni di funzioni continue rispetto ad una variabile e misurabili rispetto ad un'altra.* Nota di GUIDO STAMPACCHIA, presentata (*) dal Corrisp. R. CACCIOPPOLI.

In una recente Nota (1) il prof. Scorza Dragoni ha precisato per le funzioni reali, misurabili (secondo Lebesgue) rispetto ad una e continue rispetto ad un'altra variabile, il teorema di Lusin sulla quasi-continuità delle funzioni misurabili. Di questioni analoghe si sono occupati L. Tibaldo ed E. Baiada (2).

I risultati conseguiti nelle Note di tali Autori mi hanno indotto a precisare per le successioni di funzioni, misurabili rispetto ad una variabile e continue rispetto ad un'altra, il classico teorema di Severini-Egoroff sulla convergenza quasi uniforme delle successioni di funzioni misurabili convergenti quasi ovunque.

Consideriamo la successione di funzioni:

$$(1) \qquad f_1(x,y), f_2(x,y), \cdots, f_m(x,y), \cdots$$

definite, per semplicità, in un rettangolo R: $\{a \leq x \leq b\ ,\ c \leq y \leq d\}$ ed ivi misurabili rispetto ad x e continue rispetto ad y. Si tratta di vedere se, fissato un numero positivo ε, si può trovare un insieme misurabile i di (a,b) tale che risulti: $\text{mis}\, i > (b-a) - \varepsilon$, e che risulti uniformemente convergente la successione (1) nell'insieme I di R costituito da quei punti di R che hanno ascissa in i. Mostrerò che questa circostanza si presenta se la successione (1) converge per ogni y di (c,d) quasi dappertutto in (a,b) e se le funzioni $f_m(x,y)$ sono ugualmente continue come funzioni di y per ogni x di (a,b). Inoltre mostrerò che la stessa circostanza si presenta per una successione estratta dalla (1) se, rimanendo ferme le altre ipotesi, si suppone soltanto che dalla (1) per ogni y si possa estrarre una successione che converga quasi dappertutto in (a,b). Di qui si deduce un notevole criterio di convergenza quasi uniforme per una successione estratta dalla (1) se le funzioni si suppongono ugualmente continue rispetto alle due variabili separatamente.

1. Cominciamo a dimostrare il seguente lemma che generalizza il teorema di Severini-Egoroff.

LEMMA. – *Sia* $\Omega_{m,n}(x)$ $(m, n = 1, 2, \cdots)$ *una successione (a due indici) di funzioni misurabili in un insieme* E *(misurabile) tale che per quasi tutti gli* x *di* E *si abbia, uniformemente rispetto ad* m*:*

$$(2) \qquad \lim_{n \to +\infty} \Omega_{m,n}(x) = 0.$$

(*) Nella seduta del 12 febbraio 1949.

(1) G. SCORZA DRAGONI, *Un teorema sulle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un'altra variabile.* « Rend. Semin. Matem. di Padova », XVII, pp. 102-106 (1948).

(2) L. TIBALDO, *Un teorema sulle funzioni misurabili rispetto ad una e continue rispetto ad un'altra variabile. Applicazioni.* Questi « Rendiconti », ser. 8ª, vol. II, pp. 146-152; E. BAIADA, *Sulle funzioni continue separatamente rispetto alle variabili e gli integrali curvilinei.* « Rend. Semin. Matem. di Padova », XVII, pp. 201-218 (1948).

Fissato $\varepsilon > 0$, *è possibile determinare un insieme misurabile* I *di misura maggiore di* mis E $-\varepsilon$, *tale che per ogni* x *in* I *si abbia, uniformemente rispetto ad* x *ed ad* m, *la* (2).

Detto, invero, $J_{l,n,m}$ l'insieme misurabile dei punti di E per cui:

$$|\Omega_{m,n}(x)| \geqq \frac{1}{l} \tag{3}$$

consideriamo l'insieme misurabile $J_{l,n} = \sum_{m=1}^{\infty} J_{l,n,m}$: cioè l'insieme dei punti x di E per i quali esiste almeno un m tale che valga la (3). Poniamo poi $\bar{J}_{l,\nu} = \sum_{n=\nu+1}^{\infty} J_{l,n}$, ed osserviamo che essendo: $\bar{J}_{l,\nu} \supset \bar{J}_{l,\nu+1}$, l'insieme:

$$J_l = \prod_{\nu=0}^{\infty} \bar{J}_{l,\nu} = \lim_{\nu \to +\infty} \bar{J}_{l,\nu} \tag{4}$$

è misurabile ed infine consideriamo l'insieme, anche esso misurabile: $J = \sum_{l=1}^{\infty} J_l$.

L'insieme E $-$ J è formato dai punti x di E per cui, comunque si prenda l, esiste un indice $\nu(l)$ tale che, per $n > \nu(l)$ si abbia qualunque sia m:

$$|\Omega_{m,n}(x)| < \frac{1}{l}.$$

Quindi l'insieme J ha, per le ipotesi poste, misura nulla. Risulteranno anche di misura nulla tutti gli J_l; fissato allora $\varepsilon > 0$, per la (4), per ogni l si può determinare un indice $\nu(l)$ tale che si abbia:

$$\text{mis } \bar{J}_{l,\nu(l)} < \frac{\varepsilon}{2^l}.$$

Consideriamo ora l'insieme misurabile: $\sum_{l=1}^{\infty} \bar{J}_{l,\nu(l)}$ ed osserviamo che:

$$\text{mis} \sum_{l=1}^{\infty} \bar{J}_{l,\nu(l)} \leqq \sum_{l=1}^{\infty} \text{mis } \bar{J}_{l,\nu(l)} < \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^l} = \varepsilon.$$

Ebbene l'insieme $I = E - \sum_{l=1}^{\infty} \bar{J}_{l,\nu(l)}$ è tale che, comunque si assegni un numero positivo σ, è possibile far corrispondere ad esso un indice $\bar{n}$ in modo che, qualunque sia x in I e qualunque sia m, si abbia:

$$|\Omega_{m,n}(x)| < \sigma \quad \text{per} \quad n > \bar{n}.$$

2. TEOREMA I. – a) *Sia* $\{f_m(x,y)\}$ $(m = 1, 2, \cdots)$ *una successione di funzioni definite nel rettangolo* R: $\{a \leqq x \leqq b\ ,\ c \leqq y \leqq d\}$, *continue rispetto ad* y *e misurabili rispetto ad* x. b) *Supponiamo che per quasi tutti gli* x *di* (a,b) *le funzioni* $f_m(x,y)$ *siano ugualmente continue come funzioni di* y, *e che per ogni* y *di* (c,d) *la successione* $\{f_m(x,y)\}$ $(m = 1, 2, \cdots)$ *converga quasi dappertutto in* (a,b).

Fissato allora, ad arbitrio, un numero $\varepsilon > 0$, *è possibile determinare un insieme misurabile* i *di* (a,b) *di misura:* mis $i > (b-a) - \varepsilon$ *tale che la successione*

$\{f_m(x,y)\}$ $(m=1,2,\cdots)$ *converga uniformemente nell'insieme* I *di* R *costituito dalle intersezioni di* R *con le rette passanti per i e dirette come l'asse* y (diremo allora che la successione converge quasi uniformemente in modo regolare rispetto ad y).

Per ogni numero naturale n consideriamo la suddivisione dell'intervallo (c,d) mediante i punti: $y_{n,t}=c+\frac{d-c}{n}t$ $(t=0,1,2,\cdots,n)$ e diciamo, per ogni m e per ogni x di (a,b), $\omega_{m,n,t}(x)$ l'oscillazione della funzione $f_m(x,y)$ per $y_{n,t-1}\leq y\leq y_{n,t}$; poniamo poi

$$\Omega_{m,n}(x)=\max_{t=0,1,\cdots,n}\omega_{m,n,t}(x).$$

Per un'osservazione di Cesari [3], $\omega_{m,n,t}(x)$ è una funzione misurabile in (a,b) e tale riesce pure $\Omega_{m,n}(x)$. Inoltre, per la supposta equicontinuità, è:

$$\lim_{n\to+\infty}\Omega_{m,n}(x)=0 \tag{5}$$

uniformemente rispetto ad m per ogni fissato x.

Fissato poi un numero $\varepsilon>0$, scegliamo un insieme misurabile e_n di (a,b) in modo che: $\operatorname{mis} e_n>(b-a)-\frac{\varepsilon}{2}$ e che in e_n convergano uniformemente le successioni: $f_m(x,y_{n,0})$, $f_m(x,y_{n,1})$, $\cdots$, $f_m(x,y_{n,n})$ $(m=1,2,\cdots)$; ciò è possibile per il teorema di Severini–Egoroff. È possibile scegliere la successione degli insiemi e_n in modo che essa sia monotona decrescente [4]; posto allora:

$$e=\prod_{n=1}^{\infty}e_n=\lim_{n\to+\infty}e_n$$

si ha:

$$\operatorname{mis} e\geq(b-a)-\frac{\varepsilon}{2}.$$

Per il lemma precedente è possibile determinare un insieme misurabile i contenuto in e tale che:

$$\operatorname{mis} i>\operatorname{mis} e-\frac{\varepsilon}{2}\geq(b-a)-\varepsilon$$

e che la (5) valga uniformemente rispetto ad m ed ad x, per x in i.

Detto ora η un numero positivo, prendiamo p in modo che in tutto i risulti, qualunque sia m:

$$\Omega_{m,p}(x)<\eta.$$

Fissato p, prendiamo $\overline{m}$ così grande che per $m>\overline{m}$, e qualunque sia h, si abbia per ogni punto x di i:

$$|f_m(x,y_{p,q})-f_{m+h}(x,y_{p,q})|<\eta \qquad (q=0,1,\cdots,p), \tag{6}$$

ciò è possibile perchè $i\subset e_p$.

(3) L. Cesari, *Sul teorema di densità in senso forte*. « Ann. Sc. Normale Super. di Pisa », vol. VIII, pp. 301–307, nota (13) (1939).

(4) In questa Nota faccio uso del postulato delle infinite scelte.

Per ogni y di (c, d) diciamo ϑ il punto $y_{p,q}$ $(q = 0, 1, \cdots, p)$ che differisce da y per meno di $\frac{d-c}{p}$; si ha allora per x in i e qualunque sia m:

$$|f_m(x, y) - f_m(x, \vartheta)| < \Omega_{m,p}(x) < \eta. \tag{7}$$

Si deduce quindi dalla (6) e dalla (7) che, per $m > \bar{m}$ e qualunque sia h, per x in i e per $c \leq y \leq d$ si ha:

$$|f_m(x, y) - f_{m+h}(x, y)| \leq |f_m(x, y) - f_m(x, \vartheta)| + |f_m(x, \vartheta) - f_{m+h}(x, \vartheta)| + \\ + |f_{m+h}(x, \vartheta) - f_{m+h}(x, y)| < 3\eta.$$

Con ciò resta dimostrato che la successione $\{f_m(x, y)\}$ converge uniformemente in I.

3. TEOREMA II. – *Nelle stesse ipotesi* a) *del teorema precedente, supponiamo che, per quasi tutti gli* x *di* (a, b), *le funzioni* $\{f_m(x, y)\}$ *siano ugualmente continue e che dalla successione data si possa estrarre per ogni* y *di* (c, d) *una successione parziale che converga quasi dappertutto in* (a, b).

Allora, dalla successione data è possibile estrarre una successione parziale che converge quasi uniformemente in modo regolare rispetto ad y.

Basta invero osservare che, nella dimostrazione precedente, la convergenza rispetto ad x è stata sfruttata soltanto per un'infinità numerabile di valori di y:

$$y = y_{n,t} \quad (n = 1, 2, \cdots ; t = 0, 1, 2, \cdots n).$$

È possibile allora, mediante il noto procedimento diagonale di Cantor, estrarre una successione di indici m_r per cui le successioni: $f_{m_r}(x, y_{n,t})$ convergano per $n = 1, 2, \cdots$ e per $t = 0, 1, \cdots, n$. Dopodichè si può applicare a tale successione il ragionamento precedente.

OSSERVAZIONE. – Le ipotesi dell'ultimo teorema possono attenuarsi richiedendo la convergenza rispetto ad x di una successione estratta solo per un'infinità numerabile di valori di y i quali costituiscono un insieme denso su (c, d). Invero basterà ripetere il ragionamento del teorema precedente sostituendo ai valori $y = y_{n,t} : n = 1, 2, \cdots ; t = 0, 1, \cdots, n$ i valori y dell'insieme denso considerato.

4. TEOREMA III. – *Sia* $\{f_m(x, y)\}$ $m = 1, 2, \cdots$ *una successione di funzioni definite nel rettangolo* $R : \{a \leq x \leq b\ ,\ c \leq y \leq b\}$ *ivi continue rispetto ad* x *ed a* y *separatamente, se le funzioni* $\{f_m(x, y)\}$ *sono ugualmente continue rispetto ad* x *in* (a, b) [*ad* y *in* (c, d)] *per quasi tutti i valori di* y *in* (c, d) [*di* x *in* (a, b)], *fissato un numero* $\varepsilon > 0$ *è possibile determinare due insiemi misurabili* I_x *ed* I_y *di* (a, b) *e di* (c, d) *rispettivamente, tali che:*

$$\text{mis } I_x > (b - a) - \varepsilon \quad , \quad \text{mis } I_y > (b - a) - \varepsilon$$

ed è possibile dalla successione data estrarne un'altra che converga uniformemente nell'insieme di R *formato dai punti che hanno l'ascissa in* I_x *oppure l'ordinata in* I_y.

Questo teorema segue dal precedente.

Analisi. — *Due criteri di convergenza uniforme per le successioni di funzioni monotone di due variabili in un rettangolo e nel piano* (*). Nota di ROBERTO CONTI, presentata (**) dal Corrisp. G. SANSONE.

1. Scopo di questa Nota è l'estensione alle successioni di funzioni di due variabili di due noti criteri di convergenza uniforme, validi entrambi per le successioni di funzioni monotone in un intervallo finito (Teorema A_1 del n. 2) o infinito (Teorema B_1 del n. 3).

L'estensione viene conseguita (con i Teoremi A_2 e B_2 dei nn. 2 e 3 risp.) definendo opportunamente le analoghe delle funzioni monotone in una variabile. In entrambe le dimostrazioni è essenziale l'ipotesi della continuità della funzione limite e non sembra possibile rimuoverla senza l'aggiunta di ipotesi restrittive, come è indicato da un semplice esempio (n. 4).

2. Facciamo anzitutto la seguente osservazione. La funzione $g(x)$ limite di una successione convergente $\{g_n(x)\}$ di funzioni monotone è anch'essa monotona. E precisamente due casi sono possibili: *a*) esiste un certo $\bar{n}$ tale che per $n > \bar{n}$ le g_n sono tutte non decrescenti [tutte non crescenti] e allora si vede subito che la g deve essere anch'essa non decrescente [non crescente]; *b*) un tale $\bar{n}$ non esiste e la $\{g_n\}$ è composta di due successioni $\{g_{n'}\}$, $\{g_{n''}\}$, la prima di funzioni non decrescenti, convergente verso una funzione g' non decrescente, la seconda di funzioni non crescenti, convergente verso una funzione non crescente g'', e per l'unicità del limite segue $g' = g'' = \text{cost}$.

Possiamo perciò enunciare nella seguente forma leggermente più generale un noto criterio di convergenza uniforme (1):

A_1. – *Se una successione* $\{g_n(x)\}$ *di funzioni monotone converge su di un certo intervallo* (a, b) *verso una funzione* $g(x)$ (*necessariamente monotona*), *continua, la convergenza è uniforme.*

Se si presenta il caso *a*) basterà infatti applicare il criterio nella forma usuale alla successione delle g_n con $n > \bar{n}$, se si presenta il caso *b*) il criterio viene applicato separatamente alle due successioni $\{g_{n'}\}$, $\{g_{n''}\}$.

Estendiamo ora la proposizione A_1 alle funzioni di due variabili. Per questo, detto R il rettangolo $(a \leq x \leq b\ ;\ c \leq y \leq d)$ del piano x, y, poniamo la:

Definizione. – Diremo che la funzione $f(x, y)$ è *nel rettangolo* R *una funzione* M se essa risulta monotona rispetto a ciascuna variabile separatamente, cioè se per ogni valore $\bar{x}$ [$\bar{y}$] dell'intervallo (a, b) [(c, d)] la f è funzione monotona della y [della x], potendo con ciò la f essere non decrescente per un certo $\bar{x}$ [$\bar{y}$] e non crescente per un certo $\bar{\bar{x}} \neq \bar{x}$ [$\bar{\bar{y}} \neq \bar{y}$].

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto Matematico dell'Università di Firenze.

(**) Nella seduta del 12 febbraio 1949.

(1) Ved. H. E. BUCHANAN-T. H. HILDEBRAND, « Ann. of Math. », 9, pp. 123–126 (1908).

Possiamo allora dimostrare il seguente criterio:

A_2. – *Se una successione* $\{f_n(x,y)\}$ *costituita di funzioni* M *nel rettangolo* R *converge in* R *verso una funzione* $f(x,y)$ *continua, allora la* f *è anch'essa una* M, *e la convergenza è uniforme.*

La prima parte segue subito dalla Definizione e dall'osservazione fatta in principio.

Per dimostrare l'uniformità della convergenza si osservi che, per la supposta continuità della $f(x,y)$, fissato un numero $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, si può (in virtù del Teorema di Heine–Cantor) ricoprire R con un numero finito di rettangoli r aventi i lati paralleli a quelli di R, tali che in ciascuno di essi l'oscillazione della $f(x,y)$ sia $< \varepsilon/4$. Una volta fissato ε, d'altronde si può, per A_1, determinare un n^* tale che, per $n > n^*$, sia

$$(1) \qquad -\varepsilon/4 < f_n(x,y) - f(x,y) < \varepsilon/4$$

comunque si prenda il punto (x,y) sul contorno di uno qualsiasi degli r.

Sia $P \equiv (\bar{x},\bar{y})$ un punto interno ad uno degli r e siano $P' \equiv (\bar{x},y')$, $P'' \equiv (\bar{x},y'')$ le intersezioni della retta $x = \bar{x}$ col contorno di r. Sia poi $n > n^*$ e, ad esempio

$$(2) \qquad f_n(\bar{x},y') \leq f_n(\bar{x},\bar{y}) \leq f_n(\bar{x},y'').$$

Essendo $f_n(\bar{x},\bar{y}) - f_n(\bar{x},y'') \leq 0$, avremo per quanto precede:

$$\begin{aligned} f_n(\bar{x},\bar{y}) - f(\bar{x},\bar{y}) &= f_n(\bar{x},\bar{y}) - f_n(\bar{x},y'') + f_n(\bar{x},y'') - f(\bar{x},y'') + \\ &+ f(\bar{x},y'') - f(\bar{x},\bar{y}) \leq \{f_n(\bar{x},y'') - f(\bar{x},y'')\} + \\ &+ \{f(\bar{x},y'') - f(\bar{x},\bar{y})\} < \varepsilon/4 + \varepsilon/4 < \varepsilon. \end{aligned}$$

Essendo inoltre $f_n(\bar{x},y') = f_n(\bar{x},\bar{y}) \leq 0$ sarà

$$\begin{aligned} f(\bar{x},\bar{y}) - f_n(\bar{x},\bar{y}) &= f(\bar{x},\bar{y}) - f(\bar{x},y') + f(\bar{x},y') - f_n(\bar{x},y') + \\ &+ f_n(\bar{x},y') - f_n(\bar{x},\bar{y}) \leq \{f(\bar{x},\bar{y}) - f(\bar{x},y')\} + \\ &+ \{f(\bar{x},y') - f_n(\bar{x},y')\} < \varepsilon/4 + \varepsilon/4 < \varepsilon \end{aligned}$$

e, in conclusione, per $n > n^*$:

$$(3) \qquad |f_n(\bar{x},\bar{y}) - f(\bar{x},\bar{y})| < \varepsilon.$$

Se invece delle (2) hanno luogo le disuguaglianze contrarie, basterà scambiare nelle disuguaglianze di sopra l'ufficio del punto $P' \equiv (\bar{x},y')$ con quello del punto $P'' \equiv (\bar{x},y'')$ per giungere ancora alla (3) e provare così l'asserto.

Osservazione. – Si noti che il Teorema resta valido anche nell'ipotesi più generale che le f_n, anzichè funzioni M, siano funzioni limitate e monotone secondo due direzioni qualunque (le *stesse* due direzioni per tutti gli n). Tuttavia, anche senza questa generalizzazione, è da rilevare che risultano funzioni M tanto quelle funzioni che sono dette monotone ordinariamente [2], quanto le funzioni monotone linearmente, cioè su ogni segmento rettilineo appartenente ad R [3]. A

(2) Ved., ad esempio, L. TONELLI, *Serie trigonometriche*, Bologna, pp. 464-465 (1928).
(3) Ved. G. B. PRICE, «Am. J. of Math.», *61*, pp. 941-946 (1939).

sua volta, però, la classe delle M è contenuta in quella delle funzioni monotone secondo Lebesgue (4).

3. Sia $g(x)$ una funzione monotona e limitata, definita per tutti gli x reali: $-\infty < x < +\infty$. Posto allora

$$g(-\infty) \equiv \lim_{x \to -\infty} g(x) \quad ; \quad g(+\infty) \equiv \lim_{x \to +\infty} g(x)$$

possiamo, in base alle stesse considerazioni che ci hanno condotto all'enunciato A_1, applicate questa volta ad un risultato dovuto in sostanza a Pólya (5), enunciare il seguente criterio:

B_1. – *Se la successione* $\{ g_n(x) \}$ *di funzioni monotone e limitate (almeno da un certo* n *in poi) converge per ogni* x *reale verso una funzione* $g(x)$ *limitata e continua (e necessariamente monotona), ed inoltre è*

$$\lim_{n \to \infty} g_n(-\infty) = g(-\infty) \quad ; \quad \lim_{n \to \infty} g_n(+\infty) = g(+\infty)$$

allora la convergenza è uniforme per $-\infty < x < +\infty$.

Per poter estendere anche questo criterio alle funzioni di due variabili, dobbiamo premettere alcune considerazioni.

Sia $f(x, y)$ una funzione definita in tutto il piano, limitata e monotona rispetto a ciascuna variabile separatamente: sarà allora possibile definire le funzioni di una variabile

$$\bar{g}(x) = f(x, -\infty) \quad ; \quad \bar{\bar{g}}(x) = f(x, +\infty) \quad ;$$
$$\bar{h}(y) = f(-\infty, y) \quad ; \quad \bar{\bar{h}}(y) = f(+\infty, y),$$

ciascuna delle quali è evidentemente monotona rispetto alla variabile da cui dipende, ed avendo supposto la $f(x, y)$ limitata, saranno finiti i limiti $\bar{g}(-\infty)$, $\bar{g}(+\infty)$, $\bar{\bar{g}}(-\infty)$, $\bar{\bar{g}}(+\infty)$, $\bar{h}(-\infty)$, $\bar{h}(+\infty)$, $\bar{\bar{h}}(-\infty)$, $\bar{\bar{h}}(+\infty)$.

Se chiamiamo, per brevità, *funzione* M *in tutto il piano* una funzione che, oltre ad essere limitata e monotona rispetto a ciascuna variabile, soddisfi le

$$(2) \qquad \begin{cases} \bar{g}(-\infty) = \bar{h}(-\infty) \quad ; \quad \bar{g}(+\infty) = \bar{\bar{h}}(-\infty) \quad ; \\ \bar{\bar{g}}(-\infty) = \bar{h}(+\infty) \quad ; \quad \bar{\bar{g}}(+\infty) = \bar{\bar{h}}(+\infty), \end{cases}$$

potremo dimostrare il seguente teorema:

B_2. – *Se una successione* $\{ f_n(x, y) \}$ *costituita di funzioni* M *in tutto il piano converge ivi verso una funzione* M *in tutto il piano, continua,* $f(x, y)$, *tale che le relative* $\bar{g}(x)$, $\bar{\bar{g}}(x)$, $\bar{h}(y)$, $\bar{\bar{h}}(y)$ *siano continue, ed inoltre si hanno le*

$$(3) \qquad \begin{cases} \lim_{n \to \infty} \bar{g}_n(x) = \bar{g}(x) \quad ; \quad \lim_{n \to \infty} \bar{\bar{g}}_n(x) = \bar{\bar{g}}(x) \quad ; \\ \lim_{n \to \infty} \bar{h}_n(y) = \bar{h}(y) \quad ; \quad \lim_{n \to \infty} \bar{\bar{h}}_n(y) = \bar{\bar{h}}(y) \end{cases}$$

(4) Ved. Lebesgue, «Rend. Circ. Mat. di Palermo», *24*, p. 385 (1907).
(5) Ved. G. Pólya, «Math. Zeitschrift», *8*, p. 173 (1920).

e le

$$(4)\quad \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \bar{g}_n(-\infty) = \bar{g}(-\infty) \quad ; \quad \lim_{n\to\infty} \bar{g}_n(+\infty) = \bar{g}(+\infty) \quad ; \\ \lim_{n\to\infty} \underline{g}_n(-\infty) = \underline{g}(-\infty) \quad ; \quad \lim_{n\to\infty} \underline{g}_n(+\infty) = \bar{g}(+\infty), \end{cases}$$

allora la convergenza è uniforme in tutto il piano.

Fissato un numero $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, sia $\{a_\nu\}$ una qualunque successione numerica divergente a $-\infty$; indichiamo con $g_\nu(x)$ le corrispondenti $f(x, a_\nu)$ le quali costituiscono una successione di funzioni monotone (limitate), definite per $-\infty < x < +\infty$, convergente verso la funzione continua $\bar{g}(x) = f(x, -\infty)$. Affinchè tale convergenza sia uniforme, in base al criterio B_1 è sufficiente che le $g_\nu(-\infty)$ e le $g_\nu(+\infty)$ convergano per $\nu \to \infty$ rispettivamente verso $\bar{g}(-\infty)$ e $\underline{g}(+\infty)$; ma le $g_\nu(-\infty) = f(-\infty, a_\nu)$ tendono verso $\bar{h}(-\infty)$ e quindi, per le (2), appunto verso $\bar{g}(-\infty)$; analogamente le $g_\nu(+\infty)$ tendono verso $\underline{g}(+\infty)$. Dunque in corrispondenza all'ε scelto si potrà determinare un ν tale che per $\nu \geq \bar{\nu}$, $-\infty < x < +\infty$ sia

$$|f(x, a_\nu) - \bar{g}(x)| < \varepsilon/4$$

e in particolare

$$|f(x, \bar{y}) - \bar{g}(x)| < \varepsilon/4$$

avendo posto $\bar{y} = a_\nu$. Allora, a causa della monotonia della $f(x, y)$ rispetto a y, se (x, y) è un punto interno al semipiano $S_1\ (-\infty < x < +\infty\ ;\ y \leq \bar{y})$ avremo anche

$$(5)\qquad |f(x, y) - f(x, \bar{y})| \quad , \quad |f(x, y) - \bar{g}(x)| < \varepsilon/4 .$$

Infatti se $f(x, \bar{y}) \leq f(x, y) \leq \bar{g}(x)$ è

$$0 \leq f(x, y) - f(x, \bar{y}) \ , \ \bar{g}(x) - f(x, y) \leq \bar{g}(x) - f(x, \bar{y}) < \varepsilon/4 ;$$

se invece è $\bar{g}(x) \leq f(x, y) \leq f(x, \bar{y})$ sarà

$$0 \leq f(x, \bar{y}) - f(x, y) \ , \ f(x, y) - \bar{g}(x) \leq f(x, \bar{y}) - \bar{g}(x) < \varepsilon/4 .$$

In modo analogo, partendo da una successione divergente a $+\infty$, potremo determinare un $\underline{y}$ in modo da aversi

$$|f(x, y) - f(x, \underline{y})| \quad , \quad |f(x, y) - \underline{\bar{g}}(x) < |\varepsilon/4$$

per tutti i punti del semipiano $S_2\ (-\infty < x < +\infty\ ;\ \underline{y} \leq y)$.

Infine, applicando questa volta A_1 a due successioni della forma $\{f(a_\nu, y)\}$, dove $\underline{y} \leq y \leq \bar{y}$, potremo determinare un x ed un $\bar{x}$ tali da aversi

$$|f(x, y) - \bar{h}(y)| \ , \ |f(x, y) - f(\bar{x}, y)| < \varepsilon/4 \ ;$$
$$|f(x, y) - \underline{\bar{h}}(y)| \ , \ |f(x, y) - f(\underline{\bar{x}}, y)| < \varepsilon/4$$

rispettivamente per i punti della semistriscia $S_3\ (x \leq \bar{x}\ ;\ \underline{y} \leq y \leq \bar{y})$ e per quelli della semistriscia $S_4\ (\underline{\bar{x}} \leq x\ ;\ \underline{y} \leq y \leq \bar{y})$.

In tal modo si è diviso il piano in cinque regioni e cioè: il rettangolo $S_0\ (\underline{\bar{x}} \leq x \leq \bar{x}\ ;\ \underline{y} \leq y \leq \bar{y})$, i due semipiani S_1, S_2 e le due semistriscie S_3, S_4.

Per provare l'asserto basterà ora mostrare che è possibile, in corrisponenza a ciascuna di tali regioni S_i $(i=0, 1, \cdots, 4)$, determinare un valore n_i $(i=0, 1, \cdots, 4)$ di n in modo da aversi

$$|f_n(x,y) - f(x,y)| < \varepsilon \tag{6}$$

per $n > n_i$ e per tutti i punti della S_i.

Intanto l'esistenza di un n_0 e la validità della (6) per $n > n_0$ e (x,y) appartenente al rettangolo S_0 risulta dal criterio A_2 dimostrato nel n. 2. Per provare la validità della (6) nei punti delle rimanenti quattro regioni ci possiamo limitare a considerare il semipiano S_1.

Le (3) e (4) assicurano, in virtù del criterio B_1, la convergenza uniforme delle $\bar{g}_n(x), \bar{\bar{g}}_n(x), \bar{h}_n(y), \bar{\bar{h}}_n(y)$ verso i rispettivi limiti; in particolare potremo determinare un certo $\bar{n}$ in modo che per $n > \bar{n}$, $-\infty < x < +\infty$ sia

$$|\bar{g}_n(x) - \bar{g}(x)| < \varepsilon/4 . \tag{7}$$

Applicando poi B_1 alla successione delle $f_n(x,\bar{y})$ determiniamo un $\bar{n}'$ in modo che per $n > \bar{n}'$, $-\infty < x < +\infty$ sia

$$|f_n(x,\bar{y}) - f(x,\bar{y})| < \varepsilon/4 . \tag{8}$$

Sia dunque il punto (x,y) interno ad S_1, indichiamo con n_1 il più grande tra $\bar{n}$ ed $\bar{n}'$ e supponiamo che per un qualunque $n\,(>n_1)$ sia ad esempio

$$\bar{g}_n(x) \leq f_n(x,y) \leq f_n(x,\bar{y}). \tag{9}$$

Avute presenti le (5), (7) ed (8) sarà

$$\begin{aligned} f_n(x,y) - f(x,y) &= \{f_n(x,y) - f_n(x,\bar{y})\} + \{f_n(x,\bar{y}) - f(x,y)\} + \\ &+ \{f(x,\bar{y}) - f(x,y)\} \leq \{f_n(x,\bar{y}) - f(x,\bar{y})\} + \\ &+ \{f(x,\bar{y}) - f(x,y)\} < \varepsilon/4 + \varepsilon/4 < \varepsilon , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x,y) - f_n(x,y) &= \{f(x,y) - \bar{g}(x)\} + \{\bar{g}(x) - \bar{g}_n(x)\} + \\ &+ \{\bar{g}_n(x) - f_n(x,y) \leq \{f(x,y) - \bar{g}(x)\} + \\ &+ \{\bar{g}(x) - \bar{g}_n(x)\} < \varepsilon/4 + \varepsilon/4 < \varepsilon \end{aligned}$$

e quindi resta stabilita la validità della (6) anche per S_1 $(-\infty < x < +\infty\,;\, y \leq \bar{y})$ nell'ipotesi (9); è chiaro poi come si dovrà procedere se in luogo delle (9) valgono le disuguaglianze contrarie.

4. Estendendo il risultato di Pólya già citato, Cantelli [6] sostituisce all'ipotesi della continuità della funzione limite $g(x)$ quella della convergenza per $n \to \infty$ delle funzioni $g_n(x-0)$, $g_n(x+0)$ rispettivamente verso $g(x-0)$, $g(x+0)$ dove

$$g_n(x-0) \equiv \lim_{h \to +0} g_n(x-h), \text{ ecc.}$$

(6) Ved. F. P. Cantelli, « Giorn. Ist. Ital. Attuari », IV, n. 3, luglio 1933, pp. 421–424; « Ann. Sc. Inst. Poincaré », 5 (1935), p. 7; cfr. anche M. Fréchet, *Récherches théoriques modernes sur la théorie des probabilités*, Paris, 1937, p. 275 e segg.; G. Sansone, *Sviluppi in serie di funzioni ortogonali*, 2ª ed. Bologna, 1946, p. 454 e segg.

Questa proprietà, che si riferisce alle funzioni monotone di una sola variabile, non è più valida nel campo delle funzioni di due variabili da me considerate, come mostra il seguente esempio. Definiamo le funzioni $f_n(x,y)$, $(n = 1, 2, \cdots)$ nel quadrato $Q\,(0 \leq x \leq 1\ ;\ 0 \leq x \leq 1)$ ponendo $f_n = 0$ per $x < y$, $f_n = 1$ per $x > y$ e ponendo poi, per $x = y$, $f_n = 1$ se $0 \leq x = y \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$, $f_n = -2nx + n$ se $\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \leq x = y \leq \frac{1}{2}$ ed infine $f_n = 0$ se $\frac{1}{2} \leq x = y \leq 1$. Ciascuna delle f_n così definite è in Q una funzione M, anzi monotona in senso ordinario e per di più anche linearmente monotona. Per $n \to \infty$ le f_n convergono verso una funzione limite f la quale è $= 0$ per $x < y$ e per $\frac{1}{2} \leq x = y \leq 1$ ed $= 1$ per $x > y$ e per $0 \leq x = y < \frac{1}{2}$.

Si vede subito che la convergenza *non* è uniforme, nonostante la natura molto particolare delle f_n e malgrado che si abbia

1° la convergenza delle $f_n(x-0, y)$, $f_n(x+0, y)$, $f_n(x, y-0)$, $f_n(x, y+0)$ rispettivamente verso $f(x-0, y)$, $f(x+0, y)$, $f(x, y-0)$, $f(x, y+0)$;

2° la convergenza dei « salti » nel senso di Price [7] delle f_n (tutti eguali ad 1) attraverso il segmento di discontinuità $x = y$, verso il corrispondente « salto » della f (anch'esso eguale ad 1).

Matematica (Geometria). — *Due problemi variazionali nella teoria metrica delle superficie rigate* [*]. Nota di GIACOMO SABAN, presentata [**] dal Corrisp. B. SEGRE.

1. Nella presente Nota estendo alla teoria metrica delle superficie rigate la risoluzione di due problemi di variazione della teoria classica delle curve sghembe.

Il primo di questi consiste nello studio della variazione prima dell'arco sferico [1] dualistico [2] S d'una rigata, e conduce ad alcuni teoremi nuovi per parti-

(7) Ved. loc. cit. in (3), p. 943.

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta del 12 febbraio 1949.

(1) La variazione prima dell'arco s d'una curva, piana o sghemba, è definita come la differenza fra le lunghezze d'arco della curva considerata C e d'una curva infinitamente vicina; essa vale

$$\delta s = -\int_{s_1}^{s_2} \rho \cdot \delta n \cdot ds$$

qualora le due curve abbiano in comune i punti s_1 ed s_2 della curva C, ove ρ e ds denotino rispettivamente curvatura ed elemento d'arco di questa curva, e δn sia la distanza fra le due curve proiettata sulla normale principale della C. Cfr. W. BLASCHKE, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, Bd. I, pp. 50-53, Springer, Berlin (1930).

(2) Sul metodo dualistico per lo studio delle rigate cfr. W. BLASCHKE, op. cit., pp. 267 e sg. e G. SABAN, *Alcune limitazioni integrali nella teoria metrica delle rigate*, « Rend. Accad. Naz. Lincei », ser. 8ª, vol. V, pp 24-30, dove anche si trova (nota (5)) una più ampia bibliografia.

colari tipi di superficie; il secondo problema concerne invece la ricerca degli estremali del funzionale

$$J = \int \Phi(\sigma) \cdot dS,$$

dove Φ è una funzione dualistica nota della curvatura sferica dualistica σ ed S denota l'arco sferico dualistico. È questa un'ovvia estensione del problema di Radon [3] per le curve sghembe, per la quale dimostro che la soluzione si ottiene ancora mediante un numero finito di quadrature.

I.

2. Consideriamo una superficie rigata qualsiasi $\mathfrak{R}$, definita dal vettore dualistico $\vec{G}_1(s)$ (dove s, parametro delle generatrici della rigata, è l'arco dell'indicatrice sferica delle generatrici), e la superficie rigata $\mathfrak{R}^*$, definita invece dal vettore dualistico

$$\vec{G}_1^* = \vec{G}_1 + U\vec{G}_2 + V\vec{G}_3 \text{ [4]},$$

con U e V funzioni dualistiche di s, infinitamente piccole ed omogenee in una variabile η, sicchè per η tendente a zero la rigata $\mathfrak{R}^*$ si confonderà con la rigata $\mathfrak{R}$: allora può assumersi $U = \eta\overline{U}(s)$ e $V = \eta\overline{V}(s)$, e quindi

$$\vec{G}_1^* = \vec{G}_1 + \eta\vec{H} = \vec{G}_1^*(s) \quad \text{con} \quad \vec{H} = \overline{U}\vec{G}_2 + \overline{V}\vec{G}_3.$$

Determiniamo ora la lunghezza d'arco sferico dualistico della rigata $\mathfrak{R}^*$:

$$S^* = \int_0^s \sqrt{\left[\frac{d\vec{G}_1^*}{ds}\right]^2} \cdot ds = \int_0^S \sqrt{\left[\frac{d\vec{G}_1^*}{dS}\right]^2} \cdot dS;$$

considerando lo sviluppo in serie di S^*, ordinato secondo le potenze successive di η, chiameremo variazione prima della lunghezza d'arco sferico dualistico della rigata $\mathfrak{R}$ il termine lineare in η di questo sviluppo, e lo denoteremo con δS. Indicando con un punto posto in alto a destra la derivazione rispetto ad S, si ha subito [5]

$$\frac{dS^*}{dS} = 1 + \eta\vec{G}_1^{\cdot} \cdot \vec{H}^{\cdot} + \cdots = 1 + (U^{\cdot} - V\sigma) + \cdots,$$

(3) Il problema di Radon consiste, nel caso delle curve, nella ricerca degli estremali di

$$j = \int \varphi(\rho) \cdot ds$$

dove φ è una funzione nota della curvatura ρ della curva, di cui ds è l'elemento d'arco.

(4) Si verifica facilmente che questa è l'espressione della retta generica $\vec{G}_1^*$, infinitamente vicina alla G_1.

(5) Facendo uso delle formule di derivazione seguenti:

$$\vec{G}_1^{\cdot} = \vec{G}_2 \quad , \quad \vec{G}_2^{\cdot} = -\vec{G}_1 + \sigma G_3 \quad , \quad \vec{G}_3^{\cdot} = -\sigma\vec{G}_2,$$

per le quali cfr. K. Erim, *Die höheren Differentialelemente einer Regelflaeche und einer Raumkurve*, «Revue Fac. Scien. Université d'Istanbul», vol. X, pp. 1-24 (1945), e G. Saban, *Raccordement d'ordre élevé de deux surfaces réglées*, «Revue Fac. Scien. Université d'Istanbul», vol. XIII, pp. 78-96 (1948).

onde

$$S^* = S + \int_0^S (U' - V\sigma) \cdot dS + \cdots$$

ed infine [6]

$$\delta S = [+ U]_0^S - \int_0^S \sigma \cdot V \cdot dS .$$

Se però le rigate $\mathfrak{R}$ ed $\mathfrak{R}^*$ hanno in comune le due generatrici distinte corrispondenti ai valori o ed S, ed è dunque $U(o) = U(S) = o$, sparisce dalla formula precedente il primo termine a secondo membro: notando inoltre che la quantità V misura il coseno dell'angolo dualistico fra $\vec{G}_1^*$ e $\vec{G}_3$, quantità infinitamente piccola che si può indicare con δV, si arriva alla formula definitiva

$$\delta S = - \int_0^S \sigma \cdot \delta V \cdot dS ,$$

perfettamente analoga all'espressione della variazione prima della lunghezza d'arco d'una curva. Questa formula, a sua volta, si scinde nelle sue parti reale e dualistica:

$$\delta s = - \int_0^s q \cdot \delta v \cdot ds \quad , \quad \delta \int_0^s \lambda \cdot ds = - \int_0^s (w \cdot \delta v + q \cdot \delta \bar{v}) \cdot ds ;$$

queste relazioni forniscono la variazione della lunghezza d'arco dell'indicatrice e del parametro distributore integrale, ed in esse δv e $\delta \bar{v}$ sono rispettivamente la parte reale e la parte dualistica di δV, e q e w quelle di σ.

3. Consideriamo ora una congruenza di rette, e due raggi generici di essa: cerchiamo la variazione prima dell'arco sferico dualistico d'una rigata generica della congruenza compresa fra questi due raggi.

Si sa che nella teoria classica, se si considera una curva $\mathcal{C}$ appartenente ad una superficie $\mathcal{S}$ e si calcola la variazione δs dell'arco quando la curva $\mathcal{C}^*$ infinitamente vicina a $\mathcal{C}$ è ancora sulla superficie, l'espressione di δs va modificata, e bisogna sostituire alla curvatura ρ di $\mathcal{C}$ la curvatura geodetica ρ_g di $\mathcal{C}$ su $\mathcal{S}$.

Nel campo dualistico, invece, la formula δS rimane immutata, d'accordo col fatto [7] che σ funge, anche da curvatura geodetica dualistica. Ponendo allora $\delta S = o$, si ha la condizione per l'equivalente dualistico d'una geodetica, cioè per

(6) I particolari del calcolo si verificano facilmente seguendo il testo citato del BLASCHKE, pp. 50–51.

(7) Cfr. W. BLASCHKE, op. cit, pp. 280-281 e G. SABAN, *Alcune limitazioni integrali nella teoria delle congruenze rettilinee.* «Rend. Accad. Naz. Lincei», ser. 8ª, vol. V, pp. 134–139.

la rigata della congruenza passante per i due raggi inizialmente, scelti ed avente arco sferico dualistico estremo. Evidentemente tale condizione equivale a

$$\sigma = 0;$$

dalle formule fondamentali si deduce che $\vec{G}_3$ è costante e, poichè la generatrice $\vec{G}_1$ della $\mathfrak{R}$ rimane normale ad una retta fissa con cui ha un'intersezione reale, la superficie rigata $\mathfrak{R}$ è un conoide retto. Arriviamo così al seguente teorema:

Dati due raggi generici d'una congruenza, fra le infinite rigate della congruenza comprese fra essi, i conoidi retti sono le rigate che rendono estremi la lunghezza d'arco dell'indicatrice sferica delle generatrici ed il parametro distributore integrale.

4. I calcoli del n. 2 si possono integralmente ripetere se le funzioni U e V hanno la forma

$$U = \varepsilon f(s), \quad V = \varepsilon g(s),$$

f e g essendo due funzioni reali e finite di s. $\vec{G}_1$ è allora una retta parallela alla $\vec{G}_1$, che dista dai piani $(\vec{G}_1, \vec{G}_2)$ (piano asintotico) e $(\vec{G}_3, \vec{G}_1)$ (piano tangente centrale) precisamente delle quantità f e g; la formula della variazione prima diventa allora

$$\delta S = -\varepsilon \int_0^S \sigma \cdot g \cdot dS,$$

sicchè la variazione prima risulta una quantità puramente dualistica. Per costruzione, le rigate $\mathfrak{R}$ ed $\mathfrak{R}^*$ hanno identica l'indicatrice delle generatrici (ed evidentemente $\delta s = 0$), mentre la prima variazione del parametro distributore integrale è

$$\delta \int_0^s \lambda \cdot ds = -\int_0^s q \cdot g \cdot ds.$$

Se la rigata $\mathfrak{R}$ ha $q = 0$,

$$\delta \int_0^s \lambda \cdot ds = 0;$$

in questo caso, come risulta dalle formule fondamentali, il versore di $\vec{G}_3$ è costante, e dunque la generatrice della $\mathfrak{R}$ si mantiene parallela al piano cui questo versore $\vec{g}_3$ è normale: $\mathfrak{R}$ è allora una superficie a piano direttore. Pertanto

Due rigate a piano direttore $\mathfrak{R}$ ed $\mathfrak{R}^*$, in corrispondenza tale che generatrici omologhe siano parallele, ed aventi in comune una coppia di generatrici distinte, hanno identico parametro distributore integrale per le loro porzioni continue comprese fra queste generatrici.

Data una rigata $\mathfrak{R}$ a piano direttore, si consideri come superficie $\mathfrak{R}^*$ il suo cono delle parallele per un punto alle sue generatrici, che in questo caso si riduce

ad un piano. In virtù del teorema precedente, $\mathfrak{R}$ ed $\mathfrak{R}^*$ hanno identico parametro distributore integrale se hanno in comune una coppia di generatrici distinte. All'uopo è necessario che la $\mathfrak{R}$ abbia almeno una coppia di generatrici aventi un punto d'intersezione in comune: diremo che una superficie rigata che verifichi tale condizione ha una s e z i o n e p i a n a. Poichè una rigata piana ha $\lambda = 0$ in ogni generatrice, ne consegue che:

Se una superficie rigata ha un piano direttore ed una sezione piana, il parametro distributore integrale per la sua porzione continua delimitata da questa sezione è nullo.

II.

5. Consideriamo la superficie rigata $\mathfrak{R}$, di generatrice $\vec{G}_1$ e curvatura sferica dualistica σ, e calcoliamo l'incremento di σ quando dalla rigata $\mathfrak{R}$ si passa alla rigata $\mathfrak{R}^*$, di generatrice $\vec{G}_1^*$ infinitamente vicina a $\vec{G}_1$. Essendo

$$\sigma^* = \frac{\left(\vec{G}_1^*, \vec{G}_1', \vec{G}_1^{*\prime}\right)}{\left(\vec{G}_1^{*\prime 2}\right)^{3/2}},$$

dalla

$$\vec{G}_1^* = \vec{G}_1 + \eta \vec{H} \quad \text{con} \quad \vec{H} = \overline{U}\vec{G}_2 + \overline{V}\vec{G}_3$$

si deduce

$$\sigma^* = \frac{\sigma + \eta\left[(\overline{V}' + \overline{U}\sigma)' + 2\sigma(\overline{U}' - \overline{V}\sigma) + \overline{V}\right] + \cdots}{\left[1 + 2\eta(\overline{U}' - \overline{V}\sigma) + \cdots\right]^{3/2}}$$

$$= \sigma + \eta\left[(\overline{V}' + \overline{U}\sigma)' + 2\sigma(\overline{U}' - \overline{V}\sigma) + \overline{V} - 3\sigma(\overline{U}' - \overline{V}\sigma)\right] + \cdots$$

La variazione prima della curvatura sferica dualistica, definita come

$$\delta\sigma = \eta \lim_{\eta \to 0} \frac{\sigma^* - \sigma}{\eta},$$

è dunque

$$\delta\sigma = (V' + U\sigma)' - \sigma(U' - V\sigma) + V$$

ossia

$$\delta\sigma = \sigma^2 V - \sigma U' + \frac{d}{dS}(V' + \sigma U) + V,$$

formula questa notevolmente vicina a quella della variazione prima delle due curvature d'una curva sghemba ordinaria [8].

6. Sia ora Φ una funzione nota di σ: il problema variazionale di J. Radon – generalizzato alle superficie rigate – consiste nel determinare le superficie per cui l'integrale

$$J = \int \Phi(\sigma) \cdot dS$$

(8) Cfr. W. BLASCHKE, op. cit., pp. 50-52, e G. HAMEL, «Sitzgsber. Berl. Math. Ges.», Bd. 16, ser. 5ª (1917).

diventa estremo, ove S sia noto [9] e siano state fissate le due generatrici limiti dell'integrale.

Si consideri ancora la rigata $\mathfrak{R}$ e la rigata infinitamente vicina $\mathfrak{R}^*$, di arco sferico dualistico S*. Calcolando per la $\mathfrak{R}^*$ l'integrale corrispondente J*, si determini la variazione prima di J quale termine lineare in η_i dello sviluppo in serie di potenze rispetto ad η dell'integrale J*. Essendo

$$dS = (1 + U^{\cdot} - \sigma V) \cdot dS + \cdots,$$

$$J^* = \int \Phi(\sigma^*) \cdot dS^* = \int \Phi(\sigma + \delta\sigma) \cdot (1 + U^{\cdot} - \sigma V) \cdot dS + \cdots,$$

tenuto conto che tutte le integrazioni vanno effettuate fra due generatrici comuni ad $\mathfrak{R}$ ed $\mathfrak{R}^*$ (in ciascuna delle quali U, V e V· sono nulli), ed usando dell'integrazione per parti, si ha infine

$$\delta J = \int \left[\left\{ (1 + \sigma^2) \cdot \Phi' + \frac{d^2\Phi'}{dS^2} - \sigma\Phi \right\} \cdot V - \left(\Phi' \cdot \sigma^{\cdot} - \frac{d\Phi}{dS} \right) \cdot U \right] \cdot dS,$$

dove

$$\Phi' = \frac{d\Phi}{d\sigma}.$$

Le condizioni di estremo sono dunque:

$$(1 + \sigma^2) \cdot \Phi' + \frac{d^2\Phi'}{dS^2} - \sigma\Phi = 0,$$

$$\Phi' \cdot \sigma^{\cdot} - \frac{d\Phi}{dS} = 0,$$

la seconda delle quali è però sempre verificata identicamente. La prima si trasforma invece nella

$$(1 + \sigma^2) \cdot \Phi' - \sigma\Phi + \Phi'' \cdot \sigma^{\cdot 2} + \Phi' \cdot \sigma^{\cdot\cdot} = 0.$$

Tenuto conto della derivabilità di Φ rispetto a σ, con calcoli relativamente semplici ma laboriosi, si scinde tale equazione nelle

$$\cdot (1 + q^2) \cdot f_q(q) - q \cdot f(q) + f_{qq}(q) \cdot q^{\cdot 2} + f_q(q) \cdot q^{\cdot\cdot} = 0,$$

$$f(q) \cdot w^{\cdot\cdot} + a(q, q^{\cdot}, f_q, f_{qq}) \cdot w^{\cdot} + b(q, q^{\cdot\cdot}, f_q, f_{qq}, f_{qqq}, f) \cdot w = c(\lambda, \lambda^{\cdot}, q^{\cdot}, q^{\cdot\cdot}, f_q),$$

dove i punti in alto indicano derivazioni rispetto ad s, gli indici q denotano derivazioni rispetto a q, f è una funzione nota di q soltanto, a, b e c sono funzioni note degli argomenti indicati, q e w sono rispettivamente la parte reale e la parte dualistica di σ. Si vede immediatamente che la prima di queste due equazioni si riconduce ad un'equazione lineare, l'integrazione della quale fornisce

$$q = q(s)$$

(9) Dalla $\sigma = \sigma(S)$ non si possono ottenere che due equazioni reali, mentre, come hanno dimostrato i geometri della scuola francese, ne occorrono tre per determinare una superficie rigata. (Cfr. L. Biran, *Les surfaces réglées étudiées en analogie avec les courbes gauches.* «Revue Fac. Scien. Université d'Istanbul», vol. VI, pp. 121-134 (1941)). Onde risolvere il problema di Radon generalizzato non si può dunque dare soltanto σ, e si può invece fissare *a priori* S, ciò che equivale alla terza equazione reale, fornendo $\lambda = \lambda(s)$.

mediante un numero finito di quadrature. Poichè $\lambda = \lambda(s)$ ed $f = f(q)$ sono note, l'ultima equazione diventa della forma

$$f_q(s) \cdot w'' + a(s) \cdot w' + b(s) \cdot w = c(s)$$

e si integra quindi con metodi elementari. Pertanto:

Le superficie estremali del problema variazionale di Radon generalizzato, soluzioni cioè della

$$\delta \int \Phi(\sigma) \cdot dS = 0,$$

si ottengono tutte con un numero finito di quadrature.

Applichiamo questo teorema ad esempio. Sia

$$J = \int K \cdot dS,$$

dove $\Phi(\sigma) = K$ è una costante dualistica; si verifica immediatamente che il sistema di equazioni differenziali dà

$$q = 0 \quad , \quad w = 0$$

e quindi

$$\sigma = 0.$$

Le estremali del problema sono conseguentemente i conoidi della congruenza formata dalle rette che intersecano normalmente la perpendicolare comune alle due generatrici fra cui si integra: poichè è dato S, risulta determinato λ ed è dunque ben determinato un unico conoide estremale.

Geometria. — *Un nuovo riferimento intrinseco per le trasformazioni puntuali fra piani proiettivi.* Nota di ALDO ROLLERO, presentata (*) dal Socio G. LORIA.

1. I riferimenti intrinseci per le trasformazioni puntuali fra piani introdotti da E. Bompiani e M. Villa (1) si costruiscono, come è ben noto, partendo dalle nozioni di rette caratteristiche (inflessionali) e di proiettività caratteristiche; in ciascuno di detti riferimenti la determinazione degli assi x, y dipende da un'equazione di 3° grado.

In quanto segue, basandomi su un recentissimo risultato di E. Bompiani (2), stabilisco un nuovo riferimento intrinseco, a cui può giungersi indipendentemente dalle nozioni di rette caratteristiche e di proiettività caratteristiche e per il quale

(*) Nella seduta del 12 febbraio 1949.

(1) Fra i molti lavori inerenti all'argomento, si veda: E. BOMPIANI, *Sulle trasformazioni puntuali fra piani proiettivi*. «Atti Acc. d'Italia», Memorie, vol. XIII, p. 837 (1942); M. VILLA, *Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari*. Nota I e II, «Rend. Acc. Lincei», pp. 55, 192 (1948).

(2) V. E. BOMPIANI, *Sulle corrispondenze puntuali fra spazi proiettivi*. «Rend. Acc. Lincei», 1949.

la determinazione degli assi x, y è un problema di 2° grado (l'irrazionalità cubica compare qui soltanto nella determinazione del punto unità); inoltre detto riferimento dà luogo ad una forma canonica particolarmente semplice delle equazioni della trasformazione.

2. Sia data, fra due piani proiettivi π e $\bar{\pi}$, una trasformazione puntuale T generica e regolare negli intorni di due punti corrispondenti O ed $\bar{O}$. Si riferiscano i due piani a due sistemi di coordinate proiettive non omogenee (x, y) per π ed $(\bar{x}, \bar{y})$ per $\bar{\pi}$ in modo che $O, \bar{O}$ siano i punti di coordinate (O, O). Negli intorni dei due punti considerati, assunte come rette $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 0$, $\bar{x} = \bar{y}$ quelle che la proiettività (subordinata dalla trasformazione T) fra i due fasci di centri O ed $\bar{O}$ fa corrispondere rispettivamente a $x = 0$, $y = 0$, $x = y$, le equazioni di T sono del tipo:

$$(1) \qquad \begin{cases} \bar{x} = ax + \varphi_2(x, y) + \varphi_3(x, y) + [4] \\ \bar{y} = ay + \psi_2(x, y) + \psi_3(x, y) + [4] \end{cases}$$

con $a \neq 0$ e:

$$\varphi_2(x, y) = a_{20} x^2 + a_{11} xy + a_{02} y^2 \quad ; \quad \varphi_3(x, y) = a_{30} x + a_{21} x^2 y + a_{12} xy^2 + a_{03} y^3 ;$$
$$\psi_2(x, y) = b_{20} x^2 + b_{11} xy + b_{02} y^2 \quad ; \quad \psi_3(x, y) = b_{30} x + b_{21} x^2 y + b_{12} xy^2 + b_{03} y^3 .$$

Siano r_k, r_m due *generiche* rette di π uscenti da O, fra loro distinte, rappresentate mediante le equazioni: $y = kx$, $y = mx$ $(k \neq m)$. Come risulta dal lavoro di E. Bompiani (3) alla coppia di rette r_k, r_m è associata la proiettività fra i due piani $\pi, \bar{\pi}$ (determinata dagli intorni del 2° ordine di $O, \bar{O}$ nella trasformazione T) rappresentata dalle equazioni:

$$(2) \qquad \begin{cases} \bar{x} = a^2 (k - m)^2 x \\ \bar{y} = a^2 (k - m)^2 y \\ \bar{z} = -\{k^2 \varphi_2(1, m) + m^2 \varphi_2(1, k) - k\psi_2(1, m) - m\psi_2(1, k)\} x + \\ \quad + \{k\varphi_2(1, m) + m\varphi_2(1, k) - \psi_2(1, m) - \psi_2(1, k)\} y + a (k - m)^2 z \end{cases}$$

ove x, y, z $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ sono coordinate omogenee per i punti di π $(\bar{\pi})$.

Sia T* una *qualsiasi* trasformazione puntuale fra i due piani $\pi, \bar{\pi}$, la quale muti O in $\bar{O}$, sia regolare negli intorni dei punti O ed $\bar{O}$ ed inoltre *osculi* la trasformazione T in $O, \bar{O}$.

Si considerino ancora le due rette r_k, r_m e siano $\bar{E}_3^{(k)}$, $\bar{E}_3^{(m)}$ i due E_3 *non di flesso*, di origine $\bar{O}$ e giacenti in $\bar{\pi}$, che la trasformazione T* fa corrispondere rispettivamente ai due E_3 di flesso (di seconda specie):

$$y = kx + [4]_x \quad , \quad y = mx + [4]_x$$

con origine in O e giacenti in π; sia $\bar{p}$ la retta dei flessi della cubica nodata (di $\bar{\pi}$) che contiene $\bar{E}_3^{(k)}$, $\bar{E}_3^{(m)}$.

(3) Ved. la seconda delle citate Note di E. Bompiani; le formole che, in detta Nota, rappresentano la proiettività in questione, coincidono con le (2) qualora si faccia $a = 1$.

Analogamente siano $E_3^{(k)}$, $E_3^{(m)}$ i due E_3 *non di flesso*, di origine O e giacenti in π, che la trasformazione T* fa corrispondere rispettivamente ai due E_3 di flesso (di seconda specie):

$$\bar{y} = k\bar{x} + [4]_{\bar{x}} \quad , \quad \bar{y} = m\bar{x} + [4]_{\bar{x}}$$

con origine in $\overline{O}$ e giacenti in $\bar{\pi}$; sia p la retta dei flessi della cubica nodata (di π) che contiene $E_3^{(k)}$, $E_3^{(m)}$.

Se T è, come s'è supposto, generica negli intorni di O, $\overline{O}$, esiste *una ed una sola* coppia di rette r_k^*, r_m^*, *distinte*, uscenti da O, per la quale le rette p; $\bar{p}$ precedentemente considerate si corrispondono nella proiettività (2); eseguendo gli opportuni calcoli si trova che r_k^*, r_m^* si rappresentano mediante le equazioni: $y = p_k x$, $y = p_m x$, ove p_k, p_m sono le radici della:

$$(3) \qquad [(a_{11} - b_{02})^2 - 3\, a_{02}\,(a_{20} - b_{11})]\, p^2 +$$
$$+ [(a_{11} - b_{02})\,(a_{20} - b_{11}) + 9\, a_{02}\, b_{20}]\, p + [(a_{20} - b_{11})^2 + 3\, b_{20}\,(a_{11} - b_{02})] = 0.$$

Gioverà osservare che r_k^*, r_m^* dipendono esclusivamente dagli intorni del *secondo* ordine di O, $\overline{O}$ nella trasformazione T; inoltre non è difficile dimostrare che ciascuna delle r_k^*, r_m^* forma, dopo le tre rette caratteristiche uscenti da O, una quaterna equianarmonica.

3. Per comodità supporrò che le radici della (3) siano (oltre che, naturalmente, distinte) anche *reali*. Assunta una delle rette r_k^*, r_m^* come asse x e l'altra come asse y, dalla (3) segue:

$$(4) \qquad \begin{cases} (a_{11} - b_{02})^2 = \quad 3\, a_{02}\,(a_{20} - b_{11}) \\ (a_{20} - b_{11})^2 = -3\, b_{20}\,(a_{11} - b_{02}). \end{cases}$$

Non può essere:

$$(5) \qquad a_{11} - b_{02} = 0 \quad , \quad a_{20} - b_{11} \neq 0$$

giacchè, se valessero le (5), la (3) sarebbe indeterminata; almeno una delle espressioni $a_{11} - b_{02}$, $a_{20} - b_{11}$ deve quindi annullarsi, ed anzi, come segue dalle (4) devono annullarsi entrambe. Risulterà quindi $b_{02} = a_{11}$, $b_{11} = a_{20}$, ma $a_{02} \neq 0$, $b_{20} \neq 0$, giacchè la (3) non deve essere indeterminata.

Per completare il riferimento intrinseco occorre passare agli intorni del 3° ordine di O, $\overline{O}$ in T: precisamente si considerino i due E_3 (flessi di seconda specie) $\bar{y} = [4]_{\bar{x}}$, $\bar{x} = [4]_{\bar{y}}$ e gli E_3 non di flesso che la T fa loro corrispondere in π: esiste una cubica C^3 di π, contenente i due E_3 non di flesso considerati; assumendo la retta dei flessi di C^3 come retta all'∞ di π segue:

$$a_{20}\, b_{20} - a b_{30} = 0 \quad , \quad a_{11}\, a_{02} - a a_{03} = 0.$$

Analogamente si considerino in π i due E_3 (flessi di seconda specie) $y = [4]_x$, $x = [4]_y$ e gli E_3 non di flesso che T fa loro corrispondere in $\bar{\pi}$; esiste una cubica $\bar{C}^3$ di $\bar{\pi}$ contenente i due E_3 non di flesso testè considerati, ed assumendo la sua retta dei flessi come retta all'∞ di $\bar{\pi}$ risulta $a_{20} = a_{11} = 0$. Considerate

le coniche osculatrici in O ai due rami della C^3 di π, trovata nel presente n. 3, esse si intersecano, oltre che in O, in tre punti distinti (ciascuno dei quali, anzi, sta su una delle rette caratteristiche uscenti da O); assunto uno di questi tre punti, ad esempio quello reale, come punto unità di π, risulta: $a_{02} + a = 0$, $b_{20} + a = 0$. Analogamente considerate le coniche osculatrici in $\overline{O}$ ai due rami della $\overline{C}^3$, esse si intersecano, oltre che in $\overline{O}$, in tre punti distinti; assunto uno di essi (quello reale) come punto $(-1, -1, 1)$ di $\overline{\pi}$ si ha $a_{02} + a^2 = 0$, $b_{20} + a^2 = 0$. Si sono così determinati completamente i riferimenti in $\pi, \overline{\pi}$ e risulta $a = 1$, $a_{02} = b_{20} = -1$, $a_{20} = a_{11} = b_{30} = a_{03} = 0$. Le equazioni canoniche della trasformazione pertanto si scrivono:

$$\begin{cases} \overline{x} = x - y^2 + a_{30} x^3 + a_{21} x^2 y + a_{12} xy^2 + [4] \\ \overline{y} = y - x^2 + b_{21} x^2 y + b_{12} xy^2 + b_{03} y^3 + [4]. \end{cases}$$

Meccanica. — *Sulla indeterminazione del tensore energetico nello spazio–tempo.* Nota di Paolo Udeschini, presentata (*) dal Corrisp. B. Finzi.

L'energia di un sistema non è mai univocamente definita; essa costituisce uno scalare interpretabile come il patrimonio di un sistema a spese del quale questo può compiere lavoro. Non dunque l'energia ha significato fisico, ma tale significato compete alla differenza di energia corrispondente a due diversi stati del sistema, differenza che uguaglia il lavoro compiuto dal sistema stesso.

Pure significato fisico compete alle derivate dell'energia rispetto alle coordinate di stato, derivate che dànno le forze in senso generale.

Ciò è ben noto nel caso meccanico e nel caso termodinamico in cui appunto l'energia è rappresentata da uno scalare.

Nel caso più generale lo stato energetico di un sistema è caratterizzato da un insieme di indici di stato, costituenti un tensore doppio simmetrico dello spazio–tempo, le cui derivate, o meglio la cui divergenza dà le azioni ponderomotrici. Questo tensore, che si dice energetico, non è però in generale univocamente determinato, ma è definito a meno di un tensore doppio arbitrario a divergenza nulla, la cui arbitrarietà non porta alcuna conseguenza per le azioni ponderomotrici e neppure per il teorema di conservazione dell'energia.

Nel caso di materia disgregata tra i cui elementi non si esercita alcuna azione nè gravitazionale nè elettromagnetica, la conoscenza della densità materiale k in ogni punto e in ogni istante permette di costruire il tensore energetico

$$T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha} = c^2 k \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3).$$

È questo un tensore dello spazio–tempo pseudoeuclideo, la cui metrica nell'ordinario riferimento è: $ds^2 = dx_0^2 - (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$ dove $x_0 = ct$ (c velocità della

(*) Nella seduta dell'8 gennaio 1949.

luce) è la coordinata temporale e x_1, x_2, x_3 le coordinate cartesiane spaziali. Nell'ordinario riferimento: T^{oo} è la densità di energia equivalente alla massa distribuita, T^{oj} $(j = 1, 2, 3)$ sono le componenti di un vettore spaziale proporzionale alla densità di quantità di moto, e T^{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ sono le componenti di un tensore spaziale doppio simmetrico che rappresenta la densità di energia dovuta al movimento della materia.

Le equazioni meccaniche si traducono nell'unica: divergenza del tensore energetico uguale a zero, e quindi il tensore arbitrario solenoidale, che può sempre aggiungersi al tensore precedente, non porta alcuna arbitrarietà nelle equazioni meccaniche. Che se tra gli elementi della materia disgregata si esercitano soltanto azioni gravitazionali, ancora le equazioni meccaniche si traducono nell'unica: divergenza del tensore energetico uguale a zero, in uno spazio–tempo però non più pseudo–euclideo, e ancora l'indeterminazione del tensore energetico non ha alcun effetto diretto sulle equazioni meccaniche. Ha però influenza, *a priori*, sulla determinazione della metrica del cronotopo, attraverso le equazioni gravitazionali: $A^{\alpha\beta} + \lambda T^{\alpha\beta} = 0$ $(\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3)$; dove $A^{\alpha\beta}$ è il tensore gravitazionale costruito col tensore di Riemann che dà le curvature dello spazio–tempo e λ è una costante gravitazionale universale. Se però supponiamo, come si esige in relatività, che in assenza di materia il cronotopo sia pseudo–euclideo, il tensore di Riemann è nullo, e nullo è pure il tensore gravitazionale $A^{\alpha\beta}$ e quindi deve annullarsi anche il tensore energetico. L'arbitrarietà di questo viene perciò limitata nel senso che le componenti del tensore devono annullarsi in assenza di materia. Ma c'è di più, se si vuole che in prima approssimazione una delle equazioni gravitazionali (quella che nell'ordinario riferimento spazio–temporale si ottiene ponendo uguale a zero i due indici dei tensori) si riduca all'equazione di Poisson, una componente del tensore solenoidale arbitrario (quella con due indici uguali allo zero) deve annullarsi in prima approssimazione.

Il tensore arbitrario solenoidale non può dunque portare nelle equazioni gravitazionali che termini di secondo ordine rispetto a quelli considerati nell'equazione di Poisson; appare quindi ragionevole di non tener conto di tale arbitrarietà quando si tratti di fenomeni puramente gravitazionali, conformemente al privilegio goduto dalle azioni gravitazionali nello spazio–tempo.

Se ora, anzichè i fenomeni gravitazionali, consideriamo i fenomeni elettromagnetici, nello spazio–tempo si definisce come tensore energetico un tensore doppio simmetrico $E^{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3)$ la cui divergenza dà le azioni ponderomotrici, e cioè le forze ponderomotrici elettrica e magnetica e la potenza specifica di corrente. Ordinariamente si assume come tensore dell'energia elettromagnetica un particolare, sia pure assai significativo, tensore la cui espressione viene suggerita da quella degli sforzi maxwelliani. Esso costituisce una particolare soluzione del sistema di equazioni che affermano essere la divergenza del tensore energetico uguale alle azioni ponderomotrici.

Ma la soluzione ispirata da Maxwell è un integrale particolare delle equazioni differenziali sopracitate e l'integrale generale si ottiene aggiungendo all'integrale particolare precedente, l'integrale generale dell'equazione omogenea che afferma essere la divergenza del tensore dell'energia elettromagnetica uguale a zero.

Quest'ultimo integrale è stato trovato da Finzi [1], cosicchè il più generale tensore energetico è somma di due parti: la prima è il tensore doppio simmetrico di Maxwell dello spazio–tempo e la seconda un tensore doppio simmetrico solenoidale dello spazio–tempo. Questa arbitrarietà se non porta conseguenza nella determinazione delle azioni ponderomotrici, porta notevoli conseguenze nella determinazione relativistica dello spazio–tempo e in particolare nel problema cosmologico.

Nell'ambito della relatività generale, consideriamo della materia non disgregata fra gli elementi della quale si esercitino sia azioni elettromagnetiche che azioni gravitazionali; è questo il caso più generale della fisica macroscopica. Introduciamo nel generico spazio–tempo riemanniano il tensore energetico totale, somma del tensore energetico $T^{\alpha\beta}$ corrispondente alla distribuzione della materia nello spazio e nel tempo e del tensore d'energia elettromagnetica, cambiato di segno $-E^{\alpha\beta}$, corrispondente all'energia attribuita alla materia nel campo elettromagnetico. È ben noto come la solenoïdalità nello spazio–tempo del tensore energetico totale esprima tutte le leggi a cui ubbidisce la materia nel suo movimento, quando fra i suoi elementi si esercitano sia azioni gravitazionali, sia azioni elettromagnetiche. Dunque, il tensore arbitrario solenoidale che entra nel tensore energetico totale, non porta alcuna alterazione nell'enunciato tensoriale delle leggi meccaniche ed elettromagnetiche e neppure ne porta nel teorema di conservazione dell'energia.

Alterate risultano invece le equazioni gravitazionali che determinano la metrica del cronotopo, quando sia assegnato il tensore energetico totale.

In questa Nota mostro come si può approfittare dell'arbitrarietà del tensore solenoidale per aggiungere al tensore energetico ordinario, un tensore solenoidale tale che la sua componente puramente temporale, nell'ordinario riferimento di uno spazio–tempo pseudoeuclideo, sia semplicemente proporzionale alla carica elettrica. Poichè la componente puramente temporale del tensore energetico totale si interpreta come densità di energia, ne viene che l'energia, invece di essere somma soltanto di un termine che dà l'energia elettrica, di uno che dà l'energia magnetica, di uno che esprime l'energia intrinseca dovuta alla massa, risulta somma dei termini precedenti e di un altro termine dipendente dalla carica elettrica.

1. Tensore dell'energia elettromagnetica. — È noto come il campo elettromagnetico nel microcosmo possa agevolmente inquadrarsi nell'ambito della relatività ristretta e in quello della relatività generale introducendo un unico tensore emisimmetrico dello spazio–tempo $F^{\alpha\beta} = -F^{\beta\alpha}$ $(\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3)$, che rappresenta i due vettori dello spazio tridimensionale forza elettrica e forza magnetica, funzioni del posto e del tempo; e mediante un vettore dello spazio–tempo j^{α} che rappresenta (a meno del fattore 4π) l'insieme formato dalla densità elettrica ρ e dalla densità di corrente di convezione ρV_i $(i = 1, 2, 3)$, che rappresenta quindi la distribuzione di elettricità nello spazio e nel tempo. Componendo i due fattori elettromagnetici dello spazio–tempo, cioè il tensore emisimmetrico $F_{\alpha\beta}$

(1) B. Finzi, *Integrazione delle equazioni indefinite della meccanica dei sistemi continui*. « Rend. Acc. Lincei », vol. XIX, 1934.

e il vettore j^β, si ottiene un vettore K_α[2]: $F_{\alpha\beta}\, j^\beta = K_\alpha$. Il vettore K_α riassume la potenza specifica di corrente e le forze ponderomotrici per unità di volume. Nello spazio-tempo pseudo-euclideo, nell'ordinario riferimento, le componenti del vettore K_α hanno il seguente significato: la componente K_0 è proporzionale alla potenza specifica di corrente (di convezione) π, mentre K_1, K_2, K_3, sono le componenti cartesiane del vettore spaziale che rappresenta la somma della forza ponderomotrice elettrica e di quella magnetica per unità di volume.

Come nella statica dei corpi continui la forza esterna per unità di volume è un vettore spaziale che uguaglia la divergenza di un significativo tensore doppio simmetrico, il tensore degli sforzi, così nel campo elettromagnetico il vettore spazio-temporale K_α, può sempre interpretarsi come divergenza di un tensore doppio simmetrico dello spazio-tempo $E_{\alpha\beta} = E_{\beta\alpha}$ $(\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3)$, il tensore di energia elettromagnetica:

$$E_{\alpha\beta}{}^{/\beta} = K_\alpha \qquad (1)$$

Assegnato K_α, l'equazione tensoriale precedente ammette infinite soluzioni per $E^{\alpha\beta}$ (quattro equazioni scalari nelle dieci incognite componenti nel tensore simmetrico $E^{\alpha\beta}$). Un integrale particolare dell'equazione lineare (1), di grande interesse per il suo significato fisico, suggerito dall'espressione degli sforzi maxwelliani, è dato dal tensore doppio simmetrico $M_{\alpha\beta}$, che ordinariamente si assume come tensore dell'energia elettromagnetica, costruito mediante il tensore elettromagnetico $F_{\alpha\beta}$ nel modo seguente: $M_{\alpha\beta} = F_{\alpha\gamma}\, F^\gamma{}_\beta + a_{\alpha\beta}\, F^{\gamma\delta}\, F_{\gamma\delta}$, dove $a_{\alpha\beta}$ è il tensore fondamentale dello spazio-tempo. Nell'ordinario riferimento, le componenti del tensore $M_{\alpha\beta}$ si esprimono mediante le componenti cartesiane dei vettori spaziali forza elettrica e forza magnetica. M_{00} rappresenta la densità di energia elettromagnetica w, M_{0i} $(i = 1, 2, 3)$ sono, a meno del moltiplicatore c, le componenti del vettore raggio di Pointing r_i, le componenti puramente spaziali M_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ sono quelle di un tensore spaziale doppio simmetrico: il tensore di Maxwell.

Nel caso generale, in un riferimento qualsivoglia, non si può attribuire il significato fisico alle singole componenti dei tensori considerati, ma tale significato spetta soltanto agli invarianti con esse formati. Ricordo che non soltanto è nullo l'invariante lineare del tensore elettromagnetico $F_{\alpha\beta}$ (data l'emisimmetria), ma è pure nullo l'invariante lineare del tensore energetico $M_{\alpha\beta}$. L'invariante quadratico $F_{\alpha\beta}\, F^{\alpha\beta}$ del tensore elettromagnetico rappresenta l'azione elettromagnetica.

2. INDETERMINAZIONE DEL TENSORE ENERGETICO. — Il tensore energetico $M_{\alpha\beta}$ costituisce indubbiamente una significativa soluzione del sistema lineare (1), ma è pur sempre un integrale particolare. L'integrale generale si ottiene aggiungendo a quello particolare l'integrale generale dell'equazione omogenea $E_{\alpha\beta}{}^{\beta} = 0$. Quest'ultimo nello spazio-tempo, pseudo-euclideo, si esprime così[3]:

$E_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\rho\sigma\mu}\, \varepsilon_{\beta\gamma\delta\nu}\, \chi^{\rho\sigma\gamma\delta}{}_{,\mu\nu}$ dove $\varepsilon_{\alpha\rho\sigma\mu}$ è il tensore di Ricci e $\chi^{\rho\sigma\gamma\delta}$ è un tensore quadruplo arbitrario. Il tensore dell'energia elettromagnetica non è dunque univo-

(2) Cfr. FINZI-PASTORI, *Calcolo tensoriale e applicazioni*, Bologna, 1949.
(3) Cfr. B. FINZI, loco prima citato.

camente determinato, ma lo è a meno di un tensore doppio simmetrico a divergenza nulla, il quale non altera le azioni ponderomotrici, non altera le equazioni elettromagnetiche [4].

Possiamo pertanto considerare il tensore di energia elettromagnetica $E_{\alpha\beta}$ somma di due parti: $E_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta} + C_{\alpha\beta}$, dove $M_{\alpha\beta}$ rappresenta l'ordinario tensore di energia elettromagnetica (suggerito dalla soluzione particolare di Maxwell) e $C_{\alpha\beta}$ è un tensore solenoidale il quale nello spazio-tempo pseudo-euclideo ha l'espressione:

$$C_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\varrho\sigma\mu}\,\varepsilon_{\beta\gamma\delta\nu}\,\chi^{\varrho\sigma\gamma\delta}{}_{,\mu\nu} \tag{2}$$

Introducendo nello spazio-tempo il tensore doppio simmetrico $U_{\alpha\beta}$ che caratterizza l'energia del campo elettromagnetico e quella dovuta alla distribuzione di massa, la (1) diviene: $U^{\alpha\beta}{}_{/\beta} = 0$, dove $U^{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta} - E^{\alpha\beta}$ è il tensore energetico totale. Questo tensore è somma del tensore energetico $T^{\alpha\beta}$ corrispondente alla distribuzione della massa nello spazio e nel tempo e del tensore $-E^{\alpha\beta}$ corrispondente all'energia attribuibile alla materia nel campo elettromagnetico. La solenoidalità nello spazio-tempo del tensore energetico totale esprime tutte le leggi a cui ubbidisce la materia nel suo movimento, quando tra i suoi elementi si esercitano sia azioni gravitazionali sia azioni elettromagnetiche. La indeterminazione del tensore energetico totale, definito a meno di un tensore a divergenza nulla, (arbitrarietà involgente solo il campo elettromagnetico) non altera affatto le leggi meccaniche ed elettromagnetiche, ma in generale potrà alterare il significato degli invarianti costruiti col tensore energetico ed altresì modificherà le equazioni gravitazionali involgenti il tensore energetico totale: $A^{\alpha\beta} + \lambda U^{\alpha\beta} = 0$. Queste mostrano che al pari della materia, il campo elettromagnetico influisce sulla metrica dello spazio-tempo e vi influisce attraverso al tensore energetico $E^{\alpha\beta}$ conglobato in $U^{\alpha\beta}$; e come l'influenza della materia sulla metrica spazio-temporale ne costituisce l'azione gravitazionale, anche il campo elettromagnetico esercita attraverso la sua energia, una azione gravitazionale. È proprio questa azione gravitazionale che è subordinata alla indeterminazione del tensore energetico. Se dunque la metrica dello spazio-tempo non è univocamente determinata, cosa ne consegue ad esempio per la legge della geodetica che dà il movimento di un punto materiale? Anche il movimento non è univocamente determinato, o meglio è determinato a meno di azioni gravitazionali.

3. Soluzione particolare. — Vediamo attraverso un esempio come si possa caratterizzare l'arbitrario tensore (2) $C_{\alpha\beta}$ in modo da portare una significativa alterazione nel tensore energetico. Poniamo:

$$\chi^{\varrho\sigma\gamma\delta} = \chi\, a^{\varrho\gamma}\, a^{\sigma\delta} \tag{3}$$

(4) L'arbitrarietà del tensore energetico si riflette in particolare in arbitrarietà del vettore raggio di Pointing e in arbitrarietà nel tensore degli sforzi maxwelliani nell'ordinario spazio geometrico tridimensionale. È già stato infatti osservato che il primo è definito a meno di un vettore solenoidale (cfr. Persico, *Introduzione alla fisica matematica*, Bologna 1941), mentre il secondo è definito a meno di un tensore doppio simmetrico dello spazio geometrico tridimensionale a divergenza nulla. (Cfr. P. Locatelli, *Sui modelli elastici di campi elettromagnetici*. «Rend. Ist. Lombardo», vol. LXXIV, 1941).

χ sia una funzione di x_0, x_1, x_2, x_3 soluzione dell'equazione di Poisson $\Delta\chi = -hj$, dove h è una costante universale, j è il modulo del vettore spazio-temporale j^α, e l'operatore di Laplace Δ si riferisce allo spazio euclideo tridimensionale. $4\pi\chi$ è dunque il potenziale di una massa distribuita nello spazio con densità hj.

Risulta per $C_{\alpha\beta}$ l'espressione:

$$C_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}(\chi_{/00} - \Delta\chi) - \chi_{/\alpha\beta} \tag{4}$$

$$C_{00} = -\Delta\chi, \quad C_{0i} = -\chi_{/0i}, \quad C_{ik} = -\chi_{/ik}, \quad \text{per} \quad i \neq k$$

$$C_{ik} = -\chi_{/00} + \Delta\chi - \chi_{/ik} \quad \text{per} \quad i = k.$$

L'invariante lineare, che non è nullo, ha l'espressione:

$$C_{\alpha\beta}\, a^{\alpha\beta} = 3hj + \frac{3}{c^2}\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2}. \tag{5}$$

Il tensore energetico totale avrà componenti dipendenti da χ e in particolare risulta:

$$U_{00} = w + c^2\mu - hj = w + c^2\mu - h\rho\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \tag{6}$$

dove μ è la densità di materia in condizioni di moto.

Osservo che poichè la componente puramente temporale del tensore energetico totale U_{00} si interpreta ordinariamente come densità di energia, ne viene che l'energia invece di essere somma soltanto di un termine che dà l'energia elettromagnetica, di uno che esprime l'energia intrinseca dovuta alla massa, risulta somma dei termini precedenti e di un altro termine dipendente dalla carica elettrica.

Qualora così si precisi il tensore energetico, si deve concludere che anche la carica elettrica è, al pari della massa, interpretabile come energia.

Dal punto di vista relativistico, la precisazione in parola ci autorizzerebbe ad affermare che non solo la materia, attraverso la sua densità, ha influenza sulla metrica spazio-temporale, non solo il campo elettromagnetico attraverso la sua energia elettrica e magnetica, ma anche la carica contribuisce direttamente ad incurvare il cronotopo [5].

Inoltre poichè l'invariante lineare del tensore di energia elettromagnetica non è nullo, a differenza di quanto avviene per l'ordinario tensore $M_{\alpha\beta}$, l'invariante di curvatura $G = -A_\alpha{}^\alpha$ non risulta svincolato dal campo elettromagnetico [6], ma anche quest'ultimo ha influenza attraverso il suo invariante lineare (5).

Osservo infine che la soluzione di prima approssimazione delle equazioni gravitazionali [7] ottenuta ordinariamente introducendo soltanto il potenziale gravitazionale unitario $\mathfrak{A}$, sussiste anche quando si voglia tener conto della carica elettrica, e a ciò basta semplicemente aggiungere alla densità materiale un termine proporzionale alla densità di carica elettrica, quest'ultima perciò contribuisce a render conto dello spostamento verso il rosso delle righe spettrali per effetto gravitazionale.

(5) Si noti che per uno spazio-tempo non pseudo-euclideo il tensore arbitrario $C_{\alpha\beta}$ non ha la semplice espressione (2) perchè al secondo membro della (2) si deve aggiungere un termine dipendente dalle curvature dello spazio-tempo. (Cfr. B. FINZI, loco prima citato).

(6) Cfr. B. FINZI, *La pressione di radiazione nella cosmologia relativistica*. «R. Ist. Lomb.», vol. LXXI, fasc. 2° (1938).

(7) Cfr. FINZI-PASTORI, *Calcolo tensoriale e applicazioni*. Cap. X, Bologna, Zanichelli, 1949.

Astronomia. — *Serie oscillatorie ad autoregressione disturbata e moto polare di Chandler.* Nota II di TITO NICOLINI, presentata (*) dal Socio L. CARNERA.

4. Eliminati i P sopra elencati, passiamo alla valutazione dei P medi negli intervalli da essi delimitati. I risultati sono dati alla Tabella III, che riporta anche le ampiezze medie della oscillazione chandleriana. I calcoli numerici sono fatti direttamente coi dati della Tabella I; i P considerati sono 74, eliminati 15. I P_m fino al 1889.50 sono dedotti come vedesi dalle date estreme degli intervalli; dopo il 1890, essendo i P perequati al modo detto, sono state fatte le loro medie, evidentemente preferibili (prima, era indifferente procedere anche così).

TABELLA III.

Periodo medio di Chandler in vari intervalli delimitati da epoche in cui la sequenza P *mostra perturbazioni o discontinuità.*

Intervalli e N° cicli	P_m	a_m	Intervalli e N° cicli	P_m	a_m
1843.20–47.92 4	1.180	19.0	1890.50–98.85 7	1.197	15.1
50.20–53.60 3	1.133	22.7	1900.15– 8.30 7	1.166	14.4
54.97–62.10 6	1.188	21.8	9.60–15.60 5	1.200	21.2
63.50–68.20 4	1.175	18.5	16.80–23.75 6	1.163	13.0
69.50–76.35 6	1.142	23.2	26.00–32.85 6	1.137	7.5
77.57–83.35 5	1.156	21.2	34.00–38.60 4	1.157	8.0
84.65–89.50 4	1.212	19.0	39.70–48.00 7	1.166	13.0

A titolo di curiosità numerica, ed anche a non inutile avvertimento, si osservi che se si fanno le medie pure e semplici dei P_m anteriori e posteriori al 1890, esse vengono identiche (1.169); ma sono medie dedotte senza tener conto dei pesi diversi. Operando più accuratamente, tra le date 1847.88–1889.50 e 1890.50–1944.50, si ottengono le medie 1.189 e 1.174. Tuttavia la

(*) Nella seduta del 13 novembre 1948.

precedente coincidenza casuale è un altro avvertimento di prudenza nelle manipolazioni di dati e di risultati numerici.

Le valutazioni del n. precedente riguardano la distribuzione dei P originari, che è una distribuzione in blocco attorno al valore medio 1.171 (o 1.177 senza eliminazioni). Ora invece prendiamo per base la divisione eseguita in 14 gruppi, e consideriamo gli scarti dei P singoli osservati dai P_m. Chiamando v questi scarti ed F_2 le frequenze, si ha la distribuzione della Tabella IV.

TABELLA IV.

Distribuzione dei residui $v = P - P_m$ (*in unità 0.01 anni*).

v	F_2	v	F_2	v	F_2
— 12	2	— 4	6	+ 4	4
11	2	3	3	5	3
10	—	2	8	6	6
9	1	— 1	9	7	4
8	2	0	—	8	3
7	—	+ 1	6	9	1
6	4	2	4	+ 10	2
— 5	3	+ 3	1		

Caratteristiche:

$$M = -0.040$$
$$\sigma = 0.054$$
$$g_1 = -0.151 \quad (\omega = 0.336)$$
$$g_2 = -0.895$$

M dovrebbe essere esattamente zero, ed il valore — 0.04 è un residuo dovuto alle approssimazioni numeriche; σ risulta leggermente inferiore al valore 0.05 della ultima tabellina del n. 3, ciò che è naturale, riferendoci qui non più ad una media unica (1.171), ma a medie di intervalli parziali più appropriate. Inoltre, la distribuzione è alquanto asimmetrica, e più ancora notevolmente piatta.

Dal concentrarsi della distribuzione F_2 rispetto alla F_1, sembrava presumibile (come sembrava presumibile alla fine del numero precedente) una attenuazione della platicurtosi (rispetto al valore $g_2 = -0.317$ della distribuzione dei P originari). Ma diviene chiaro ancora una volta che, ridotte le deviazioni maggiori delle frequenze F_1 (le quali portavano sempre una ten-

denza di segno + al g_2) col considerare in luogo loro le F_2, resta visibile e delineata la platicurtosi essenziale della distribuzione. Anzi questa appare chiaramente bimodale, (ciò che diviene ben visibile costruendo il diagramma), anche, e con maggiore regolarità, eseguendo la perequazione di 3 in 3 dei valori F_2.

Per confronto, si può provare una suddivisione in 6 raggruppamenti ampi invece dei 14 adottati. Si sono provati, scrivendo qui solo gli anni interi, 1843–62, 63 89, 90–1908, 9–23, 26–38, 39–48. Ma così operando non si ottiene che la perdita di utili informazioni, confondendo dei risultati eterogenei. Oltre ad un aumento della dispersione in 0.063 (in luogo di 0.054 trovato), non restano chiare che le variazioni di P intorno al 1925 e al 1940; ed i residui $v = P - P_m$ tornano affetti da andamenti sistematici, ciò che convince senza altro ad abbandonare tentativi di sintesi siffatti.

In conclusione, la suddivisione più razionale dei dati in intervalli, e i valori medi risultanti, sono quelli della Tabella III. È ancora da rilevare che la sequenza dei residui $v = P - P_m$ ottenuta coi 14 gruppi, presenta 44 variazioni di segno e 14 permanenze, rapporto 3/1 circa, in confronto del 2/1 trovato al n. 2. Ciò significa che la sequenza dei residui v, anche se libera da andamenti sistematici generali, non è di tipo casuale, ma tende piuttosto alla alternanza; in proposito, basta osservare nella Tabella I le sequenze dei $\overline{P}$ dal 1896 al 1911, e dal 1927 al 1935. Questa alternanza è in accordo con la platicurtosi, o meglio la bimodalità, della distribuzione F_2.

A causa della bimodalità detta, la calcolata $\sigma = 0.054$ perde quel significato essenziale che ha nelle distribuzioni ad andamento normale. Infatti una distribuzione piatta può generalmente interpretarsi come somma di più distribuzioni di diversa media, una bimodale come somma di due. Cosicchè anche la suddivisione in 14 intervalli non ha esaurita la variabilità dei valori P. Questi risultano addensati, in ogni intervallo parziale, attorno a due valori modali, che complessivamente risultano 2 centesimi di anno sotto il P_m, o 5–6 centesimi sopra; o attorno a 2 valori medi 4.5 centesimi di anno sotto e sopra il P_m. Interpretando la nostra distribuzione come somma di due, senza pensare ad una vera dissezione analitica, è facile costruire aritmeticamente una distribuzione unica che rappresenti la parte accidentale (almeno apparentemente) delle deviazioni. Basta condensare la distribuzione scartando le frequenze intermodali, o anche sfasare le due metà della distribuzione portando a coincidere i due massimi. La dispersione residua di questa nuova distribuzione, risulta approssimativamente $\sigma = 0.03$; avendo scartato i valori P molto perturbati, questa dispersione è relativa a quelle deviazioni, o perturbazioni, che appaiono mantenere un certo carattere accidentale.

Una conferma di questo valore può aversi cercando di eliminare diversamente la parte non accidentale del vecchio valore σ. Si facciano le medie dei P presi due a due entro ciascuno dei 14 intervalli (ciò che elimina l'effetto dovuto al prevalere delle alternanze), e si valuti la dispersione di esse; questa moltiplicata per $\sqrt{2}$ è il valore cercato, che risulta $\sigma = 0.04$.

5. Nella Tabella III si osserva una correlazione positiva tra P_m ed a_m dal 1890 in poi; questa è una correlazione di andamenti, la quale manca anteriormente al 1890. Ma è naturale che dai metodi, programmi e condizioni d'osservazione anteriori al 1890, risultino componenti annuali e di Chandler inferiori al livello di precisione a questo punto richiesta. Dal 1890, il coefficiente di correlazione lineare (Bravais–Pearson) risulta

$$r = +0.88.$$

Tralasciamo di stimare il grado di significanza per non appesantire con altri dettagli statistici, quali la trasformazione z del Fisher; comunque r è molto elevato e certamente significante. La relazione tra a_m e P_m (ritenuta lineare, o altrimenti nel suo termine lineare) si può giudicare dalla retta di regressione di P_m su a_m, o di a_m su P_m, rispettivamente

$$P_m = 0.0042\ a_m + 1.113$$
$$a_m = 183\ P_m - 201$$

(nel corso dei calcoli risulta anche la dispersione delle a_m e dei P_m, rispettivamente 5.7 e 0.027; questi valori sono ottenuti con denominatore $n-3$ nella formola di Bessel, anzichè $n-1$, dato che si hanno meno di 10 determinazioni).

A parte questa rilevante correlazione di andamento, esiste correlazione tra le piccole oscillazioni locali di P ed a ? La ricerca può farsi col metodo delle differenze, ponendo in correlazione le differenze prime; ma non risulta una correlazione sensibile, e qualche apparente risultato locale è dovuto a variazioni equiverse delle differenze (alle epoche 1846.8, 53.6, 55.0). Successivamente al 1890 si ottiene il valore $+0.1$. Così in generale, le piccole oscillazioni locali di P ed a possono ritenersi incorrelate.

Consideriamo ora la correlazione tra ogni elemento P_i della Tabella I ed il successivo P_{i+1}. Per chi ha pratica del calcolo di questi coefficienti, è facile vedere che questa correlazione *interclasse* è la stessa correlazione *intraclasse* tra elementi consecutivi. Scartati i soliti intervalli elencati alla fine del n. 3, il calcolo può farsi in base ad un solo P medio complessivo (1.17), o in base ai P_m dei singoli 14 gruppi; nei due casi il risultato è rispettivamente

$$r = -0.237 \quad \text{oppure} \quad r = -0.349.$$

Il valore decisamente negativo, indica che a P superiori alla media seguono generalmente P inferiori e viceversa, cioè ritroviamo la rilevata alternanza; e questa risulta più evidente (come è naturale) rispetto alle medie dei singoli gruppi.

La deviazione media σ_m dei P_m dei 14 gruppi considerati, attorno alla media del complesso (1.169), si ricava subito dai dati della Tabella III (al denominatore della formola di Bessel poniamo $n-2=12$, anzichè $n-1$, data la esiguità del numero n); risulta

$$\sigma_m = 0.025$$

Come detto sopra, dal 1890 il valore è 0.027. Queste stime comprendono una effettiva variabilità dei P_m, come vedremo subito, non provengono da sole fluttuazioni dovute alla precisione di determinazione dei P_m stessi.

La bimodalità della distribuzione dei P, rilevata al numero precedente, corrisponde alla tendenza alternante dei P stessi, cioè ad una tendenza compensatrice, o sistematica. Quindi il valore $\sigma = 0.054$ trovato al n. 3 è esagerato per quanto riguarda la parte accidentale delle deviazioni; e usato per dedurre la deviazione media (o qui potrebbe dirsi errore medio) dei singoli P_m della Tabella III, con la formola $e_m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ne darebbe una stima notevolmente esagerata. Si noti anche che questo errore medio denotato e_m non è il valore 0.025 visto sopra. Come già accennato all'inizio della ricerca, nelle serie a periodo rigido l'errore medio della media è σ/n, nelle serie a periodo perturbato (con P successivi indipendenti, entro i limiti di escursione delle perturbazioni locali) è $\sigma/\sqrt{n}$; essendo più attendibile una valutazione media complessiva, anzichè per singoli intervalli, siccome n (numero medio di P per intervallo) è 5.3 dalla Tabella III, consegue dalle due formole rispettivamente

$$e_m = 0.010 \quad \text{oppure} \quad e_m = 0.023.$$

Così, l'errore medio insito nelle determinazioni P_m può ritenersi compreso tra questi due valori. La conferma si può avere direttamente dal valore della vera dispersione di carattere accidentale, stimata al numero precedente in 0.03 o 0.04, che porta a $e_m = 0.015$ approssimativamente. Questo valore è inferiore alla dispersione effettiva, 0.025, dei P_m (il rapporto è 6 10, o quello delle varianze 36/100); quindi si può concludere che generalmente le variazioni di periodo sono significanti, particolarmente le più ampie, ben rilevabili dalla Tabella III. Si possono anche valutare subito gli e. m. di σ_m ed e_m, come della loro differenza. Questa risulta

$$\sigma_m - e_m = 0.010 \pm 0.0056.$$

Questo risultato ha messo alla prova le risorse dell'analisi statistica; si è dovuto giungere quasi al limite delle sue possibilità, in quanto il numero e la precisione dei dati sono stati poco più che sufficienti.

Nella 2ª ricerca del riferimento [1], Tabella VI, la significanza delle variazioni appariva nettamente superiore; ciò proveniva dall'avere già ammesse le variazioni in base ad evidenze fisiche (discontinuità, variazioni di ampiezza). *Qui invece, la sequenza di epoche riportate alla Tabella I, è stata esaminata in base a criteri puramente statistici*, eliminando l'idea *a priori* di periodicità rigide, anche in intervalli parziali, e le conclusioni sono state confermate. Tenendo conto anche delle evidenze fisiche, naturalmente il grado di certezza è superiore a quanto dicano i presenti risultati numerici.

La presente ricerca è forse eccessivamente sintetizzata; ma le indicazioni bibliografiche ed i dati necessari riportati, permettono il controllo di ogni punto discusso.

Oltre al rilievo di varie particolarità statistiche relative al soggetto, in conclusione finale, la variabilità del periodo di Chandler appare definitivamente accertata. Mentre le piccole perturbazioni locali di P restano confuse nelle fluttuazioni accidentali, o nelle alternanze compensatrici (che mostrano una certa tendenza autoregressiva dei valori P), le maggiori, individuate nella Tabella III, sono statisticamente accertate.

La dimostrazione generale è già assolutamente evidente dal n. 1 per mezzo dello scarto cumulativo; ma ora è anche chiaro che le variazioni date alla Tabella III, rispondono abbastanza bene ai criteri di significanza, almeno riguardo alla loro individuazione complessiva.

Botanica. — *Variabilità, differenziazione ed osservazioni biologiche su di una Cianoficea* (*). Nota di VITTORIO MARCHESONI, presentata (**) dal Socio G. GOLA.

Questi appunti mi sono stati suggeriti dall'aver potuto seguire per quasi due anni un popolamento ad Oscillatoria rubescens DC nei laghi trentini di Caldonazzo e Levico (1). In un lavoro precedente (2) già è stata studiata per queste acque la biodinamica di questo popolamento rivelatore e determinante speciali condizioni ecologiche. L'importanza di un popolamento sussiste sempre quando, di fronte a speciali condizioni ambientali favorevoli, subisce incrementi numerici tali nella sua consistenza da reprimere gli altri popolamenti algologici. Tali fluttazioni di densità in molti casi avvengono periodicamente, in altri casi invece accidentalmente tanto che le cause di esplosione sfuggono al ricercatore anche se questo possiede per quel dato ambiente tutti i dati fisico-chimici per più cicli annuali.

Le Cianoficee hanno un posto importantissimo direi quasi il più importante fra i fitoplanctonti producenti questi addensamenti che vengono denominati fioriture d'acqua. Anche entità di altre divisioni sono ben note per la produzione di fioriture d'acqua, ma queste si svolgono sotto l'impulso di un diverso meccanismo d'azione sia per il tempo di durata, sia per gli effetti che producono direttamente o indirettamente ed anche per diversità di insediamento.

Il diverso meccanismo d'azione delle Cianoficee risiede in particolarità biologiche e strutturali inerenti ad esse sole.

Il primo e l'unico accenno dell'esistenza di quest'alga nelle acque italiane ci è dato da Largaiolli, che ancora nel lontano 1902 la rinvenne nel lago di Caldonazzo. Forti, però, nella sua *Sylloge Myxophycearum* (1907) ascrive ad Oscillatoria prolifica Gom. l'Oscillatoria del lago di Caldonazzo.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico dell'Università di Padova.

(**) Nella seduta del 12 febbraio 1949.

(1) Le ricerche a cui mi riferisco sono state sovvenzionate dal Centro Studi Alpini e dal Centro Studi Geografia Fisica del C. N. R.

(2) V. MARCHESONI, *La biodinamica dei popolamenti ad Oscillatoria rubescens nei laghi di Caldonazzo e Levico.* «Boll. Pesca, Pisc. Idrob.», XXIV, 1948.

Causa non lieve di errore è sempre stata anche la loro figurazione ben poco corrispondente alla realtà; Gomont stesso nella sua trattazione sulle Oscillatorie (1893) si avvide che poche differenze morfologiche esistono per una controdistinzione delle due specie.

Molto si è parlato sul polimorfismo delle Cianoficee, fatto questo comprensibile quando pensiamo che le Cianoficee mancano di una riproduzione sessuale.

Ma è veramente variabile la cellula dell' Oscillatoria? Recentemente Jaag (3) in Oscillatoria rubescens proveniente da vari laghi svizzeri osservò una variabilità minima nella larghezza dei trichomi, dal che dovrebbesi dedurre che la larghezza costituisce un buon carattere sistematico; Jaag infatti constatò una larghezza media di 5.7 μ: l'estremo minimo (5.35 $\mu \pm 0.40$) fu riscontrato nel lago di Murten, quello massimo (6.12 $\mu \pm 0.43$) invece fu riscontrato nel lago Zuger. Sottoposi anch'io lotti di 200 filamenti alla stessa ricerca statistica, rilevando per i due nostri laghi le seguenti medie corrette della deviazione quadratica media:

Levico 12 luglio 1947 $M = 5.2 \pm 0.21$

Caldonazzo 10 luglio 1947 $M = 5.7 \pm 0.34$

Il lago di Levico ci ha dato un valore medio inferiore a quelli esaminati fin'ora da Jaag, quello di Caldonazzo invece ci ha dato un valore corrispondente al valore medio già noto per i laghi svizzeri. I due nostri bacini in esame mantengono, nonostante la loro vicinanza, una propria individualità fisionomica, che sarà rilevabile anche in altre entità fitoplanctoniche. Questi esempi di ultraendemismo, come ebbe a dire Baldi, costituiscono in realtà la regola generale, ogni bacino racchiudendo in sè un suo fenotipo caratteristico a grande stabilità morfologica.

Studiando poi il ciclo annuale di quest'alga, si è visto che il suo ciclo di sviluppo è reso complesso dall' esistenza di due optimum termici, l'invernale con optimum di sviluppo favorevole quando esiste la coltre di ghiaccio e l'estivo con optimum di sviluppo negli strati sottostanti al mesolimnio; la distinzione fatta fra queste due forme a richieste ecologiche diverse è accompagnata pure da una differenziazione morfologica; infatti l' Oscillatoria raccolta nello strato di fusione della copertura invernale, dove aveva prodotto addensamenti eccezionali per la straordinaria consistenza numerica (anche 15000 filamenti si rinvenivano in 1 cc), comportava dimensioni diverse nel carattere larghezza dei filamenti in confronto a quelle estive dello stesso lago:

Caldonazzo 28 febbraio 1947 (nello strato di fusione del ghiaccio) $M = 6.3 \pm 0.48$.

Un carattere morfologico ha quindi valore assoluto per due entità che si vogliono analizzare nella loro insularità fenotipica, solamente se viene considerato nello stesso tempo. Infatti sempre per il lago di Caldonazzo:

Caldonazzo 9 aprile $M = 6.1 \pm 0.43$

i valori medi di larghezza dei filamenti sono quasi intermedi fra quelli di febbraio precedentemente analizzati e quelli di luglio. In tal modo i valori massimi riportati

(3) O. Jaag, *Die Zellgrösse als Artmerkmal bei den Blaualgen*. «Zeitschr. f. Hydrob.», IX, 1941.

da Jaag per alcuni laghi svizzeri (Zugersee 20 novembre M = 6.12 e Rotsee 24 novembre M = 6.07) sono da ascriversi in gran parte a differenze stagionali più che all'esistenza di ecotipi a caratteri molto distanziati. In conclusione, durante il ciclo annuale dell'Oscillatoria si è notata una diminuzione nella larghezza dei filamenti.

Il lago di Cavazzo nel Friuli è pure caratterizzato da invasione nelle sue acque pelagiche di una Oscillatoria che da Forti fu determinata come O. prolifica Gom. Il materiale, ancora esistente in questo Istituto, fu pure sottoposto a misurazione statistica:

Cavazzo 16 aprile $M = 4.6 \pm 0.22$

Minime sono quindi le differenze in larghezza dei filamenti fra questa specie di Oscillatoria ritenuta O. prolifica e le precedenti dei laghi svizzeri e trentini che ritengo attribuirsi all'O. rubescens. Specialmente l'O. di Levico differisce di minimi valori dall'O. di Cavazzo. Ne dobbiamo dedurre che questo carattere morfologico, cioè larghezza dei filamenti, ritenuto dai sistematici carattere di distinzione fra le due entità (Geitler infatti riporta nel suo ultimo trattato sulle Cianoficee: larghezza dei trichomi in O. rubescens 6–8 μ, in O. prolifica 4–6 μ), non può quindi avere eccessivo valore diagnostico.

Anche l'O. prolifica del Jamaica Pond del Nordamerica e altre esistenti nell'Herbarium Forti differiscono di poco da quelle europee. Sembra che l'O. prolifica sia poco variabile; infatti

Jamaica Pond Dicembre 1893 $M = 4.5 \pm 0.31$

La lunghezza dei filamenti pure riveste carattere relativo, per quanto l'O. prolifica si presenta sempre in filamenti molto lunghi in confronto all'O. rubescens. Alcuni dati di lunghezza media, corretti della deviazione quadratica media calcolata su 200 individui sono indicativi in questo:

Caldonazzo 28 febbraio	$M = 602 \pm 271$	(estremi 22–1580 μ)
Caldonazzo 9 aprile	$M = 632 \pm 331$	(estremi 220–1543 μ)
Caldonazzo 10 luglio	$M = 421 \pm 376$	(estremi 102–1560 μ)
Levico 12 luglio	$M = 311 \pm 214$	(estremi 88–1029 μ)
Caldonazzo 29 settembre	$M = 946 \pm 304$	(estremi 514–1764 μ)
Cavazzo 16 aprile	$M = 1572 \pm 683$	(estremi 960–2356 μ)

Notevolissime sono quindi le variazioni di lunghezza subite dall'Oscillatoria durante il ciclo di permanenza nelle acque. È errato quanto fin'ora si riteneva che i filamenti che si sviluppavano nei mesi invernali si presentassero sempre più lunghi di quelli estivi o che subissero modificazioni sempre in un senso. Le maggiori lunghezze le rinveniamo nei mesi primaverili ed in quelli autunnali e non a caso, dipendendo questo fatto dal loro modo di riproduzione.

Ciò infirma il concetto di stabilità del filamento, che deve considerarsi alla stessa stregua delle associazioni cellulari in senso lineare presentate dai Schizomiceti filiformi. Che i filamenti dell'Oscillatoria non siano dotati di grande stabilità, lo

possiamo osservare controllando la lunghezza dei filamenti dapprima in saggi di materiale raccolto subito e poi in saggi sottoposti anche a lieve agitazione oppure anche in saggi nei quali il materiale vivo è stato conservato per alcuni giorni, in condizioni ambientali diverse dalle normali. Cause accidentali anche di lieve entità possono dar luogo a frammentazione del filamento. È questo frazionamento stesso dei filamenti che spiega il raggiungimento del meccanismo di esplosione da parte di moltissime specie di Cianoficee filamentose: in condizioni ambientali anormali il frazionamento è di natura accidentale, mentre speciali disposizioni morfologiche lo facilitano in condizioni normali.

Determinate cellule si vengono a formare nella serie lineare di cellule che formano il filamento; sono queste cellule particolari che preannunciano i così detti punti di frattura del filamento. Questi punti di frattura nelle Oscillatoriacee hanno la stessa funzione delle eterocisti intercalari di altre famiglie di Cianoficee. Queste cellule di frattura, che sembrano essere incapaci di ulteriore sviluppo, si distinguono facilmente dalle altre cellule normali per il loro contenuto cellulare omogeneo senza pseudovacuoli. Facilmente si distinguono all' osservazione microscopica anche per la loro intensa lucentezza, poichè assumono una colorazione bluastra pallida come le vere cellule apicali caliptrate.

Consimili meccanismi di separazione erano stati osservati in Tolypothrix da Brand, che li denominò « Spaltkörner »; Borzi in altre Cianoficee li chiama invece « diaframmi divisorî », ma in Oscillatoria rubescens queste formazioni non assumono mai la forma di lente biconcava, che è tipica invece per i diaframmi divisorî. Nella nostra alga invece per lo più due cellule partecipano a questo processo evolutivo. I filamenti estivi raramente presentano questi punti di frattura; li presentano in percentuali elevate invece i filamenti lunghi invernali e primaverili e in massimo grado poi quelli autunnali; in questi si possono enumerare anche più punti da frattura per un solo filamento. Ai frammenti di filamento che ne deriveranno in tal modo è devoluto il compito di conservazione, dopo sparizione del popolamento nelle acque pelagiche. Una maggiore opacità contraddistingue questi filamenti da quelli estivi o primaverili, oltre che ad esser formati di poche cellule. Nessun inspessimento della membrana, nessun involucro gelatinoso li caratterizza, per cui non si possono morfologicamente ritenere eguali alle ormocisti (cioè ai frammenti di filamento incistidato) delle Scitonematacee e Stigonematacee, pur possedendo lo stesso ruolo fisiologico.

Maggior valore sistematico nella distinzione fra Oscillatoria rubescens e O. prolifica vien dato dalla lunghezza delle singole cellule del filamento. È questo un carattere differenziale tanto spiccato da far ritenere veramente distinte le due specie. Il processo di bipartizione delle cellule in Oscillatoria rubescens è di grande evidenza, la scissione essendo incessante. Che detta scissione abbia inizio partendo dal protoplasma periferico, l' osserviamo spesso dall' incompletezza al centro delle membrane che dividono cellula e cellula attigua; la scissione di massima attività riproduttiva avviene a ritmo così accelerato che spesso vi è già l' accenno ad una seconda scissione in cellule che si sono appena formate e che hanno ancora la membrana incompleta al centro. È in dipendenza di questo che le cellule in O. rubescens hanno sempre forma molto rettangolare, mentre in O. prolifica le

cellule assumono sempre forma quadratica o subquadratica; alcuni dati di misurazione statistica pongono questo in evidenza:

O. prol. lago Cavazzo	$M = 5.1 \pm 0.29$
O. prol. Jamaica Pond	$M = 4.3 \pm 0.46$
O. rub. lago Levico	$M = 2.4 \pm 0.70$
O. rub. lago Caldonazzo	$M = 2.7 \pm 0.46$

La lunghezza delle cellule è quindi buon carattere di diagnosi sistematica, specialmente quando questa sia integrata da altri dati statisticamente rilevati come la lunghezza dei filamenti e la larghezza dei filamenti e dal rilievo di altre particolarità morfologiche inerenti al filamento stesso come il grado di chiarezza dei setti divisorî (indistinti per lo più in O. rub., marcati in O. prol.) e la maggiore flessibilità dei filamenti che raramente si presentano diritti in O. prol.

Molto polimorfa è invece la cellula apicale, potendosi presentare sia a contorno semicircolare uniforme come nei nostri laghi sia a forma caliptrata.

Molti sono quindi i caratteri che si richiedono per una determinazione sicura, poichè una determinazione fatta solo su un carattere interspecifico quale la larghezza dei filamenti può apportare incertezze, specialmente se il carattere è sottoposto a variabilità fenotipica stagionale, la quale, come abbiamo riscontrato, non è trascurabile.

La separazione sistematica delle due specie quindi, creata da Gomont per quanto da lui stesso messa in dubbio, è ancora da accettarsi, oltre che per le differenze morfologiche prese in esame, anche per la specificità loro di richiesta di determinate condizioni ambientali diverse per le due specie.

Le molte difficoltà di classificazione incontrate dai vari ricercatori per aver avuto a disposizione un saggio solo o qualche saggio del ciclo biologico molto complesso di queste alghe hanno svisato certamente il loro areale. La distribuzione geografica dell'O. rubescens è stata già presa in esame in un mio precedente lavoro; l'addensamento di frequenza nei laghi alpini e montani dell'arco alpino settentrionale è dipendente oltre che da uno speciale trofismo richiesto dall'alga anche da delle condizioni termiche che solo questi laghi possono offrire. L'O. rub. infatti è entità stenoterma di acque fredde anche nei mesi estivi; considerata secondo le vedute della valenza ecologica di Vouk (1948), quest'alga rientra fra i rari rappresentanti del tipo microstenovalente ad optimum termico molto basso (sotto i 10° C). I bacini che offrono un optimum di insediamento a quest'alga hanno una profondità di 30–50 metri e altimetricamente sono situati fra i 300–500 metri s. l/m; solo questo tipo di bacino può favorire il suo ciclo estivo, facendo coincidere richieste termiche con le richieste di luminosità che sono importantissime per l'esistenza di un popolamento vivente negli strati sottostanti al mesolimnio.

L'O. prolifica invece, anche dai pochi dati sporadici che si possono desumere, non è entità veramente stenovalente come la precedente, ma devesi considerare fra il tipo eurivalente. Anch'essa infatti possiede un optimum invernale in tutto identico a quello dell'O. rub., ma poi nei mesi estivi e primaverili subisce un

nuovo incremento coll'aumentare della temperatura dell'acqua; questo secondo optimum coincide circa coi 17° C; l'esistenza di esso è convalidato da alcune osservazioni di vari osservatori: l'arrossamento del laghetto Sirio avvenuto in corrispondenza di una temp. di 16°, le raccolte fatte nel lago di Cavazzo ad una temp. di 15° e l'optimum di 18–19° osservato da Hyams e Richard per il Jamaica Pond.

Anche nel ciclo annuale di quest'alga dunque si riscontrerebbe l'esistenza di due forme ad optimum termici diversi, come le ricerche da me fatte ai laghi di Caldonazzo e Levico hanno messo in evidenza per l'O. rub. Queste osservazioni convalidano l'alto grado di parentela di queste due specie, ma l'esistenza di una alternanza ben diversa di esigenze fisiologiche di fronte al fattore termico (optimum invernale identico per tutte e due le specie, optimum primaverile legato ad una temp. di 17° nell'O. prolifica e optimum estivo legato ad una temp. di 7–8° nell'O. rubescens) conferma la loro distinzione anche su basi fisiologiche.

Anatomia umana. – *Ricerche sull'esistenza di una formazione sfinterica del meato ureterale nell'uomo* (*). Nota di Antonio Ruotolo, presentata (**) dal Socio S. Sergi.

Ammesso o supposto da alcuni, negato da altri lo sfintere del meato ureterale è ancora da dimostrare, anche se esso è stato da qualche ricercatore descritto.

Tale è il convincimento che mi sono formato dall'esame della scarsa letteratura e dalla valutazione critica di essa.

D'altra parte l'osservazione nel vivente del meato ureterico coi suoi ritmici movimenti di apertura e di chiusura e considerazioni di ordine fisiologico e patologico fanno ritenere verosimile la esistenza di un dispositivo sfinterico allo sbocco. Per la importanza che questo argomento riveste dal punto di vista anatomico, fisiologico e fisio-patologico, e soprattutto perchè oggi per molti fatti normali e patologici si è orientati, a giusta ragione, verso una concezione dinamica, mi sono indotto a compiere una serie di ricerche di cui espongo qui i risultati.

Dati bibliografici e considerazioni critiche. – Versari nelle sue ricerche condotte sullo sviluppo e sulla fine struttura della valvola ureterica dell'uomo ha descritto una formazione sfinterica in corrispondenza dell'orificio di sbocco dell'uretere, ma la considera una evenienza rarissima. Egli dice che quando si rinvengono fasci tagliati trasversalmente verso l'apice della valvola e nel contorno inferiore dell'orificio di sbocco non sempre si tratta di uno sfintere perchè o si può trattare di particolari inflessioni laterali dei fasci della muscolatura ureterica colpiti trasversalmente, o di sottili fasci muscolari i quali, provenendo dal così detto basso fondo vescicale, passano nel contorno laterale e mediale dell'orificio di sbocco.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Umana dell'Università di Roma.
(**) Nella seduta del 12 febbraio 1949.

E poichè – egli dice – lo strato circolare della tunica muscolare dell'uretere non esiste nel tratto intramurale, la presenza di uno sfintere attorno allo sbocco dell'uretere è casuale (l'A. l'ha riscontrato solo due volte su cento ureteri) e quando si riscontra è da interpretarsi come il ritorno a condizioni che esistono normalmente nei mammiferi inferiori.

Anche Gayet ritiene che la muscolatura dell'uretere intramurale è costituita solo dallo strato longitudinale e quindi in considerazione della mancanza di fibre muscolari circolari non ammette l'esistenza dello sfintere. Pur tuttavia egli considera questa questione ancora aperta.

Versari e Gayet negano dunque lo sfintere del meato ureterico e in fondo ne spiegano l'assenza partendo dal presupposto che se esistesse dovrebbe essere, analogamente a quanto si osserva in genere negli altri organi cavi muscolo-membranosi, una dipendenza o comunque un ispessimento della muscolatura circolare dell'uretere. Ma poichè questa non si riscontra nel tratto intramurale del suddetto organo ne consegue che lo sfintere debba mancare.

Ma, come vedremo in seguito, nel caso in esame questo ragionamento non vale in quanto lo sfintere è una formazione indipendente, almeno dal punto di vista genetico, dall'uretere, pure essendo posto allo sbocco di quest'organo in vescica. Che Versari partisse dalla suddetta premessa è forse dimostrato dalla considerazione che egli fa a proposito delle ricerche di Castellani appresso accennate. Dice infatti Versari che sebbene nel cane lo strato muscolare circolare dell'uretere arrivi fino alla valvola ureterica e perciò la presenza casuale di un ispessimento di tale strato sia più facilmente spiegabile che non nell'uomo (nel cui segmento intramurale dell'uretere si riscontrano solo fasci muscolari longitudinali), tuttavia – egli pensava – con ricerche pazienti forse si sarebbe anche nell'uomo trovata una formazione sfinterica. Però, come ho riferito sopra, egli non è riuscito a documentarla ed anzi la nega.

Tono e Vecchiotti hanno recentemente descritto un fascetto muscolare il quale nasce dal trigono e si porta, con decorso in alto ed in fuori, all'orificio ureterico corrispondente, lo avvolge ad occhiello ed infine si continua con lo strato longitudinale interno del detrusore.

Questo fascetto, presente in tutte le vesciche esaminate, contribuisce secondo i suddetti ricercatori a chiudere l'uretere durante il riempimento della vescica.

In un precedente lavoro io attribuii valore di sfintere dell'ostio al fascio ad occhiello, in seguito però osservando alcuni miei preparati mi convinsi che la formazione descritta da Tono e Vecchiotti aveva una situazione troppo profonda per poter essere omologata al dispositivo sfinterico dello sbocco, non fosse altro perchè essa è posta al disotto della mucosa e sottomucosa e quindi non munisce lo sbocco, ma un tratto dell'uretere intramurale distante dal meato e posto a monte di quest'ultimo.

Marsella ha descritto nella zona di sbocco dell'uretere uno sfintere di forma ovalare, costituito da sottili fasci muscolari semilunari i quali si dipartono dalla parete inferiore e, aumentando in numero e grandezza man mano che si avvicinano alla valvola ureterale, raggiungono in questa il maggiore spessore. Per quanto riguarda poi la provenienza di tale sfintere l'A. afferma che esso è una dipendenza

della muscolatura longitudinale dell'uretere. « Non si può supporre - dice Marsella – che quando finiscono le fibre longitudinali muscolari dell'uretere questo sfintere abbia inizio indipendentemente da esse, si deve invece supporre che le fibre muscolari longitudinali perdano la loro direzione longitudinale e serpeggino a forma di anse verso l'alto e lateralmente, circondando poi lo sbocco e formando lo sfintere ». Sicchè movimento dell'uretere intramurale e movimento dello sbocco sarebbero espressione dell'attività di una sola entità muscolare.

« Il movimento di apertura – afferma Marsella – avviene nello stesso tempo del movimento di stiramento del segmento parietale dell'uretere. In altre parole, quando i fasci muscolari longitudinali dell'uretere che terminano nella valvola formando lo sfintere si contraggono essi producono due effetti: aumentano il lume per il passaggio dell'urina e aprono la valvola ». Suggestivo potrebbe apparire ad un esame superficiale lo sfintere descritto da Marsella non fosse altro che per la sua topografia: questo ricercatore infatti lo descrive in corrispondenza ed intorno al meato ureterico. Ma, a parte il fatto che egli l'ha riscontrato in un solo caso e direi in una osservazione casuale e che perciò meritava conferma, c'è da osservare quanto segue: 1° che tutti i precedenti ricercatori che si sono occupati della porzione intramurale dell'uretere e del destino dei suoi fasci muscolari longitudinali, pur non essendo d'accordo tra loro sul comportamento ultimo dei fasci medesimi, non accennano a quanto Marsella avrebbe osservato e cioè che fasci muscolari longitudinali cambino direzione per divenire trasversali e disporsi intorno al meato; 2° inoltre è poco verosimile, tenuto conto di quanto si osserva nella muscolatura liscia, che una formazione sfinterica abbia origine e derivi da fasci muscolari longitudinali, i quali perciò per un tratto del loro decorso avrebbero una funzione di progressione dell'urina e per un altro tratto una funzione sfinterica e quindi di arresto del deflusso; 3° infine si tratterebbe - come lo stesso A. dice – di uno sfintere sui generis, ovale costituito da fasci semilunari. Ora questo tipo di sfintere non si osserva mai nella muscolatura liscia, nella quale gli sfinteri veri e propri sono formati da anelli completi; esso invece ricorre nella muscolatura striata e costituisce il piano di struttura degli sfinteri striati volontari come è dimostrato dalla costituzione dell'*orbicularis oris*, dello *sphincter ani externus* e dell'*orbicularis oculi*. Ma a parte queste considerazioni, come ora dirò, nel caso in esame non si ha a che fare con uno sfintere nel senso anatomico della parola ma con una specie di ansa muscolare. Per quanto riguarda gli animali, lo sfintere ureterale è stato studiato - per quel che mi risulta – da Disselhorst e da Castellani. Disselhorst ha dimostrato lo sfintere in numerosi mammiferi, costituito da un complesso di fasci muscolari circolari intorno al meato ureterico. Castellani, nel corso di ricerche sullo sfintere della vescica e sui rapporti di questo con il trigono, ha riscontrato nel cane, in corrispondenza dell'orificio ureterico, lo sfintere. Ma il reperto non è stato costante, avendolo il suddetto ricercatore osservato in 2 dei 15 cani esaminati.

Materiale e metodo di ricerca. – Ho condotto le mie ricerche su 25 vesciche appartenenti a individui di età variabile dai 15 ai 50 anni. Il materiale di studio è costituito dalla zona del meato ureterale e da un tratto cir-

costante della parete vescicale della lunghezza di circa cm. 1,1/2 e della larghezza di circa cm. 1. Come fissatori ho usato la formalina, lo Zenker e l'alcool e per la colorazione delle fette mi son servito dell' ematossilina–eosina e del metodo di Cajal–Gallego. I pezzi sono stati tagliati in serie e le sezioni sono state condotte in alcuni casi secondo l' asse maggiore del meato, in altri secondo l'asse trasversale, in altri ancora secondo assi obliqui ed in altri infine secondo il piano vertico–frontale del meato. In alcuni casi allo scopo di tener beante lo sbocco vi è stata tenuta durante il periodo di fissazione del pezzo un'esilissima bacchetta di vetro. Comunque condotto il taglio, i fasci muscolari dello sfintere sono sempre evidenti e si possono seguire nelle sezioni seriate. Ma dove questa formazione appare in tutta la sua estensione, permettendo una visione rapida e completa della sua morfologia e degli altri caratteri, è solo nelle sezioni condotte secondo il piano vertico–frontale, cioè parallele allo sbocco in modo da interessare il meato in tutto il suo contorno nelle singole fette. Però è da rilevare al riguardo che è indispensabile orientare il pezzo in modo che lo sbocco stia in parallelo con il coltello del microtomo; basta infatti lo scarto di meno di 1 mm. perchè lo sfintere, data anche la sua piccolezza, non venga interessato che parzialmente. Per queste ragioni ed in considerazione del fatto che i fasci sfinterici hanno una topografia molto superficiale, essendo posti nella tonaca propria della mucosa ed anche nella sottumucosa, bisogna aver cura di raccogliere sopratutto le prime fette.

RISULTATI DELLE RICERCHE. – Dalle mie ricerche risulta che in corrispondenza del meato ureterale esiste una formazione sfinterica la quale è costituita da un insieme di fasci muscolari, che occupano essenzialmente la tonaca propria della mucosa e si spingono alquanto anche nella sottumucosa (Fig. 1, 2). Essi hanno inoltre una disposizione concentrica al meato. A differenza dei comuni sfinteri della muscolatura liscia, la formazione sfinterica in esame non è costituita da anelli, ma da anse muscolari le quali partendo dal trigono salgono su di un bordo del meato ureterico, ne circondano il polo superiore e discendono poi sull'altro bordo per ritornare infine al trigono. Si tratta dunque di fascetti a ferro di cavallo con la concavità diretta in basso. In alcuni casi le due estremità dell'ansa al disotto del polo inferiore del meato si addossano e così accostate si perdono nella muscolatura del trigono. Sicchè considerato nel suo insieme in quest'ultima evenienza la suddetta ansa anzichè la forma di ferro di cavallo riveste quella di una racchetta. Solo in un caso mi è sembrato che l'ansa si chiudesse in basso, a mo' di anello.

L'esame dei preparati, qualunque sia il modo col quale le sezioni sono state condotte (verticalmente, trasversalmente, obliquamente o vertico–frontalmente) dimostrano, e specie in queste ultime, che la formazione sfinterica del meato è un'entità indipendente dal detrusore. Essa è invece una derivazione della muscolatura trigonale come risulta da quanto sopra è stato detto e come è dimostrato dalle microfotografie. È da escludere ugualmente qualunque rapporto di provenienza con la muscolatura dell'uretere la quale d'altra parte nella porzione intramurale è costituita solo da fibre longitudinali.

Fig. 1. – Meato ureterico tenuto beante durante il periodo di fissazione da un'esilissima bacchetta di vetro. Sez. vertico-frontale. Si vedono i fascetti muscolari della formazione sfinterica che in basso si continuano nel trigono (met. Cajal-Gallego; fotomicr.: ingr. 35×).

Fig. 2. - Meato ureterico tenuto beante durante il periodo di fissazione da un'esilissima bacchetta di vetro. Sez. vertico-frontale. Si vedono i fascetti muscolari della formazione sfinterica che in basso si continuano nel trigono (met. Cajal-Gallego; fotomicr.: ingr. 35×).

La morfologia dello sfintere a ferro di cavallo (a branche ora strette ed ora alquanto divaricate) o a racchetta ripete nella forma l'aspetto del meato ureterale come ci appare *intra vitam*, cioè a colpo d'unghia o a fessura, a doccia o rotondeggiante.

Fig. 3. – Si vede l'ansa muscolare di Versari che avvolge in basso e sui lati l'uretere nel punto del suo ingresso in vescica (met. Cajal-Gallego; fotomicr.: ingr. 18 ×).

A questa ansa sfinterica dello sbocco a concavità in basso fa riscontro un'altra ansa a concavità rivolta in alto, più robusta e posta al punto d'ingresso dell'uretere in vescica: cioè quella individuata da Versari e confermata da Tono e Vecchiotti e sul cui valore funzionale ho richiamato l'attenzione in precedenti lavori (Fig. 3).

Bibliografia.

Versari R., *Ricerche sulla tonaca muscolare della vescica urinaria e specialmente sul muscolo sfintere interno.* Ricerche fatte nel Labor. di Anat. Normale Roma, vol. VI, f. 1, 1897.

Versari R., *Sullo sviluppo della tonaca muscolare della vescica urinaria dell'uomo con speciale riguardo allo sviluppo della muscolatura del trigono e dello sfintere a fibre liscie.* Ricerche fatte nel Labor. di Anat. Norm. Roma, vol. XIII, f. 1–2, 1907.

Versari R., *Sviluppo e fine struttura della valvola ureterica dell'uomo.* Ricerche fatte nel Labor. di Anat. Norm. Roma, vol. XVI, f. 1–2, 1911.

Gayet, *L'uretère intramurale.* « Journ. d'Urologie », to. 44, n. 3, 1937.

Tono e Vecchiotti, *Ricerche sulla muscolatura della vescica umana.* « Ricerche di Morfologia », vol. XX–XXI, 1943.

MARSELLA, *Ueber Uretermündungsdivertikel.* « Zeitschrift Urol. Chir. », Bd. XVI, Heft 3-4, 1924.
RUOTOLO A., *L'immagine radiografica dell'ampolla dell'uretere e il dispositivo di chiusura dell'estremità distale dell'uretere.* « Ricerche di Morfologia », vol. XXII.
RUOTOLO A., *Sull'immagine radiologica dell'ampolla ureterale e sulla valutazione anatomo-funzionale dell'apparato sfinterico del tratto distale dell'uretere nell'uomo.* « Atti Soc. Ital. di Urol. », vol. XX, 1947.
RUOTOLO A., *Sulla costituzione e sul significato funzionale della guaina e della così detta fessura di Waldeyer.* « Ricerche di Morfologia », vol. XXIII.
DISSELHORST, *Der Harnleiter der Wirbelthiere.* « Anat. Hefte », Abtl. I, H. XI (Bd IV, H. I) 1894.
CASTELLANI, *Sullo sfintere a fibre liscie della vescica urinaria di alcuni mammiferi e suoi rapporti con la regione del trigono vescicale.* « Arch. di Anat. Pat. e Sc. aff. », a. V, Palermo 1909.

Endocrinologia. — *Tessuto acinoso del pancreas e genesi del diabete da allossana negli uccelli granivori.* Nota di GIAN CARLO MORANDO e UGO DACHÀ, presentata (*) dal Corrisp. U. LOMBROSO.

L'azione diabetogena dell'allossana è stata comunemente attribuita alla sua proprietà di distruggere le cellule beta delle insule di Langerhans. Questo meccanismo di azione è stato convalidato dagli esami istologici eseguiti sui comuni animali da esperimento (conigli, cani, topi) (Dunn e coll. 1943 (1), Bailey, 1943 (2), Goldner e Gomori, 1943 (3), Marcozzi e Prosperi (4)). Una tale proprietà, quasi specifica, dell'allossana sulle cellule beta, ha dato lo spunto ad una numerosa serie di ricerche tendenti a chiarire la patogenesi del diabete, in quanto è possibile provocare sperimentalmente un quadro sintomatologico, che più di ogni altro si avvicina a quello umano, tanto che alcuni AA. hanno fatto l'ipotesi che nell'uomo diabetico possa avvenire una liberazione di allossana (Dunn (5) e Young, Joslin (6)). La bibliografia sull'allossana è ormai molto estesa e rimandiamo alle riviste sintetiche, numerose e complete, chi voglia conoscere più particolarmente l'argomento (Bailey, Bailey e Leech (7), di Guglielmo (8), Cavallero (9)).

La nostra attenzione è stata richiamata recentemente da un dato nuovo e certamente molto interessante, riportato quasi contemporaneamente da Walpole e Innes (10) e da Capellato, (11, 12, 13) secondo cui i conigli diventano completamente

(*) Nella seduta dell'8 gennaio 1949.

(1) J. DUNN, K. J. KIRPATRICK, N. G. MC LETCHIE, S. V. TELFER, « J. Path. a. Bact. », *55*, 245 (1943).
(2) C. C. BAILEY e O. T. BAILEY, J. A. M. A., *1922*, 1165 (1943).
(3) M. GOLDNER e G. GOMORI, « Endocrinology », *33*, 297 (1943).
(4) G. MARCOZZI e P. PROSPERI, « Arch. De Vecchi », *7*, 287 (1944).
(5) J. DUNN e YOUNG, citati da CAVALLERO.
(6) JOSLIN, citato da CAVALLERO.
(7) C. C. BAILEY, O. T. BAILEY, e R. LEECH, « New. Engl. J. Med. », *250*, 533 (1944).
(8) R. DI GUGLIELMO, « Progresso Med. », *2*, 83 (1946).
(9) C. CAVALLERO, « Rass. Clin. Scient. », XXIII, N. *12*, 367 (1947).
(10) A. L. WALPOLE e R. N. INNES, « Brit. J. Pharm. a. Chemother. », *1*, 174 (1946).
(11) M. CAPELLATO, « Arch. De Vecchi », *9*, N. 1 (1946).
(12) M. CAPELLATO, « Atti della Soc. Med. Chir. di Padova », *26*, gennaio, 1948.
(13) M. CAPELLATO, « Atti della Soc. Med. Chir. di Padova », *26*, gennaio, 1948.

refrattari all'iniezione di allossana se sono stati sottoposti in precedenza alla legatura dei dotti di Wirsung (almeno un mese prima), con conseguente atrofia del tessuto acinoso. Gli Autori tendono a concludere che nel diabete possa intervenire una correlazione funzionale tra tessuto insulare e tessuto acinoso. La Barre e Hanquinet [14], sperimentando sul cane, non confermarono il risultato, in quanto ottennero il diabete da allossana iniettata uno o due mesi dopo legatura dei dotti pancreatici. Essi quindi negano vi possa essere un rapporto di dipendenza tra l'insorgere del diabete allossanico e la conservazione del tessuto acinoso.

Pur accettando i dati di fatto ottenuti da La Barre e Hanquinet, la loro conclusione non ci appare accettabile senza opportuni controlli sugli effetti che nel tessuto acinoso del cane apporta la legatura dei dotti pancreatici. Dal Lombroso [15], già dal 1904, è stato osservato (e da molti altri AA. confermato), che nel cane, a differenza di quanto avviene nel coniglio, il tessuto acinoso persiste ben conservato in elevata percentuale anche dopo 115 giorni dalla semplice legatura e recisione dei dotti. Per ottenere una sclerosi bisogna iniettare paraffina nei dotti stessi.

Dalle esperienze di Capellato risulta invece un dato di grandissimo interesse. Questo Autore anzitutto ha controllato se l'allossana, nel coniglio a dotti di Wirsung legati, conduceva alle note alterazioni del tessuto insulare, giungendo a constatare che esse erano sopravvenute nella consueta intensità, accanto alle modificazioni del tessuto acinoso, rappresentate da riduzione numerica degli acini, separati gli uni dagli altri da tralci di connettivo. In altre esperienze ha praticato la legatura dei dotti pancreatici in conigli resi diabetici da una precedente iniezione di allossana. Il quadro fenomenologico si modificò in modo del tutto inatteso. Il diabete scomparve e si instaurò una ipoglicemia progressiva, contro la quale non valsero ripetute introduzioni di glucosio. Gli animali vennero tutti a morte in coma ipoglicemico. All'esame istologico osservò la solita distruzione del tessuto insulare che è completa nelle 24/48 ore susseguenti al trattamento allossanico. Il Capellato, impressionato da questo costante risultato, si pone il problema se l'ipoglicemia non sia originata da un quid a tipo insulina, immesso in circolo dal tessuto acinoso. A questo proposito ricorda l'antica concezione del Laguesse [16, 17] del « balancement » dei due tessuti pancreatici insulare ed acinoso, che potrebbero trasformarsi l'uno nell'altro e viceversa. Per quanto noi, per ragioni che qui non crediamo opportuno discutere, non riteniamo di poter accettare questa concezione, tuttavia il dato di fatto posto in luce dal Capellato ci pare molto suggestivo per indicare che tra i due tessuti intercorrano importanti rapporti nel processo della glicoregolazione. Se mai si potrebbe pensare ad una sostituzione funzionale più che ad una sostituzione morfologica del tipo formulato dal Laguesse [16, 17].

Il problema del diabete da allossana negli uccelli granivori non è ancora ben chiarito e merita conferme. Infatti, mentre Schott, Harris e Chen [18] affer-

(14) J. La Barre, e J. Hanquinet, « Bull. Soc. Chim. Biol. », *29*, 804 (1947).
(15) U. Lombroso, « Arch. Ital. Biol. », *42*, 336 (1904).
(16) E. Laguesse, « J. d'Anath. et Physiol. », *31*, 475 (1895).
(17) E. Laguesse, « Rév. Gen. d'Histol. », *2*, 2 (1905).
(18) Schott, Harris e Chen, « Science », *103*, 220 (1946).

mano che gli uccelli sono refrattari all'azione dell'allossana somministrata anche ripetute volte per via intramuscolare o endovenosa, altri (vedi Cavallero [9]) affermano che anche gli uccelli presentano il diabete. Gli uccelli granivori si comportano in modo del tutto particolare di fronte al metabolismo dei glucidi. Basti considerare che l'estirpazione del pancreas non provoca un vero diabete e che essi possono resistere a dosi enormi di insulina, rapidamente mortali per qualsiasi altro tipo di animale; soltanto quando il colombo è profondamente diabetico per iniezione di florizina perde questa strana insulino–resistenza (Ardy) [19].

Il particolare comportamento degli uccelli granivori di fronte al metabolismo intermedio glucidico e cioè la possibilità di una normale combustione dei glucidi anche in assenza del pancreas, ci ha suggerito di svolgere le seguenti ricerche, per rispondere ad alcuni quesiti.

Anzitutto, l'allossana sarà capace di provocare un diabete in animali in cui la pancreatectomia non lo provoca? In tal caso la distruzione delle sole insule, quando il tessuto acinoso è ancora conservato, è una condizione più atta a provocare l'insorgenza del diabete, che non l'assenza del pancreas in toto?

In secondo luogo, si può confermare, con altra disposizione sperimentale, l'intervento del pancreas esocrino nel diabete da allossana?

Allo scopo di rispondere a questi quesiti abbiamo impostato quattro gruppi di ricerche:

I. Gruppo: comprende N. 6 colombi che vennero trattati con una unica dose di allossana, pari a mgr 350 pro Kg., per via intramuscolare.

II. Gruppo: comprende N. 4 animali del primo gruppo ai quali venne praticata l'estirpazione del pancreas in tredicesima giornata dopo l'iniezione di allossana, quando la glicosuria era completamente scomparsa.

III. Gruppo: comprende N. 7 animali operati di estirpazione del pancreas.

IV. Gruppo: comprende N. 4 animali del III gruppo ai quali venne praticata un iniezione di 350 mgr pro Kg. di allossana per via intramuscolare in IV giornata dopo la pancreatectomia.

I colombi venivano tenuti ad una dieta costante di 10 gr di mais al giorno. Il materiale escreto dalla cloaca veniva raccolto ogni 24 h; sciolto in acqua calda, defecato con acetato di Pb al 10 %, portato a volume e filtrato. Su di esso si procedeva al dosaggio delle sostanze riducenti con il metodo di Benedict.

Riportiamo nelle seguenti tabelle i risultati ottenuti. L'eliminazione giornaliera delle sostanze riducenti è espressa in mgr. Sono state indicate con 0 anche le cifre inferiori a 10 mgr, quantità riscontrata spesso anche negli animali normali.

Gli animali n. 1, 4, 5, 6 furono seguìti fino al 13° giorno e non presentarono più eliminazione di sostanze riducenti. In tredicesima giornata fu praticata l'estirpazione del pancreas (Vedi tabella II).

(19) C. ARDY, «Arch. Maragliano», 2, 209 (1947).

TABELLA I.

Colombi allossanati

(mgr. 350 di allossana pro Kg per via intramuscolare).

Animale N.	Peso gr.	Giorni di esperienza					
		1°	2°	3°	4°	5°	6°
1	380	0	0	0	0	0	0
2	335	0	40	50	86	14	0
3	320	0	32	10	0	0	0
4	387	0	0	0	10	0	0
5	315	0	25	26	20	0	0
6	440	0	17	0	30	26	0

TABELLA II.

Colombi allossanati e successivamente spancreati.

Animale N.	Peso gr.	Giorni di esperienza						
		13° (1)	14°	15°	16°	17°	18°	19°
1	310	0	34	162	325	205	190	130 +
4	320	0	0	70	174	450	83 +	
5	240	0	80	460	420	+		
6	380	0	20	55	170	86	40	+

(1) In 13° giorno estirpazione del pancreas.

TABELLA III.

Colombi spancreati.

Animale N.	Peso gr.	Giorni di esperienza					
		1°	2°	3°	4°	5°	6°
1	318	0	0	0	si sospende l'esperienza		
2	362	0	0	60	100	+	
3	280	0	57	114	106	+	
4	330	0	40	100	30	si sospende l'esperienza	
5	310	0	0	0	si sospende l'esperienza		
6	340	0	26	105	130	40	+
7	315	0	92	76	80	si sosp. l'esper.	

Gli animali 1 e 5, che non presentarono diabete fino alla 3ª giornata e gli animali 4 e 7 furono successivamente allossanati in 4ª giornata (v. tabella IV).

TABELLA IV.

Colombi spancreati e successivamente allossanati

(mgr 350 pro Kg per via intramuscolare).

Animale N.	Peso gr.	Giorni di esperienza						
		4° (1)	5°	6°	7°	8°	9°	10°
1	308	0	35	120	140	234	44	+
4	270	30	50	145	195	20 +		
5	265	0	30	25	70	135	+	
7	250	80	235	30 +				

(1) In quarta giornata gli animali venivano trattati con allossana.

RISULTATI E CONCLUSIONI. – Dalle presenti ricerche risulta:

1° L'iniezione di allossana negli uccelli granivori non provoca un vero diabete, come avviene invece con altri interventi farmacologici, come ad esempio con la florizina. Soltanto si avverte, per un breve periodo di tempo, una lieve glicosuria.

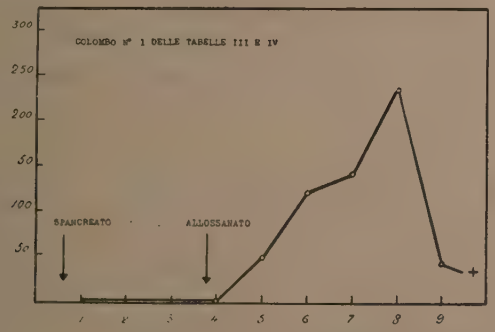


Fig. 1. – Sull'ascissa sono indicati i giorni di esperienza e sull'ordinata la glicosuria in mgr.

2° Si conferma che l'estirpazione del pancreas in questi animali non è seguita da un vero diabete, ma semplicemente da una lieve transitoria glicosuria, del tipo di quella osservata con il trattamento con allossana.

3° L'intossicazione con allossana in un colombo spancreato provoca una glicosuria di gran lunga superiore a quella ottenuta con la semplice estirpazione del pancreas o col trattamento allossanico di per se stesso. (Vedi fig. 1). Questo dato di fatto ci conferma l'ipotesi che l'allossana, oltre che sulle insule

del Langerhans, agisca su altri tessuti che partecipano nel colombo alla glicoregolazione. Ricerche svolte in questo laboratorio tendono a far ritenere che il duodeno intervenga nel metabolismo intermedio glucidico.

4° L'estirpazione del pancreas in un colombo allossanato, anche quando la lieve glicosuria era già scomparsa, provoca l'insorgere di un diabete di gran lunga superiore a quello ottenuto sia con l'avvelenamento da allossana, che con l'estirpazione semplice del pancreas. (Vedi fig. 2).

Dal complesso di questi risultati emerge il fatto che, almeno negli uccelli granivori, la presenza del tessuto acinoso non è per nulla necessaria per l'insor-

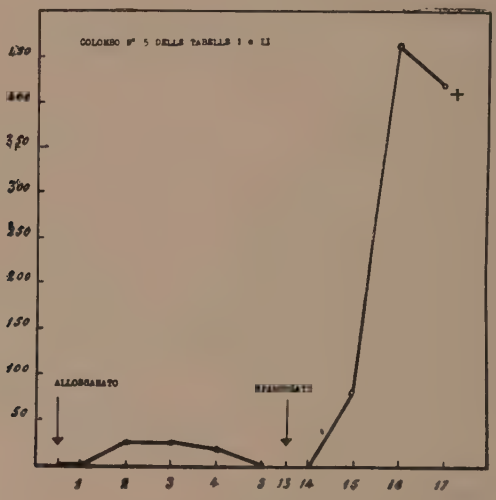


Fig. 2. - Sull'ascissa sono indicati i giorni di esperienza e sull'ordinata la glicosuria in mgr.

gere del diabete da allossana; al contrario l'estirpazione del tessuto acinoso (dovendosi considerare il tessuto insulare distrutto dall'azione dell'allossana), rende manifesto un diabete che altrimenti non si era potuto osservare.

Di fronte alle osservazioni del Capellato (giunte a nostra conoscenza dopo che già le presenti esperienze erano state eseguite) riguardanti la progressiva mortale ipoglicemia nei conigli allossanati dopo legatura dei dotti pancreatici, con conseguente atrofia del tessuto acinoso, le presenti ricerche non possono portare alcuna delucidazione. Troppi fenomeni noi dobbiamo seguire dopo la legatura dei dotti pancreatici (possibile riassorbimento di secreto pancreatico o penetrazione in circolo di materiale pancreatico esocrino che si libera nella rapida distruzione dell'organo), per poter indagare a quale di essi si debba l'insorgere dell'ipoglicemia progressiva. Sono problemi di interesse fondamentale ai quali verrà contribuito con ulteriori ricerche.

Fisiologia. — *Sugli effetti di alte dosi di tiamina in alcune specie di anuri* (*). Nota di ANTONINO ALIBRANDI, presentata (**) dal Socio C. CIACCIO.

La somministrazione endovenosa di dosi di cloridrato di tiamina superiori a g. 0,1 pro Kg. è seguìta nei conigli da morte per paralisi respiratoria. (Hecht e Weese (1); Haley e Flesher (2)).

Allo scopo di meglio studiare l'azione generale di alte dosi di tiamina decisi di istituire ricerche su alcune specie di batraci anuri che, a causa dell'attiva respirazione cutanea, sono capaci di sopravvivere all'arresto della respirazione polmonare.

Ho iniettato cloridrato di tiamina Roche (disciolto in acqua distillata in diverse proporzioni, di cui nessuna inferiore all'un per cento) nel sacco linfatico dorsale di varie dozzine di esemplari di *Discoglossus pictus*, di *Rana viridis* e di *Bufo vulgaris*.

Per dosi variabili da specie a specie ma generalmente non inferiori al mg pro grammo di animale, notai il progressivo instaurarsi di una paralisi di moto: gli animali a poco a poco si afflosciavano, poggiavano la testa e non si notava in essi più alcun movimento all'infuori dei moti del cuore e del respiro.

Elevando ancora le dosi la paralisi si estendeva ai muscoli respiratori e gli animali assumevano un aspetto simile a quello che può in essi osservarsi per effetto della classica azione del curaro, unico moto apprezzabile restando quello del cuore. L'effetto delle dosi suddette anche se sufficienti ad arrestare i movimenti respiratori si mostrava del tutto reversibile; dopo alcune ore infatti i movimenti del respiro ricomparivano, si facevano progressivamente più frequenti e più validi ed erano infine seguìti dalla graduale ricomparsa della motilità volontaria e dal tono della muscolatura scheletrica.

Dosi più elevate di quelle sufficienti a determinare la paralisi del respiro dopo aver prodotto rapidamente il quadro della paralisi suddescritta erano seguite nel termine di alcune ore dalla morte dell'animale.

Ulteriori ricerche in corso tendono a chiarire il meccanismo di azione di tali effetti della tiamina.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica biologica della Università di Roma e nell'Istituto di Fisiologia Umana della Università di Messina.

(**) Nella seduta del 12 febbraio 1949.

(1) HECHT e WEESE, «Klin. Wschr.» *16*, 414 (1937).

(2) HALEY e FLESHER, «Science», *104*, 569 (1946).

Biologia. — *Ricerche sull'azione oligodinamica dell'argento.* Nota di Ettore Biocca, presentata (*) dal Corrisp. V. Puntoni.

L'attività antimicrobica oligodinamica dei metalli è stata oggetto di numerosissimi studi ed interessanti applicazioni pratiche nel campo dell'igiene, della microbiologia e della clinica.

Il meccanismo con cui si esplicherebbe questa azione oligodinamica è ancor oggi oggetto di appassionate discussioni. Per limitarci alle opinioni dei ricercatori italiani, ricorderemo che la maggior parte di essi è d'accordo nel ritenere che è necessario, perchè il metallo agisca, che si trovi sotto forma ionica dissociata nel liquido (Bertarelli e collaboratori [1], Casagrandi e Seppilli [2] ecc.), sebbene alcune osservazioni, sia di La Cava [3] che di Mazzetti [4], abbiano indotto questi autori ad ammettere che il metallo possa agire anche allo stato colloidale.

Data l'importanza dell'argomento abbiamo cercato di portare il nostro contributo alla conoscenza dell'azione oligodinamica dei metalli, iniziando le ricerche sull'Elettrocatadyn, che ha permesso le maggiori applicazioni pratiche nel campo dell'igiene.

Abbiamo scelto l'Elettrocatadyn, soprattutto per le possibilità che ci offre di avere rapidamente a disposizione un'acqua oligodinamizzata e di conoscere approssimativamente la quantità di argento immessa nel liquido.

Come è conosciuto, l'elettrocatadinizzazione di un'acqua si pratica immergendovi due elettrodi di argento e lasciando passare una corrente elettrica continua di pochi volt che libera argento secondo la legge di Faraday.

È di osservazione corrente, che, tutte le volte che l'apparecchio funziona, si ha sviluppo, dal polo positivo, di una nubecola biancastra, che lentamente si diffonde in tutto il liquido.

Ci siamo perciò proposti di studiare quale fosse la funzione dei due elettrodi di argento e della nubecola che si forma intorno al polo positivo. Infine abbiamo voluto controllare se l'immissione di una stessa quantità di argento nell'acqua, sia per mezzo dell'elettricità, sia per mezzo di un sale solubile, il nitrato d'argento, producesse analoga azione antimicrobica.

La tecnica da noi seguìta è stata costantemente la stessa. Abbiamo usato sempre un'acqua « campione » che conteneva disciolti g. 0,066 di NaCl e cm³ 14 di una soluzione N/100 di carbonato di sodio per litro, già utilizzata per ricerche microbiologiche sull'oligodinamismo dell'argento e che presenta il vantaggio, sulle

(*) Nella seduta dell'8 gennaio 1949.

(1) E. Bertarelli, E. Caserio e I. Peragallo, *Ricerche sulla potabilizzazione delle acque col metodo « Catadyn »*. « Ann. d'igiene », *46*, 449 (1936).

(2) O. Casagrandi e A. Seppilli, *L'azione oligodinamica dei metalli con particolare riguardo alle sue applicazioni pratiche per la potabilizzazione dell'acqua*. « Riv. di Biol. », *16*, 14 (1934).

(3) G. La Cava, *Azioni oligodinamiche dei metalli sui batteri*. « Ann. d'igiene », *41*, 612 (1931).

(4) G. Mazzetti, *Sulla possibilità di sfruttare le proprietà oligodinamiche dello Zn per la depurazione batteriologica delle acque*. « Atti R. Acc. dei Fisiocritici in Siena », *4*, 318 (1936).

acque telluriche, di possedere una composizione salina costante e conosciuta. A quest'acqua attivata sia per mezzo dell'Elettrocatadyn, sia per mezzo di soluzioni titolate di nitrato d'argento, aggiungevamo, a parti uguali, soluzione fisiologica che conteneva circa 2.000.000 di colibacilli per cm^3, ripresi da un agar cultura di 24 ore, in maniera che la miscela finale avesse approssimativamente 1.000.000 di colibacilli per cm^3. Lasciavamo i tubi col liquido in esame per sei ore a temperatura ambiente e successivamente seminavamo alcune gocce in terreni solidi e liquidi (agar e brodo) e ponevamo in termostato a 37°C, leggendo i risultati dopo 1, 2, 6 giorni.

L'apparecchio Elettrocatadyn, che ci ha permesso di dosare la quantità di argento immessa nell'acqua « campione » è stato preparato nell'Istituto Superiore di Sanità dal prof. Trabacchi, a cui siamo grati per l'assistenza e per i consigli fornitici.

Le ricerche saranno esposte per esteso in una prossima pubblicazione. Ci limitiamo per ora a riferire solamente i seguenti principali risultati ottenuti, frutto di numerose esperienze.

1° È possibile sostituire l'elettrodo negativo d'argento dell'Elettrocatadyn con un elettrodo di metallo diverso (ferro, rame, zinco ecc.) senza che ciò influisca in maniera evidente sul funzionamento dell'apparecchio. L'acqua così trattata è oligodinamicamente attiva.

2° Il precipitato biancastro, sotto forma di nubecola che, nelle nostre condizioni di esperimento, si sviluppa intorno al polo positivo d'argento durante il passaggio della corrente elettrica è formato da cloruro di argento, come è possibile dimostrare chimicamente con i comuni metodi di analisi qualitativa. Esso conferisce potere oligodinamico antimicrobico al liquido. Infatti tutti i procedimenti fisici che permettono di allontanare il precipitato (filtrazione, centrifugazione, riscaldamento, invecchiamento) fanno diminuire contemporaneamente nel liquido il potere oligodinamico.

3° L'aggiunta di ammoniaca ad un'acqua « campione » fortemente elettrocatadinizzata e quindi opalescente, ridona all'acqua stessa la sua limpidezza, perchè il cloruro di argento si trasforma in sale solubile ammoniacale d'argento. L'attività oligodinamica di un'acqua così trattata continua, anche dopo i procedimenti fisici di centrifugazione, riscaldamento, invecchiamento.

4° Una soluzione di nitrato di argento, aggiunta all'acqua « campione », conferisce un potere oligodinamico antimicrobico analogo a quello che si ottiene immettendo la stessa quantità di argento per mezzo dell'Elettrocatadyn. Nei due casi si assiste alla formazione di un precipitato di cloruro di argento finissimamente disperso, che si discioglie con aggiunta di ammoniaca.

* * *

Le principali conseguenze pratiche nel campo dell'igiene e della microbiologia che derivano da queste ricerche sono le seguenti:

possibilità di semplificare notevolmente gli apparecchi Elettrocatadyn, abolendo l'elettrodo negativo di argento e sostituendolo con un elettrodo di altro

metallo meno costoso (ferro, rame, zinco ecc.) o utilizzando come elettrodo negativo le eventuali pareti metalliche del recipiente in cui si trova l'acqua da trattare;

possibilità di sostituire con vantaggio ai complessi e costosi impianti di elettrocatadinizzazione per la depurazione di piscine o la potabilizzazione di acque, una semplice bottiglia di Mariotte che regoli la caduta di una soluzione titolata di nitrato di argento e immetta nell'acqua la stessa quantità di argento che sarebbe stata immessa con l'Elettrocatadyn;

possibilità di sostituire in tutte le applicazioni microbiologiche (preparazione di vaccini, purificazioni di linfa vaccinica, di catgut, isolamento elettivo di germi ecc.) in cui è stata usata con successo acqua oligodinamizzata per mezzo dell'elettricità, soluzioni titolate di nitrato di argento.

Biologia (Microbiologia). — *Studio morfologico, al microscopio elettronico, dei fagi attivi sui micobatteri* (*). Nota di VITTORIO ORTALI e GIUSEPPE PENSO, presentata (**) dal Corrisp. D. MAROTTA.

Nella passata seduta abbiamo riferito sull'isolamento e lo studio di cinque fagi attivi sui micobatteri, riservandoci di comunicare ulteriormente lo studio di detti fagi al microscopio elettronico, il che facciamo oggi.

I primi tentativi per individuare al microscopio elettronico i predetti fagi furono vani, giacchè, con la comune tecnica di preparazione per l'osservazione elettronica (centrifugazione del materiale, lavaggio e centrifugazione), non si riusciva a individuare alcun fago, nè fagi si potevano rinvenire nel materiale sottoposto a semplice filtrazione per Seitz.

Cambiammo, allora, tecnica e pensammo di usare il metodo a stampo: un vetrino coprioggetto veniva fatto intimamente aderire sull'agar di un'area fagica, il vetrino veniva poi asportato con una pinzetta e posto sopra un piano con la superficie di adesione rivolta verso l'alto; su tale superficie veniva depositata una goccia di acqua distillata e con un'ansa vi si stemperava il materiale rimasto aderente sul vetrino. Un'ansata della sospensione veniva, infine, deposta sulle blende. Con tale tecnica riuscimmo ad osservare i fagi. La visione elettronica, però, non era del tutto chiara, giacchè il campo microscopico appariva come annebbiato, velato, ovattato. Cercammo migliorare la tecnica: ponemmo una grossa ansata di acqua distillata direttamente sull'area fagica sfregando leggermente l'ansa sull'agar con la speranza di spostare i fagi dall'agar nell'acqua; una piccola ansata del liquido ottenuto veniva poi trasportata sulla blenda o la stessa blenda veniva immersa capovolta nella goccia onde caricarla. I risultati furono migliori dei precedenti, ma non ancora ottimi, giacchè la velatura persisteva: la attribuimmo a particelle di agar che passavano in sospensione. Cercammo ovviare l'inconveniente preparando le nostre aree fagiche su agar al 3 % anzichè al 2 % ed eliminando lo

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Superiore di Sanità di Roma.
(**) Nella seduta dell'8 gennaio 1949.

Fig. 1. – *Phagus phlei.*

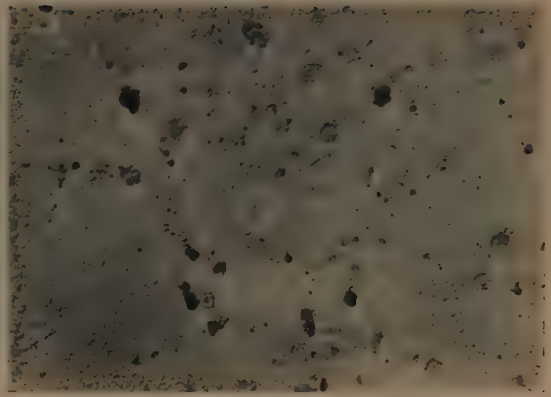


Fig. 2. – *Phagus phlei* (preparato metallizzato).

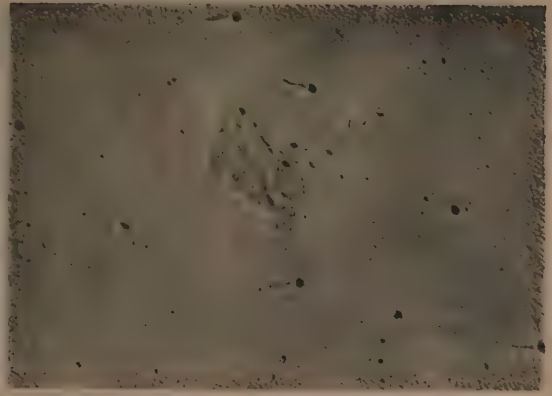


Fig. 3. – *Phagus lacticola* (preparato metallizzato).

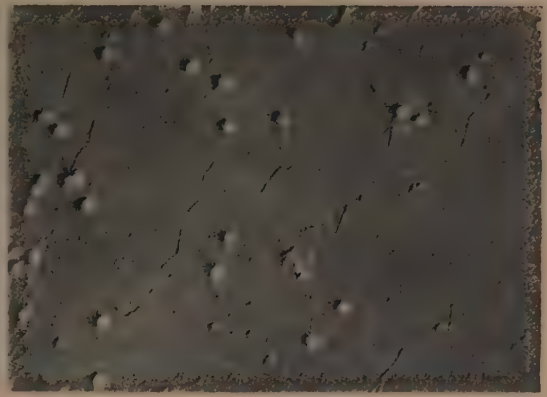


Fig. 4. – *Phagus lacticola* (preparato metallizzato e contro-tipo). Notare le numerose ciglia staccate.

Fig. 5. – *Phagus Rabinowitsch* (preparato metallizzato).

Fig. 6 – *Phagus Rabinowitsch* (preparato metallizzato e controtipo). Si osserva chiaramente il granulo interno.

Fig. 7. – *Phagus smegmatis.*

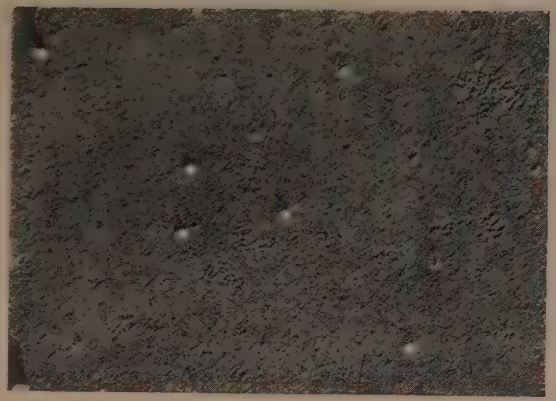


Fig. 8. – *Phagus Pellegrino* (preparato metallizzato e controtipo). Notare i due grossi granuli e endoplasmatici e il granulo all'estremo ciliare.

strusciamento dell'ansa sull'agar: un'ansata (ansa di 4 mm.) di acqua distillata veniva deposta sull'area fagica, si attendeva qualche minuto con la speranza che i fagi - che avevamo visti ciliati e che presumibilmente dovevano essere mobili - passassero nella goccia, si prendeva la blenda che, capovolta, caricavamo portandola a contatto con la goccia. Tale tecnica ci permise di ottenere preparati puliti, ricchi e fotografabili.

Le blende venivano osservate o direttamente o previa metallizzazione. Questa seconda tecnica si è dimostrata la migliore per lo studio morfologico dei nostri fagi.

Passiamo, ora, alla metodica descrizione dei cinque fagi studiati.

Phagus phlei. – È costituito da un corpo rigido allungato e da un ciglio flessuoso. Il corpo è a bastoncello, di aspetto nettamente bacillare nei preparati non metallizzati (fig. 1) digitiforme, a dattero in quelli metallizzati (fig. 2). In questi ultimi si mette nettamente in evidenza una struttura interna: ad ogni estremo del corpo è presente un granulo. I due granuli sono generalmente di dimensioni e di aspetto diverso: il più piccolo sembra essere meno compatto, meno spesso del più grande, e tondeggiante, talvolta duplice, i due granuli assumono allora l'aspetto di un chicco di caffè. Dal granulo più piccolo si diparte un ciglio che attraversa il corpo del fago e raggiunge il granulo più grande che si presenta di solito a semisfera; superato questo secondo granulo, il ciglio diviene libero ispessendosi leggermente, ma mantenendosi flessibile per tutta la sua lunghezza.

Le dimensioni medie del *Phagus phlei* sono: lunghezza del corpo μ 0,15–0,20, larghezza μ 0,05-0,06; lunghezza del flagello μ 0,25–0,30, suo spessore μ 0,01; spessore dei granuli μ 0,025–0,03.

Phagus lacticola. – È costituito da un corpo rigido, sferico e da un ciglio lungo, poco flessuoso. Il corpo è quasi a palla, compatto, sprovvisto apparentemente di speciale organizzazione interna (fig. 3). Il ciglio si distacca da un punto non definito della sfera, si mostra poco flessuoso ed è piuttosto spesso e fragile, giacchè in alcuni preparati (fig. 4) si rinvengono numerose ciglia distaccate dai rispettivi corpi.

Le dimensioni del *Phagus lacticola* sono: diametro del corpo μ 0,05-0,06; lunghezza del ciglio μ 0,24–0,28, suo spessore μ 0,02.

Phagus Rabinowitsch. – È costituito da un corpo rigido, sferico e da un ciglio molto corto. Il corpo è a palla, grosso, compatto (fig. 5), provvisto di un grosso granulo interno visibile soprattutto nelle fotografie a controtipo (fig. 6). In vicinanza di tale granulo si distacca il ciglio corto, poco flessibile, e che presenta un ingrossamento terminale.

Le dimensioni del *Phagus Rabinowitsch* sono: diametro del corpo μ 0,08; lunghezza del flagello μ 0,12–0,15, suo spessore μ 0,03.

Phagus smegmatis. – È costituito da un corpo rigido, allungato e da un ciglio abbastanza flessuoso. Il corpo è di aspetto tozzo, quasi ad oliva. Nel suo interno

si distinguono nettamente due granuli posti ognuno a un estremo del corpo (fig. 7). I due granuli non hanno uguale compattezza, e quello opposto al lato da cui si libera il ciglio sembra essere più grosso. Il ciglio è abbastanza spesso, discretamente lungo e flessuoso; esso si origina da un estremo del fago e probabilmente dal granulo prossimiore. Non sembra che il ciglio percorra un tratto nell'interno dell'endoplasma come osservato nel *Phagus phlei*. All'estremo libero del ciglio si osserva un piccolo ingrossamento (fig. 7).

Le dimensioni del *Phagus smegmatis* sono: lunghezza del corpo μ 0,08–0,09; larghezza μ 0,035; lunghezza del ciglio μ 0,16–0,19, suo spessore μ 0,02; spessore medio dei granuli μ 0,03.

Phagus Pellegrino. – È costituito da un corpo rigido e da un ciglio poco flessibile. Il corpo è a limiti rotondeggianti, non a sfera ma piuttosto a lente; nel suo interno è possibile mettere in evidenza un granulo centrale ed un anello periferico (fig. 8). Il ciglio è abbastanza lungo, sottile e pochissimo sinuoso.

Le dimensioni del *Phagus Pellegrino* sono: diametro del corpo μ 0,06–0,07; lunghezza del ciglio μ 0,15–0,16, suo spessore μ 0,017; spessore del granulo μ 0,01.

Biologia. — *La catalasi negli organi di «Bufo vulgaris» in metamorfosi* (*). Nota di Eolo Cavazzini, presentata (**) dal Socio G. Cotronei.

Dalle ricerche di Mistruzzi (1943) (1) e Puma (1943), risulta un andamento pressocchè identico della curva catalasica di larve di *Bufo vulgaris*, sia che queste vadano in metamorfosi naturalmente (Mistruzzi), o in seguito a trattamento tiroideo (Puma) (2).

Il forte aumento in catalasi durante la metamorfosi e la notevole caduta che si nota in seguito a tale periodo mi ha spinto ad eseguire una più intima analisi del processo, indagando le variazioni dell'attività catalasica di alcuni organi durante la metamorfosi stessa, al fine di poter stabilire se esista un comportamento differenziale di essi ed in che misura esso possa influire sull'andamento della curva dell'attività catalasica dell'animale in toto.

Le modificazioni morfologiche e fisiologiche dei vari organi di *Bufo vulgaris* e di *Rana esculenta* durante la metamorfosi sono state minuziosamente descritte nei più intimi particolari dal Cotronei (3) al cui lavoro mi riferisco per quanto

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata dell'Università di Roma. Ringrazio la dott.ssa Urbani-Mistruzzi che mi ha guidato nella presente ricerca che è stata eseguita grazie all'aiuto fornito dall'ing. Fabio Friggeri il quale ci ha permesso in tal modo di onorare la memoria del figlio caduto eroicamente nella pietosa missione del medico.

(**) Nella seduta del 12 febbraio 1949.

(1) Mistruzzi, «Riv. Biol.», *36* 1943.

(2) Puma, «SIPS» XXI, 1943.

(3) Cotronei, «Mem. Acc. Linc.», 1914.

riguarda il comportamento dell'intestino e del fegato, organi che ho preso in particolare considerazione nella presente ricerca.

Il dosaggio dell'attività catalasica durante i primi stadi dello sviluppo degli anfibi è stato eseguito da Hall (4) e da Bialaszevicsk (5); le ricerche pur essendo state eseguite sullo stesso materiale (*Bufo americanus*) hanno dato risultati contrastanti. Friggeri (6) riprese in esame le variazioni quantitative dell'attività catalasica nel periodo embrionale e ha messo in particolare rilievo i rapporti fra quantità di catalasi e possibilità di vita anaerobia interpretando i risultati in conformità alle ipotesi di Spirito (7) alle quali inoltre hanno portato un recente contributo le esperienze di Castigli–Pitotti (8) sulla catalasi nei petromizonti.

Come ho già accennato, la Mistruzzi su *Bufo vulgaris* con il metodo gas volumetrico di Burge ha studiato le curve del contenuto in catalasi dall'inizio della vita larvale sino al principio della metamorfosi, curva che nei valori assoluti mostra un andamento costantemente crescente fino alla metamorfosi dopo la quale si ha una caduta dell'attività catalasica senza che tale fenomeno si possa attribuire alla perdita di catalasi in quegli organi che si distruggono durante tale periodo (coda).

Tali ricerche sono convalidate dalle osservazioni di Puma che pur accelerando la metamorfosi con tiroxina, ha ottenuto le stesse variazioni.

Come ho già detto ho voluto indagare più da vicino il comportamento dei singoli organi in questo periodo. Il materiale adoperato è dato da esemplari di *Bufo vulgaris*; i soggetti sono tenuti in identiche condizioni ambientali ed alimentati con tuorlo d'uovo cotto a temperature superiori a 60°–70° in quanto tale vitto non contenendo catalasi non è causa di errore nelle valutazioni dei risultati.

Il metodo adoperato è quello gas volumetrico di Burge: i valori letti al termine della reazione vengono riportati a 0° C. ed a 760 mm. di Hg.

Il materiale è stato diviso in sei stadi secondo un criterio morfologico:

1° Larva immediatamente prima che si delinei l'abozzo degli arti posteriori.
2° Larva con abbozzo degli arti posteriori.
3° Larva con arti posteriori ben sviluppati.
4° Larva con arti anteriori non estroflessi (ben visibili sotto l'opercolo).
5° Esemplare con arti anteriori estroflessi.
6° Rospetto due giorni dopo il completo riassorbimento della coda.

Va tenuto ben presente che nello stabilire *a priori* il I° stadio (e in parte anche gli altri), il criterio è soltanto approssimativo e soggettivo in quanto dedotto dall'osservazione dei controlli nelle identiche condizioni di allevamento.

Gli esemplari vengono prima pesati e poi operati in Ringer per anfibi con l'aiuto del binoculare per isolarne il fegato (esclusa la colecisti) ed il tubo gastro enterico reciso prossimalmente al di sotto del setto trasverso e, posteriormente, all'apertura anale; tubo gastro enterico (manicotto ghiandolare ed intestino),

(4) HALL, « Ecology », *5*, 290, (1924).
(5) BIALASZEVICSK, « Travaux du lab. fisiol. Istit. Nenki », I, 1921.
(6) FRIGGERI, « Riv. Biol. » *26*, 1938; « Arch. Sc. Biol. », XVI, 1940.
(7) SPIRITO, « Arch. Sc. Biol. », XX, 442, (1934).
(8) CASTIGLI–PITOTTI, « Boll. Soc. Ital. Biol. sper. », XXIV, 117 (1948).

che isolato dal pancreas e dal fegato viene accuratamente deterso dai residui alimentari. Ciascun pezzo anatomico viene quindi pesato con bilancia di precisione (al 1/10 di mg.) dopo averne eliminato il mezzo liquido per quanto è possibile.

Nella tabella I sono indicati i vari stadi considerati: alla colonna 1 si trovano tre numeri indicanti ciascuno il peso medio di due animali interi; un'analoga spiegazione vale per la colonna 2 dove sono riportati i pesi in milligrammi dell'organo; nella colonna 3 sono riportati i rispettivi valori della catalasi espressi in cc. di ossigeno; nella colonna 4 le concentrazioni della catalasi per 1 mg. di sostanza.

I valori definitivi sono ottenuti per esaurimento della reazione che varia per gli organi isolati da un'ora e mezza a circa due ore.

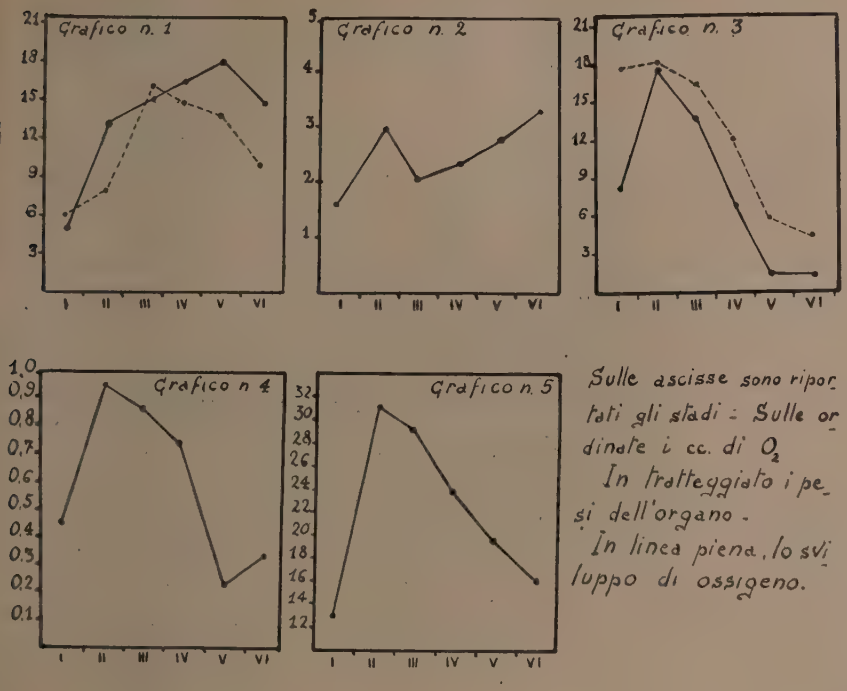
Per la preparazione dell'acqua ossigenata ho usato il Peridrolo Merck stabilizzato per i tropici e portato al titolo di 10 volumi.

Oltre ai diagrammi relativi all'attività catalasica del fegato e dell'intestino, ritengo opportuno riportare anche il diagramma risultante dalle somme ottenute con le medie dei valori assoluti di questi due organi nei vari stadi, in quanto mi permette di mettere in evidenza dati di confronto con i risultati della Mistruzzi e del Puma, e mi dà la possibilità di avanzare alcune ipotesi di cui tratterò in seguito.

Esaminando i rapporti fra massa ghiandolare epatica e peso della larva (tabella I), si nota che il massimo dei pesi dell'animale *in toto* presenta il suo apice al secondo stadio (prima della fuoriuscita degli arti anteriori) mentre il fegato al III°, e che quindi la massa ghiandolare epatica tende ad aumentare pur riducendosi il peso dell'animale come è già stato messo in evidenza dal Cotronei. Sul grafico dei valori assoluti in catalasi (ved. grafico n. 1) si nota un aumento progressivo che presenta il suo apice al quinto stadio e di qui diminuisce un poco durante il riassorbimento della coda sino a due giorni dalla completa metamorfosi (termine delle mie esperienze). Si nota una stretta analogia comparando questo grafico con quelli ottenuti dalla Mistruzzi sull'animale *in toto*.

Ora è evidente come il progressivo aumento della catalasi nel fegato possa essere interpretato come conseguenza dell'accrescimento della massa ghiandolare e nell'ultimo tratto dell'ascesa come un aumento dovuto all'accresciuto potere di riserva, oppure ad un più attivo potere sintetico. Da questo punto segue poi una modica diminuzione dell'attività catalasica che potrebbe intendersi come utilizzazione del fermento da parte di altri organi che in questo stesso stadio se ne trovano in difetto, oppure come diminuzione del potere di sintesi; altra ipotesi che potrebbe spiegare tale discesa, scaturisce dall'osservazione macroscopica dell'organo durante quest'ultimo stadio in cui culminano le modificazioni morfologiche della ghiandola e quelle fisico-chimiche della bile.

In questo stadio infatti il volume della colecisti è fortemente ridotto ed aderenti alla superficie interna si notano frequenti depositi di sostanza calcarea; il secreto biliare è notevolmente denso probabilmente in rapporto al periodo del digiuno ed alla conseguente stasi biliare; molto spesso si trovano agglomerati di cristalli che stipano il lume della cistifellea; probabilmente per le stesse cause il fegato è fortemente pigmentato.



Per quanto riguarda i valori della catalasi per 1 mg. di sostanza (vedi grafico n. 2), sembra che ad un dato momento (terzo stadio) l'aumento della massa ghiandolare non venga ulteriormente seguìto da una sintesi attiva che pertanto fa precipitare la curva dei valori relativi; di qui si ha una progressiva e regolare ascesa sino all'ultimo stadio che può interpretarsi come una ripresa del potere sintetico dopo la sosta precedente.

La tabella II riporta i valori delle concentrazioni in catalasi dell'intestino: in essa si notano delle escursioni abbastanza marcate specie in corrispondenza del quarto stadio; tali oscillazioni non sono molto frequenti e d'altra parte non alterano la continuità della curva.

La curva della catalasi dell'intestino (vedi grafico n. 3) segue quasi fedelmente quella dei pesi mostrando uno stesso apice ed una stessa discesa, mentre quella dei valori relativi ad un milligrammo di sostanza (vedi grafico n. 4) potrebbe dimostrare un primitivo accumulo di catalasi necessario per le trasformazioni cui va incontro questo apparato durante la metamorfosi. A questo primo apice che si nota quando la larva presenta l'abbozzo degli arti posteriori, segue una leggera discesa sino allo stadio di arti anteriori non estroflessi, poi la curva precipita al termine della metamorfosi, momento biologico nel quale sono in gioco molteplici fattori.

TABELLA I.

Attività catalasica nel fegato.

Stadio	Peso in mg. dell'animale *in toto*	Media	Peso in mg. dell'organo	Media	Attività catalasica in cc. di O_2	Media	Concentrazioni al mg.	Media
	n. 1		n. 2		n. 3		n. 4	
I	190–185–170	181	3,33–3,1 –2,46	2,98	6,24– 6,20– 3,61	5,35	2,01–1,86–1,46	1,77
II	220–203–210	211	6,15–3,4 –2,7	4,08	19,89–12,32– 6,25	12,82	3,23–3,62–2,31	3,05
III	180–175 178	177	8,26–7,0 –7,60	7,71	17,4 –13,08–15,64	15,37	2,10–1,86–2,05	2,00
IV	144–190–160	164	7,50–7,1 –7,2	7,26	17,35–16,69–16,95	16,99	2,31–2,35–2,35	2,33
V	116–103 105	108	8,30–4,65 6,40	6,48	23,01–14,74–17,41	18,38	2,77–3,16–2,72	2,88
VI	61– 65– 64	63	5,0 –4,5 –4,72	4,74	15,18–15,48–15,02	15,22	3,03–3,44–3,18	3,21

TABELLA II.

Attività catalasica nell'intestino.

Stadio	Peso in mg. dell'animale *in toto*	Media	Peso in mg. dell'organo	Media	Attività catalasica in cc. di O_2	Media	Concentrazioni riportate al mg.	Media
	n. 1		n. 2		n. 3		n. 4	
I	190–185–170	181	18,10–17,3 –17,6	17,66	7,62– 8,10– 8,06	7,92	0,42–0,46–0,45	0,44
II	220–203–210	211	29,5 –14,20–11,10	18,26	30,62–14,56– 8,62	17,93	1,03–1,02–0,77	0,94
III	180–175–178	177	23,0 –12,0 –18,0	17,66	15,16–13,26–13,90	14,10	0,65–1,10–0,77	0,84
IV	144–190–160	164	10,0 – 9,50 9,60	9,70	5,56–10,41– 6,45	7,47	0,55–1,09–0,67	0,77
V	116–103–105	108	6,8 – 5,50– 6,30	6,20	1,62– 1,75 1,66	1,67	0,23–0,31 0,26	0,26
VI	61– 65– 64	63	5,65 3,60– 4,75	4,66	1,92– 1,47– 1,51	1,63	0,34–0,40–0,31	0,35

Confrontiamo ora i valori delle concentrazioni del fegato e dell'intestino (vedi grafico n. 2 e n. 4); notiamo subito il deciso differente contenuto in catalasi in questi due organi, distacco che raggiunge il suo massimo verso gli ultimi stadi dove un milligrammo di fegato ha un contenuto dieci volte superiore ad un milligrammo di intestino.

Nell'ultimo diagramma (vedi grafico n. 5) risultante dalla somma delle medie dei valori assoluti nel fegato e nell'intestino, si nota un comportamento della curva analogo a quello riportato dalla Mistruzzi per l'animale intero, con un modico spostamento dell'apice verso sinistra; ma come si può osservare gli sbalzi fra i minimi ed i massimi di attività catalasica sono perfettamente identici nei loro rapporti, da cui se ne dovrebbe argomentare che il comportamento della catalasi negli altri organi non esplorati sia piuttosto omogeneo durante i vari stadi, nel senso che si tratterebbe di innalzare i valori della curva trovata senza modificare ulteriormente (eccetto uno spostamento verso destra) l'andamento ed i rapporti della curva stessa.

In conclusione dalla presente ricerca risulta che il fegato ha un contenuto in catalasi (riportato ad un mg. di sostanza fresca) molto maggiore dell'intestino e che le variazioni dell'attività catalasica del fegato di *Bufo vulgaris* in metamorfosi, hanno un andamento molto simile a quello dell'animale *in toto* dimostrandosi in tal modo che esso ha un'azione preponderante rispetto agli altri organi nel determinare l'andamento stesso della curva dell'attività catalasica durante il periodo considerato.

Biologia. — *Sull'ibridazione tra « Bufo viridis » e « Bufo vulgaris »* (*). Nota II di TEODORO PERRI, presentata (**) dal Socio G. COTRONEI.

Dal 1946 vado studiando l'ibridazione tra *Bufo viridis* e *Bufo vulgaris*, per contribuire ad una migliore conoscenza del fatto che mentre l'incrocio *B. vulgaris* ♀ × *B. viridis* ♂ dà ibridi che possono giungere alla metamorfosi, invece gl'ibridi dell'incrocio inverso *B. viridis* ♀ × *B. vulgaris* ♂ giungono al massimo allo stadio di larve giovanissime. Le ricerche eseguite sull'argomento (Born, Pflüger, e particolarmente G. Hertwig, Montalenti (1)) vi hanno portato notevoli contributi; tuttavia il problema non è ancora del tutto chiarito.

Nella mia I Nota (2) posi tra l'altro in rilievo che abbozzi d'ibrido non vitale (*B. viridis* ♀ × *B. vulgaris* ♂) trapiantati su *Bufo* normali sopravvivono, almeno per molto tempo, ai donatori; in particolare, l'occhio dell'ibrido se trapiantato su *B. vulgaris* può giungere alla metamorfosi in ottime condizioni. Avevo notato inoltre che anche nell'incrocio *B. vulgaris* ♀ × *B. viridis* ♂ si possono avere ibridi con notevoli anomalie di sviluppo. Già queste osservazioni

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia comparata « Battista Grassi » dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta del 12 febbraio 1949.

(1) G. MONTALENTI, « Physiol. Zool. », vol. VI, 1933.

(2) T. PERRI, Nota I, in questi « Rendiconti », vol. I, ser. VIII, 1946.

mostravano che le differenze tra i due incroci sono meno notevoli di quanto potesse prima sembrare.

Nelle successive esperienze del 1947 e del 1948, ho particolarmente insistito sui trapianti tra ibridi delle due forme e normali; ho inoltre iniziato ricerche su eventuali mutue influenze tra gli spermi delle due specie di *Bufo*.

Comportamento degl'ibridi tra *B. viridis* e *B. vulgaris*. – Nel 1947 e nel 1948 eseguii numerose altre ibridazioni e nei due sensi. Avendo già nella mia precedente Nota parlato del comportamento generale degl'ibridi, mi limito qui ad alcune osservazioni.

Per gl'ibridi vitali (*B. vulgaris* ♀ × *B. viridis* ♂) ho notato che nella vita embrionale si distinguono già ad occhio nudo dai *B. vulgaris* (la specie parente cui più somigliano in questo stadio) per avere la testa più piccola onde sproporzione tra testa e tronco. Tale caratteristica successivamente si attenua e poi scompare. La stragrande maggioranza continua a svilupparsi pressochè normalmente, tanto da giungere sino alla metamorfosi; presentando solo, come era già noto, una discreta mortalità.

In alcune di queste ibridazioni vitali notai vari casi di accentuate anomalie di sviluppo, come quelle che già ebbi nel 1946 [2] [3], che saranno descritte in un prossimo lavoro in esteso. Qui desidero precisare che esse sono certamente in rapporto con l'ibridazione. Infatti nelle fecondazioni artificiali tra spermi ed uova di *B. vulgaris* eseguite per controllo (in alcuni casi usando parte dello stesso cordone di uova che servirono per ibridazioni che diedero anomalie di sviluppo), ebbi sì una mortalità maggiore della normale, ma – e qui mi pare sia l'importante – in tutte le uova che superarono lo stadio di gastrula non ebbi mai alterazioni di sviluppo. Ciò mostra chiaramente che nelle alterazioni avute deve attribuirsi proprio all'ibridazione una parte determinante; ricordo che il Newman poneva l'ibridazione tra le cause di anomalie di sviluppo.

L'aver visto che anche nell'incrocio che dà ibridi generalmente vitali si hanno malformazioni riferibili all'ibridazione, costituisce un avvicinamento con i risultati che si hanno nell'incrocio inverso, ove le alterazioni di sviluppo sono costanti e tali da non permettere la vita oltre lo stadio di giovanissima larva.

Ho pure esaminato alcuni casi d'ibridi vitali giunti alla metamorfosi o già metamorfosati da più di un mese. È notevole che mentre in alcuni casi ci sono gonadi apparentemente normali, come già risultava da ricerche del Montalenti [4], in altri casi invece le gonadi sono atrofiche. Questi risultati si ricollegano con i precedenti; ribadendo che si ha una grande variabilità anche nell'ambito di uno stesso lotto d'ibridi. L'atrofia delle gonadi mi pare rappresenti un segno di sofferenza cui esse sono molto più sensibili di altri organi. E qui ricordo che per alcune dosi di raggi X, embrioni e larve di *B. vulgaris* giungono alla metamorfosi senza gonadi sviluppate.

(3) T. Perri, questi «Rendiconti», vol. II, ser. VIII, 1947.
(4) G. Montalenti, «Arch. Zool. Ital.», vol. XXVI, 1939.

TRAPIANTI TRA IBRIDI E NORMALI. – Nella mia Nota del 1946 [2] osservai che gli abbozzi d'ibridi non vitali sopravvivono almeno per molto tempo se trapiantati su embrioni o larve di *B. vulgaris* o di *B. viridis*; e che l'abbozzo oculare trapiantato su *B. vulgaris* giunge alla metamorfosi.

Già altri autori avevano notato che il triapanto da vari ibridi non vitali su una specie parente (per gli Anfibi: Baltzer, Hadorn, J. Brachet [5] ed altri) continuano nello sviluppo. Io ho voluto saggiare particolarmente l'influenza esercitata sul trapianto dalle differenze biochimiche tra le due specie parenti; dell'importanza del tuorlo me ne occupai nella precedente Nota.

Descriverò dapprima i trapianti da ibrido non vitale (*B. viridis* ♀ × *B. vulgaris* ♂) o vitale (*B. vulgaris* ♀ × *B. viridis* ♂) su larve normali di *B. vulgaris*, e poi i corrispondenti trapianti su larva di *B. viridis*. Fu eseguito il trapianto della vescicola ottica nel cavo orbitario della larva ospitante vuotato del proprio occhio, però lasciando *in situ* il foglietto corneale esterno [6].

Nel trapianto di vescicola ottica di larve ibride non vitali su larve di *B. vulgaris* osservai, come già nel 1946, che l'occhio si accresce rimanendo di volume di poco inferiore all'occhio normale e si metamorfosa contemporaneamente al portatore. Eseguendo lo stesso trapianto, però da larva ibrida vitale, si hanno risultati uguali o anche migliori. Nell'una e nell'altra specie di trapianto non ebbi mai distruzione del trapiantato.

Ciò mostra, come già dissi nella I Nota e come ora ho riconfermato con maggior numero di casi, che la vescicola ottica d'ibrido anche se non vitale ha in sè la capacità di giungere alla metamorfosi se posta in ambiente adeguato, come si è appunto mostrato quello di *B. vulgaris*.

Passando ora ai trapianti su *B. viridis*, premetto che mi sono incontrato in una notevole difficoltà: le larve di *viridis* sono molto delicate e troppo più facilmente di *vulgaris* muoiono prima di giungere alla metamorfosi, come già era risultato nel corso di altre esperienze eseguite in questo stesso Istituto. Tuttavia i risultati raggiunti non sono privi d'interesse. La vescicola ottica d'ibrido non vitale continua a vivere però presentando un accrescimento assai scarso e di gran lunga – è da precisare – minore di quello che si ha nel trapianto su *B. vulgaris*; nell'unico caso che potei portare alla metamorfosi, la retina si distrusse completamente e rimase il solo cristallino in buone condizioni. Trapiantando la vescicola ottica d'ibrido vitale su *B. viridis*, ho notato che il trapianto può giungere sino alla metamorfosi; però il suo accrescimento è chiaramente inferiore a quello che si ha nei corrispondenti trapianti su *B. vulgaris*.

Queste ricerche pongono in evidenza in primo luogo che l'occhio di giovanissima larva ibrida non vitale (*B. viridis* ♀ × *B. vulgaris* ♂) se trapiantata su larva di *B. vulgaris* giunge costantemente alla metamorfosi in ottime condizioni e risultati uguali o ancora migliori si hanno, com'è ben comprensibile, nel trapianto dell'occhio d'ibrido vitale (*B. vulgaris* ♀ × *B. viridis* ♂). Ciò è d'accordo con le sopra accennate ricerche di altri autori. Come interpretazione generale,

(5) J. BRACHET, *Embryologie chimique*. Paris, 1947.

(6) I trapianti larvali mi furono eseguiti da F. Chelli, interno in questo Istituto.

propendo a ritenere che l'occhio d'ibrido non vitale abbia in sè la capacità di proseguire nello sviluppo; e che siano organi vitali più sensibili, e che perciò soccombono, che impediscono l'ulteriore sviluppo dell'intero organismo.

L'altro aspetto della questione è che in *B. viridis* il trapiantato, sia che venga da larva ibrida non vitale che da larva ibrida vitale, si sviluppa molto meno che nei corrispondenti trapianti su *B. vulgaris*. Questa incompatibilità tra ibrido e *B. viridis* è probabilmente da attribuirsi a incompatibilità tra *B. vulgaris* e *B. viridis*. Infatti ho osservato nei casi finora eseguiti e che saranno perciò adeguatamente ripetuti, che se una vescicola ottica di giovane larva di *B. vulgaris* irradiata con certe dosi subletali di raggi X viene trapiantata su *B. viridis*, essa va distrutta mentre, come in questo Istituto ha visto Chelli (risultati ancora inediti), se l'occhio così irradiato viene trapiantato su *B. vulgaris* allora giunge costantemente alla metamorfosi e in buone condizioni. Ricordo che precedenti esperienze di Cotronei e Perri [7] mostrarono che la vescicola ottica sia di *B. vulgaris* trapiantata su *B. viridis*, sia di *B. viridis* trapiantata su *B. vulgaris*, giunge alla metamorfosi in ottime condizioni. Non vi è nessuna contradizione tra queste due serie di ricerche: in quelle ora dette di Cotronei e mie il trapiantato era un abbozzo normale, invece in questi casi d'ibridi o di röntgenirradiazione si tratta di abbozzi con diminuita vitalità. Trattasi adunque – è da precisare – di una lieve incompatibilità, alla quale un abbozzo normale resiste e perciò non la svela; invece un abbozzo che non sia normale ne risente l'influenza, onde diminuzione di accrescimento o addirittura distruzione, e quindi è servito a svelarla.

Adunque nella interpretazione del differente risultato che si ha nei due tipi d'ibridi, occorre tenere presente anche questa lieve incompatibilità tra le due specie di *Bufo*.

Interazioni tra spermi. – Ho voluto aggiungere alle ricerche d'ibridazione alcune esperienze per saggiare eventuali azioni tra gli spermi di specie diverse, in particolar modo tra quelli di *B. vulgaris* e quelli di *B. viridis*. A tale scopo spappolavo in una piccola vaschetta con soluzione fisiologica un testicolo di *B. viridis* ed uno di *B. vulgaris* e dopo un certo tempo ponevo in un'altra vaschetta, anch'essa con soluzione fisiologica, la miscela degli spermi ed uova vergini di *B. viridis* o di *B. vulgaris*. Il risultato è più facilmente valutabile se le uova sono di *B. viridis* in quanto facilissimamente si distinguono gli embrioni normali da questi ibridi non vitali; ma anche con uova di *vulgaris* il risultato è sufficientemente chiaro, perchè, come dissi sopra, vi è sproporzione tra testa e tronco, almeno per un periodo della vita embrionale. Il contatto tra gli spermi delle due specie è durato per un tempo vario, anche di più ore. Orbene, si osserva, usando maschi nelle stesse condizioni di attività sessuale [8], che si hanno sia ibridi che non ibridi,

(7) T. Perri (con Nota aggiunta di G. Cotronei), «Boll. di Zool.», a. VII, 1936; G. Cotronei e T. Perri, ivi, a. XII, 1941.

(8) Se la miscela ibrida viene invece eseguita spappolando un testicolo di maschio che non abbia ancora fecondato uova ed uno di maschio che abbia invece da poco fecondato, si ha che la grande maggioranza degli embrioni, se le uova sono della stessa specie del primo, sono normali e solo poche sono ibridi.

cioè - come tutto lascia ritenere – secondo il caso. Poichè non eseguii il conteggio degli spermi, posso solo affermare che una chiara attrazione delle uova per gli spermi della stessa specie non è risultata.

Emerge sopratutto da quanto ho detto, che non esistono fenomeni di interazione tali da impedire agli spermi la fecondabilità. Sono ben note a questo riguardo le ricerche del Godlewsky (dal 1910 in poi [9]), confermate da successivi autori, che mostrano una agglutinabilità tra spermi di specie diverse e lontane con conseguente impedimento della fecondabilità. Questo fatto, ripeto, non avviene tra spermi di *B. viridis* e di *B. vulgaris*.

Ho pure sperimentato, però solo in pochi casi, le seguenti combinazioni: *Bufo vulgaris* ♀ × (*Bufo vulgaris* ♂ + *Rana esculenta* ♂); *Ciona intestinalis* ♀ × (*Ciona intestinalis* ♂ + *Bufo vulgaris* ♂); *Arbacia pustolosa* ♀ × (*Arbacia pustolosa* ♂ + *Bufo vulgaris* ♂). Non vi ho avuto impedimento nella fecondazione tra spermi e uova della stessa specie. Sono ricerche che spero di continuare nel corrente anno, adeguatamente ampliandole, poiché nell'ambito dei Vertebrati sono state finora trascurate.

CONCLUSIONI. – I dati e le considerazioni avanti esposte permettono di concludere:

1) La vescicola ottica di giovanissima larva ibrida non vitale (*B. viridis* ♀ × *B. vulgaris* ♂) trapiantata su larva normale di *B. vulgaris* giunge costantemente alla metamorfosi in condizioni ottime, e risultati uguali o ancora migliori si hanno se l'occhio è di larva ibrida vitale. Risultati inferiori si hanno invece nei corrispondenti trapianti su *B. viridis*.

2) Miscelando spermi di *B. vulgaris* con spermi di *B. viridis* non risulta alcuna incompatibilità che impedisca la fecondazione.

Scienza della Nutrizione. — *Azione dei farmaci simpaticolitici sulle combustioni (A. D. S.) provocate dagli autolizzati proteici.* Nota di CESARE LOMBROSO e CESARE ARDY, presentata [*] dal Corrisp. U. LOMBROSO.

Il fenomeno dell'azione dinamico specifica delle proteine prospettato per la prima volta dal Rubner [1] cinquant'anni fa, ha dato origine ad una serie di indagini sperimentali che hanno condotto numerosi Autori a sostenere le più disparate e contradditorie ipotesi.

Il Rubner che, come si è detto, è stato il primo a richiamare l'attenzione sul fenomeno, aveva constatato che, dopo la somministrazione di proteine, nel periodo del presunto loro metabolismo intermedio, si consumavano dal 30% al 40% delle calorie contenute nel cibo offerto all'animale in più di quelle consu-

(9) E. GODLEWSKY, « Arch. de Biol. », vol. XXXVI, 1926.
(*) Nella seduta dell'8 gennaio 1949.
(1) RUBNER, *Die Gesetze d. Ener. bei der Ern.* Leipzig u. Wien 1902.

mate nel M. B. pur trovandosi il soggetto nelle stesse condizioni. Il Rubner, partendo dal concetto che dal gruppo idrocarbonato degli aminoacidi si deve originare glucosio, e che soltanto il glucosio può servire ai compiti energetici dell'organismo, prospettò l'ipotesi che quella parte di carbonio che non viene utilizzata per la genesi del glucosio, verrebbe senz'altro bruciata, fornendo così calore utilizzabile soltanto nella lotta contro il freddo.

Questa interpretazione ha perduto valore dopo che gli studi iniziati dallo Embden dimostrarono che la glicocolla, l'alanina (formatori di glucosio per la totalità dei loro atomi di carbonio) rivelano una A. D. S. molto più elevata della leucina, isoleucina (formatori di glucosio soltanto per tre atomi sui cinque della loro catena carbonchiosa). Le esperienze erano state eseguite su cane.

Sempre rimanendo nel concetto che la catena idrocarbonata deve trasformarsi in glucosio per poter servire ai compiti energetici, Aubel e Schaeffer [2] in un primo tempo sostennero che la causa della A. D. S. si debba ricercare nelle diverse reazioni accoppiate che intervengono affinchè il gruppo idrocarbonato che si libera dagli aminoacidi possa assumere la forma di glucosio.

Questa concezione appariva suffragata dal fatto che A. D. S. della alanina fu riscontrata del 25%, e che il costo della sintesi dell'acido lattico in glucosio è rappresentato appunto da un quarto delle calorie potenziali dell'acido lattico. Ma al controllo si è potuto constatare che il lattato di sodio non provoca di per sè modificazioni apprezzabili del consumo di O_2, e quindi questa ipotesi fu abbandonata.

In quanto alle varie concezioni che attribuivano al gruppo azotato degli aminoacidi (costo della disaminazione – lavoro renale per l'espulsione della urea ecc.) la causa dell'A. D. S., sono state pure esse superate anche per il fatto che alcuni aminoacidi esaltano le combustioni soltanto in alcune specie animali e non in altre.

Così pure oggi non sono più accettate le ipotesi che attribuivano al lavoro delle glandule digerenti ed ai movimenti intestinali la causa della A. D. S., poichè questa si osserva anche quando si introduce l'aminoacido od il peptone per via endovenosa, così da sfuggire all'intervento del tubo digerente.

Maggiori consensi ottenne per qualche anno la concezione che attribuiva il fenomeno dell'esaltata combustione a modificazioni apportate alla crasi sanguigna dai metaboliti a carattere acido o basico che si liberano dalle sostanze azotate nel loro metabolismo intermedio. Che uno stesso materiale, l'aminoacido, possa, durante il metaholismo intermedio, agire ora da materiale acidotico ora da alcalotico, è facile comprendere, dato che i due gruppi, l'idrocarbonato e l'azotato, possono avere un tempo diverso nei processi che debbono subire nel loro metabolismo intermedio, così da prelevare or l'uno ora l'altro, modificando quindi in modo diverso la crasi sanguigna.

Però apposite ricerche eseguite dallo Zummo [3] con la glicocolla non sono riuscite ad afferrare differenze sensibili nel pH o nella R. A. durante il periodo

(2) Aubel e Schaeffer, « Ann. Physiol. et Physic-Chim. biol. », *8*, 262 (1932).
(3) Zummo, « Boll. Soc. Ital. Biol. Sper. », *6*, 570 (1931).

del maggiore aumento delle combustioni, in confronto al periodo di metabolismo basale normale.

Non ci attardiamo a ricordare più minutamente quanto è stato prospettato da numerosi Autori che si sono occupati dell'argomento, rimandando il lettore che desideri maggiori riferimenti a due Monografie nelle quali la letteratura è ampiamente svolta (4).

Ricorderemo che i clinici in genere hanno creduto più logico rivolgere le loro attenzioni a vari tipi di glandule endocrine, ipofisi, tiroide, capsule surrenali, che, esaltate nella loro attività endocrina dai metaboliti prodotti dal metabolismo proteico, esalterebbero a loro volta il consumo di O_2 ed al sistema autonomo che provvede a regolare le secrezioni endocrine.

Resterebbe pur sempre aperto il quesito se l'attività di queste glandule endocrine sia modificata per azione diretta dei metaboliti azotati sui loro tessuti, o se invece per via secondaria per l'intervento del sistema nervoso vegetativo. In favore di questa ultima possibilità ricordiamo che il Nojons (5) aveva osservato che dopo il taglio degli splancnici nel gatto scompare l'A. D. S. della carne. Rotschild (6) sottoponendo dei gatti all'azione di un ortosimpaticolitico, il 933 F somministrato a piccole dosi, osservò il blocco dell'azione dinamico specifica. Inoltre secondo un'ultima concezione di Schaeffer l'A. D. S. sarebbe dovuta ad una scarica di adrenalina o di simpatina. C. Lombroso (7) però poi avrebbe osservato, alcuni anni or sono, che il 933 F non blocca l'ipermetabolismo gassoso provocato da iniezione di adrenalina.

Tutti questi dati di fatto si potrebbero coordinare molto bene attribuendo al sistema ortosimpatico la funzione di liberare adrenalina dalle capsule surrenali. Il taglio od il blocco con il 933 F impedirebbero il liberarsi di adrenalina (che però una volta liberatasi o iniettata appositamente agirebbe sui processi combustivi per le sue proprietà ossido-riduttive) e conseguentemente appare logico che il primo movens sia un'azione esaltatrice sul sistema ortosimpatico dei metaboliti provenienti dal metabolismo azotato che diviene causa dell'A. D. S., e non una loro azione diretta sul tessuto surrenale.

Uno strano fenomeno osservato recentemente in nostre ricerche sugli effetti di autolizzati proteici nel ricambio gassoso, ci ha suggerito di riprendere lo studio degli effetti ortosimpaticolitici e parasimpaticolitici nei processi ossidativi determinati da ingestione di autolizzati proteici. Il fenomeno è il seguente: Se ad un cane si somministra per via parenterale (endovena o sottocute) un autolizzato proteico (Amigen (8)) non soltanto non si manifesta la cosidetta A. D. S., ma al contrario si ottiene sempre una profonda diminuzione delle combustioni. Lo stesso

(4) UGO LOMBROSO, «Quad. d. Nutr.», 2, 414 (1935), e SCHAEFFER, *L'Action dynamique spécifique des Protides*, Hermann edit. Paris 1938.

(5) NOYONS, *Action dynamique spécifique des Protides*, «Ann. de Physiol. et Phis. chim. biol.», *8*, 327 (1932).

(6) ROTSCHILD, *Uber die spezifisch...* etc. «Pflügers Arch.», *239*, 772 (1938).

(7) CESARE LOMBROSO, «Arch. Inter. de Pharmac. et Thér.», *40*, 4 (1937).

(8) *Amigen*, idrolizzato enzimatico della caseina (Prodotto dalla Ditta Mead & Johnson, U. S. A.).

materiale nelle identiche proporzioni quando viene dato per via orale, provoca un elevato aumento delle combustioni pressochè uguale a quello che si ottiene fornendo all'animale la proteina dalla quale si è preparato l'autolizzato. Questo contrasto, esaltazione delle combustioni somministrando l'autolizzato per via orale, profonda riduzione invece dopo l'introduzione per via parenterale, apre il campo a numerosi problemi.

Uno di essi forma l'oggetto della presente Nota.

Noi abbiamo voluto ricercare se l'ortosimpaticolitico 933 F esercitasse sul fenomeno dell'ipometabolismo conseguente a perfusione endovenosa di autolizzati, una influenza favorevole o contraria, dato che già si era osservata una sua azione inibente nei casi di ipermetabolismo da ingestione di carne. Uguali indagini si sono svolte dopo la somministrazione orale degli stessi autolizzati e di proteine genuine, adoperando dosi massive di 933 F.

Per ultimo tutte queste ricerche vennero ripetute adoperando un parasimpaticolitico, l'atropina.

Abbiamo usato 4 cani di peso compreso tra i 4 ed i 6 kg. Le esperienze sono state condotte come segue: all'animale si praticava iniezione endoperitoneale di 933 F alla dose di gr. 0,01 pro kg., quindi si determinava il ricambio respiratorio con l'apparecchio a circuito aperto di Haldane, alla temperatura di 21°C., per un periodo di tre ore. Si toglieva l'animale dall'apparecchio e gli si somministrava l'idrolizzato (soluz. di Amigen 10%) per os o per via parenterale (flebloclisi od ipodermoclisi a goccia) in quantità tale da fornire gr. 0,4 di N pro kilo. Si rimetteva l'animale nell'apparecchio e si determinava nuovamente il ricambio respiratorio, per un periodo di 5 h. se l'idrolizzato era stato somministrato per via parenterale, per un periodo di 8 h. se l'autolizzato era stato ingerito.

Riportiamo nella tabella i risultati ottenuti:

Tabella I.

N. del cane	Consumo di O per kg. h dopo 933 F	Trattamento	Consumo di O dopo il trattamento	Variaz. %
1	0,648	Amigen per via parenterale	0,555	— 14
1	1,000	» »	0,710	— 29
2	0,782	» »	0,540	— 30
3	0,680	» »	0,599	— 12
4	0,780	» »	0,609	— 22
1	1,040	Amigen per via orale	0,637	— 30
2	0,690	» »	0,620	— 10
3	0,444	» »	0,319	— 28
3	0,950	» »	0,610	— 35
4	0,970	» »	0,767	— 21

Altre esperienze vennero eseguite sugli stessi animali somministrando loro, dopo 933 F, carne e caseina in quantità tale da fornire sempre la stessa dose di N.

Eccone i risultati:

TABELLA II.

N. del cane	Consumo di O per kg. h dopo 933 F	Trattamento	Consumo di O per kg. h dopo il trattamento	Variaz. %
1	0,970	Carne e caseina	0,835	— 14
2	0,876	» »	0,728	— 17
3	0,889	» »	0,658	— 26
4	0,902	» »	0,677	— 25

Le stesse esperienze vennero poi eseguite usando atropina, alla dose di gr. 0,003 pro kg., anzichè 933 F.

Ecco i risultati:

TABELLA III.

N. del cane	Consumo di O per kg. h dopo atropina	Trattamento	Consumo di O per kg. h dopo il trattamento	Variaz. %
1	0 493	Amigen parenterale	0,485	— 1
1	0,658	» »	0,612	— 7
2	0,566	» »	0,560	— 1
2	0,660	» »	0,693	+ 5
3	0,775	» »	0,719	— 7
3	0,725	» »	0,690	— 4,5
3	0,570	» »	0,543	— 4
4	0,630	» »	0,610	— 3
4	0,570	» »	0,521	— 8
1	0,710	Amigen per os	0,833	+ 18
2	0,690	» »	0,786	+ 14
3	0,446	» »	0,597	+ 33
4	0,685	» »	0,869	+ 27
1	0,558	Carne e caseina per os	0 731	+ 31
2	0,610	» »	0,689	+ 13
3	0,584	» »	0,724	+ 24
4	0,592	» »	0,763	+ 29

Dalle esperienze riferite risulta che:

1° Il 933 F non modifica l'ipometabolismo gassoso conseguente alla perfusione endovena di autolizzati proteici. L'atropina riduce profondamente il fenomeno, senza però bloccarlo del tutto (un solo caso si è osservato con lieve inversione).

2° Il 933 F somministrato a dosi di un ctg. e più, per kg. in peso, inverte profondamente gli effetti ipermetabolici degli autolizzati somministrati per bocca, provocando una netta diminuzione del consumo di O_2. L'atropina non modifica l'ipermetabolismo osservato negli animali non trattati con l'alcaloide; in qualche caso pare lievemente accentuarli.

3° Il 933 F inverte pure gli effetti ipermetabolici delle proteine genuine conducendo ad un netto ipoconsumo di O_2. L'atropina non manifesta nessuna azione dopo la somministrazione di proteine genuine che provocano la solita A. D. S.

In complesso risulta che il 933 F quando nell'organismo si è provocato un ipometabolismo gassoso da perfusione di autolizzati proteici, non modifica il fenomeno; ma se l'autolizzato o le proteine genuine vengono somministrate per via orale, allora invece della intesa esaltazione delle combustioni che usualmente segue tale forma di somministrazione, si osserva non soltanto il blocco della cosidetta A. D. S., ma anche una inversione della stessa: cioè un ipometabolismo. L'atropina non conduce a manifestazioni così impressionanti; essa però riduce l'ipometabolismo da perfusione endovenosa. Non interviene in tutti quei casi nei quali si ha normalmente ipermetabolismo gassoso.

Quale possa essere l'interpretazione di questi risultati e particolarmente la causa dell'ipometabolismo che si ottiene costantemente in seguito all'intervento del 933 F, per ora non si intravede.

Se però si esamina la letteratura precedente, si ritrovano altri dati di fatto che hanno con i presenti una certa relazione (7). È lecito per ciò sperare che l'esame critico dei complessivi fenomeni osservati possa in avvenire suggerire quelle disposizioni sperimentali che ci illuminino sul meccanismo d'azione col quale si può ottenere ipo od ipermetabolismo usando un medesimo materiale.

Zoologia. — *Rilievi craniometrici in alcuni Microchirotteri nostrani* (*). Nota di Giorgio M. Baffoni, presentata (**) dal Socio S. Sergi.

Partendo dalle ricerche di Senna (1910) e di Stefanelli (1941), i Microchirotteri nostrani si possono disporre in una serie che va dai buoni volatori (*Miniopterus, Pipistrellus, Myotis Capaccinii*), per gradi (*Myotis myotis*), ai cattivi volatori (*Rhinolophus, Plecotus*).

(*) Lavoro eseguito negli Istituti di Antropologia e di Anatomia Comparata della Università di Roma.

(**) Nella seduta dell'8 gennaio 1949.

Senna, studiando la morfologia dell'ala dei Microchirotteri nostrani, aveva riscontrato che, nelle varie specie, tale morfologia era correlata con particolari attitudini volatorie. In seguito Stefanelli, studiando i rapporti tra lo sviluppo dell'orecchio in funzione di quello dei centri nervosi statici ed acustici, rilevò che:

« La facoltà uditiva è notevolmente aumentata in alcune specie, ma con due diverse condizioni strutturali: o con il grande sviluppo dell'apparato recettore, risuonatore e di conduzione delle vibrazioni sonore, che ha la sua massima espressione nel *Plecotus*, o con l'aumento volumetrico della parte sensibile (coclea) come è tipicamente nei Rinolofidi. In questo secondo caso anche i centri cerebrali acustici sono più sviluppati. Nei Chirotteri forti volatori (*Miniopterus*, *Pipistrellus*) vi sono canali semicircolari più grandi che nei cattivi volatori (Rinolofidi) e parallelamente il cervelletto si presenta con una solcatura più complessa. Nei Chirotteri che abitualmente hanno volo alto e veloce, l'apparato acustico non presenta uno sviluppo particolare (*Miniopterus*) mentre un apparato acustico più complesso è riscontrabile in quelli meno veloci e con volo più basso ».

Ho compiuto osservazioni circa la variazione dell'architettura del cranio in tipi che presentano differenti attitudini al volo; a tale scopo mi sono servito di Microchirotteri cavernicoli, raccolti in una cava di pozzolana nei pressi di Roma (ved. Stefanelli, 1942), appartenenti a tre generi ed alle sottoindicate specie:

Gen. *Miniopterus Schreibersi* (Natterer) (ottimo volatore, veloce e di alta quota)

Gen. *Myotis Capaccinii* (Bonaparte) (buon volatore di alta quota)
Myotis myotis (Bechstein) (volatore mediocre: volo basso e pesante)

Gen. *Rhinolophus hipposideros* (Bechstein)
Rhinolophus euryale (Blasius)
Rhinolophus ferrum-equinum (Schreber)
(volatori di bassa quota: volo pesante, tortuoso ed ineguale).

Per la grande difficoltà che si riscontra nel raccogliere il materiale e nel prepararlo, mi sono limitato ad esaminare tre esemplari per ogni specie. Ad onta del numero ristretto degli individui osservati, sono apparsi alcuni fatti significativi che è opportuno segnalare; la variabilità rinvenuta nell'ambito di ciascun genere è molto ristretta (ved. tabella e fig. 1) e maggiormente nell'ambito della stessa specie.

Le mie osservazioni sono morfologiche e metriche: per l'esame morfologico, oltre che di lenti diverse, mi sono valso anche di disegni ingranditi (ripresi dalle varie norme: superiore, inferiore, laterale ed occipitale) ottenuti con un proiettore Focomat Zeiss; ho inoltre preso, con la maggior precisione possibile, direttamente sui crani, le misure di lunghezza, larghezza ed altezza del cranio cerebrale e di quello facciale, oltre ad altre misure che qui non pubblico; tutte le misure furono ripetute più volte mediante un compasso fornito di vite micrometrica. Le misure angolari furono compiute sui disegni, sui quali furono verificate le misurazioni dirette.

Gli indici di lunghezza–altezza e di lunghezza–larghezza del cranio cerebrale (ved. tabella) sono più piccoli in *Rhinolophus*, presentano valori intermedi in *Myotis myotis* e sono maggiori in *Miniopterus* e *Myotis Capaccinii*; cioè il cranio

cresce maggiormente in altezza ed in larghezza, relativamente alla lunghezza, dai primi agli ultimi (ved. i valori relativi della tabella); si passa cioè dalla camemorfia alla ipsimorfia e dalla dolicomorfia alla brachimorfia via via che le specie si perfezionano nell'attitudine volatoria.

Gli indici di lunghezza–altezza e di altezza–larghezza del cranio facciale, invece, aumentano dai buoni ai cattivi volatori (ved. tabella); cioè la faccia, dal Rinolofo al Miniottero, si allunga e si allarga relativamente all'altezza.

Come appariva già all'ispezione morfologica, in funzione delle migliorate condizioni di volo, si nota un aumento del volume del cranio cerebrale ed una progressiva riduzione della faccia, come è indicato dal rapporto volumetrico del cranio facciale relativamente a quello cerebrale.

Tale rapporto fu determinato col metodo di Morant (che pone in relazione l'area del triangolo facciale nasion–basion–prostion con il quadrato dell'arco opistion–nasion), col metodo di Stratz (facendo cioè il rapporto tra l'area del triangolo facciale e quella del cranio cerebrale, ambedue misurate sulla sezione sagittale mediana) e col metodo del rapporto tra i prodotti dei valori assoluti delle tre dimensioni (lunghezza, larghezza ed altezza) del cranio facciale e di quello cerebrale.

Ciò diviene particolarmente evidente eseguendo il prodotto dei valori relativi del cranio cerebrale; è da notare che la seriazione dei crani presenta un valore discordante in *Myotis myotis*: questo, infatti, ha la più ridotta capacità cranica (relativamente a quella facciale).

La morfologia del cranio cerebrale, inoltre, è molto diversa a seconda delle specie esaminate: nei Rinolofi il cranio, dalla norma superiore e laterale, presenta una forma elissoidale regolare; nei Miniotteri, invece, è globoso, cuboideo ed a bozze pronunciate (fig. 5). Dalla norma laterale, mentre nei *Rhinolophus* il frontale è inclinato obliquamente in alto ed all'indietro (la regione frontale è sfuggente), in *Miniopterus* il frontale si eleva verticalmente sulla faccia a costituire una specie di fronte (fig. 3 e 4).

Il forame occipitale, col migliorare dell'attitudine al volo, si sposta dall'avanti all'indietro e dal basso verso l'alto, come risulta già dall'osservazione e come è dimostrato dai valori decrescenti degli angoli prostion–basion–opistion e bregma–basion–opistion (ved. tabella e fig. 3 e 4); questo fatto è da mettersi in rapporto con la riduzione del collo e le esigenze aerodinamiche del volo veloce.

Allo spostamento verso l'alto ed all'indietro del forame occipitale, dai buoni ai cattivi volatori, si accompagna la rotazione di tutto il temporale dall'avanti all'indietro e dall'alto verso il basso, come lo si arguisce dalla posizione della bulla timpanica: nelle figure 3 e 4 la posizione più bassa di questa, al disotto del basion, si osserva in *Miniopterus*; la più alta, alquanto al disopra del basion, si rinviene in *Rhinolophus*; nei primi si trova alquanto all'indietro, nei secondi alquanto avanzata. A questi spostamenti si accompagna, nello stesso senso, anche quello del labirinto (coclea e canali semicircolari). Questi fatti hanno importanza in quanto la diversa ubicazione del timpanico e del labirinto (e quindi di tutto il temporale) è da mettersi in rapporto con la particolare variabilità dello sviluppo

degli organi sensitivi acustico–statici nelle diverse specie di Microchirotteri esaminati. Ricordo in proposito che Sergi ha da tempo (1935) rilevato « una funzione direttiva (delle ossa temporali) sull'architettura del cranio... in conseguenza degli organi del labirinto che contengono e che debbono avere una determinata posizione nel capo per la funzione che compiono ».

Nei buoni volatori, inoltre, si nota un assottigliamento di tutta l'impalcatura ossea: il *Miniopterus*, infatti, presenta ossa fragili e sottili ed articolazioni delicate. Le creste ossee, dai cattivi ai buoni volatori, si spostano man mano all'indietro: mentre i *Rhinolophus* hanno una robusta cresta sagittale–frontale in rapporto al grande sviluppo dell'apparato masticatore (muscoli temporali), nel *Myotis myotis* essa si limita alla regione parietale; il *Miniopterus* possiede relativamente sviluppate solo le creste occipitali, che offrono una solida base di impianto alla muscolatura della nuca la quale viene spostata all'indietro coll'arretramento del forame occipitale.

Il cranio facciale, come si è visto, nei migliori volatori si riduce volumetricamente rispetto al cranio cerebrale; va osservato al riguardo che alla diversità di quota, alla quale volano i varî Chirotteri, si associa un cambiamento del loro regime alimentare: i buoni volatori, infatti, si nutrono di piccoli insetti (prevalentemente Ditteri ed Imenotteri), mentre i cattivi volatori si alimentano di insetti relativamente grossi, dal volo pesante od addirittura inetti al volo (Coleotteri, Lepidotteri, Ortotetteri); si spiega con ciò il grande sviluppo che, nei cattivi volatori (e specialmente in *Myotis myotis*), presenta l'apparato masticatore (denti ben differenziati, specie i canini; mascellari robusti, mandibole massicce ecc.) ed il conseguente ingrandimento della faccia.

Moltissime altre variazioni riguardano le varie regioni ed ossa della faccia; il piano nasale, che nei *Rhinolophus* è largo e convesso onde sostenere il complicato rhinarium, diviene stretto e pianeggiante in *Myotis* ed addirittura concavo in *Miniopterus*; il diametro trasverso retro-orbitale (diametro minimo anteriore del cranio cerebrale e minimo superiore della faccia) aumenta nei buoni volatori; gli zigomatici si alleggeriscono e si incurvano all'infuori; i palatini si allungano all'indietro insieme con i processi pterigoidei dello sfenoide; questi ultimi raggiungono quasi la coclea (*Miniopterus*); variano inoltre i punti di appoggio sul piano del cranio senza mandibola ecc.

Tabella. – *Misure e rapporti.*

Genera:	*Miniopterus*	*Myotis*		*Rhinolophus*		
Species:	*M. Schreibersi*	*My. Capaccinii*	*My. myotis*	*Rh. hipposideros*	*Rh. euryale*	*Rh. ferrum-equinum*
Misure del cranio cerebrale (m/m)						
Lunghezza (nasion–inion)	10,05	9,5	14	10,2	13	15,3
Larghezza (bifrontale)	7,9	8,05	10	6,6	7,8	8,6
Altezza (basion–bregma)	6,3	5,5	6,8 (*)	4,5	5,5	6,35
Indici:						
Trasverso–longitudinale	78,6	84,7	71,43	64,7	60,0	58,17
Vertico–longitudinale	62,68	57,6	48,6	44,1	42,3	41,5
Vertico–trasversale	79,7	68,3	66,0	68,5	70,5	71,3
Valori relativi delle tre dimensioni craniche (facendo la loro somma = 100):						
Lunghezza	41,44	41,21	45,45	47,88	49,43	50,58
Larghezza	32,57	34,93	32,46	30,98	29,65	28,43
Altezza	25,97	23,86	22,08	21,13	20,91	20,99
Misure del cranio facciale m/m):						
Lunghezza (basion–prostion)	13,2	12,5	20,5	11,5	14,75	18,0
Larghezza (bizigomatica)	8,5	8,5	16,7	7,5	9,6	12,0
Altezza (nasion–prostion)	4,7	5,5	9,8	5,3	6,7	8,5
Indici:						
Trasverso–longitudinale	64,39	66,93	81,46	66,38	65,42	66,66
Vertico–longitudinale	35,6	43,3	47,8	46,08	45,42	46,66
Vertico–trasversale	55,29	64,7	56,68	70,76	70,52	70,83
Valori relativi delle tre dimensioni facciali (facendo la loro somma = 100):						
Lunghezza	50,0	47,17	43,61	47,33	47,49	46,75
Larghezza	32,2	32,07	35,53	30,86	30,91	31,17
Altezza	17,8	20,75	20,85	21,81	21,58	22,08
Rapporti volumetrici:						
Metodo di Morant	7,17	10,02	10,44	10,3	10,27	10,26
Metodo di Stratz	51,2	64,7	82,8	66,6	66,8	67,0
prodotto diam. massimi facciali × 100 / prodotto diametri massimi cerebrali	94,5	71,5	35,3	66,2	58,7	45,4
Angoli notevoli:						
Prostion–basion–opistion	118° 1/2	130° 1/2	127° 1/2	154° 1/2	155°	156°
Prostion–basion–bregma	64° 1/2	66° 1/2	66°	85° 1/2	86°	86°
Bregma–basion–opistion	54°	64°	61°	70°	69°	69° 1/2
nasion–basion–bregma	49° 1/2	46° 1/2	46°	62°	61°	63°
Prostion–basion–nasion	15°	20°	20° 1/2	23°	24°	24° 1/2
Bregma–prostion–basion	31°	30°	26°	25° 1/2	25° 1/2	24° 1/2
Nasion–prostion–basion	27°	29° 1/2	28°	37° 1/2	39°	38° 1/2
Prostion–nasion–bregma	174°	181° 1/2	185°	204°	205°	205° 1/2

(*) Per avere misure comparabili l'altezza del *My. myotis* fu calcolata escludendo la cresta sagittale.

Dai valori relativi risulta che la maggior capacità cranica è posseduta dal *Miniopterus* e la minima dai *Rhinolophus*; il maggior volume del cranio facciale si riscontra in *Myotis myotis* e nei *Rhinolophus*. Il *Miniopterus* presenta inoltre il cranio cerebrale più alto e corto e quello facciale più lungo e basso; il *Myotis Capaccinii* ha il cranio cerebrale più largo e corto e il *Myotis myotis* ha il più largo e corto cranio facciale; i *Rhinolophus*, infine, posseggono il più lungo e basso cranio cerebrale ed il più alto e stretto cranio facciale.

Figura 1

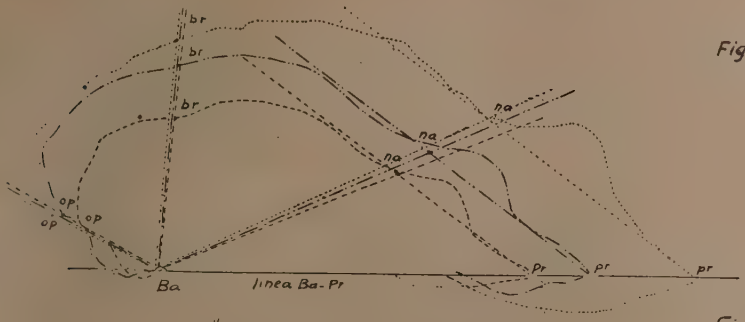


Figura 2

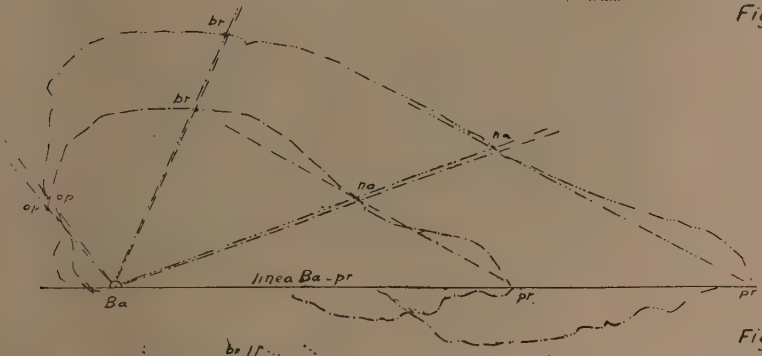


Figura 3

Figura 4

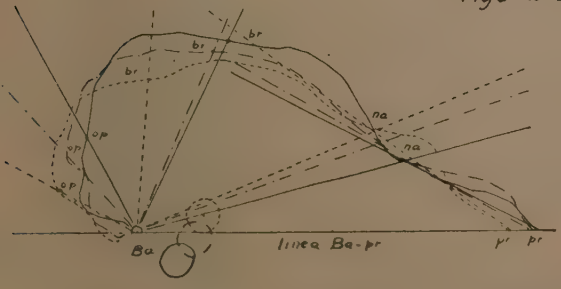
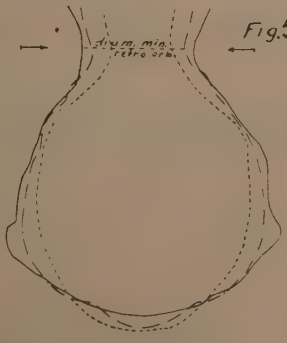


Fig.5



Miniopterus Schreibersi
Myotis Capaccinii
Myotis myotis
Rhinolophus hipposideros
Rhinolophus euryale
Rhinolophus ferrum-equinum

IN CONCLUSIONE: da quanto è stato rilevato appare che l'architettura del cranio si adatti in funzione del volo: le differenze negli indici e negli angoli esaminati furono rinvenute in perfetto accordo tra di loro; nei due *Myotis*, infatti, ad accentuate differenze di attitudini volatorie, fanno riscontro valori di indici e di angoli sensibilmente differenti, mentre in *Rhinolophus*, dove le condizioni funzionali sono simili, i valori coincidono abbastanza fedelmente (vedi tabelle e figg.).

Come appare già a prima vista, la conformazione generale e quella delle singole ossa del cranio e della faccia presentano notevoli differenze in rapporto con la funzione volatoria: pare che tutte le ossa della calotta cranica ruotino dall'indietro in avanti: ciò può essere messo in relazione anzitutto coll'aumento in volume del cervello che provoca l'innalzamento della volta cranica, il ripiegamento del cranio cerebrale al disopra ed in avanti di quello facciale (angolo prostion–nasion–bregma), la rotazione in alto dell'osso occipitale ed il conseguente spostamento all'indietro del forame occipitale [1]; ma a questi movimenti indubbiamente presiede « l'adattamento attivo » (Sergi) del temporale e degli organi di senso in esso contenuti, richiesto dalle differenti necessità funzionali alle quali le varie specie esaminate soggiacciono.

I risultati di ulteriori osservazioni saranno oggetto di un più esteso e più completo lavoro.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI.

SENNA A. – *I Chirotteri della provincia Pavese.* « Boll. Sci. Pav. », n. 2, 3 e 4 (1910).

SERGI S. – *Sulle variazioni di forma e di posizione dell'osso temporale nell'uomo.* « Riv. di Antropol. » vol. XXXI, pp. 373–408 (1935).

STEFANELLI AL. – *Affinità sistematiche dei Chirotteri e parassitismo dei « Nycteribidae, Diptera Pupipara ».* « Riv. di Parassitol. », vol. VI, pp. 1-42 (1942).

STEFANELLI AL. – *Considerazioni morfo-ecologiche dell'apparato acustico dei Microchirotteri.* « Atti R. Acc. Italia », vol. XIV; pp. 804-814 (1944).

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Fig. 1. – Profili laterali dei crani appartenenti alle tre specie del genere *Rhinolophus* (orientamento dei crani sull'orizzontale basion–prostion).

Fig. 2. – Profili laterali delle due specie del genere *Myotis*. (c. s.).

Fig. 3. e 4 - Profili laterali di crani di specie appartenenti ai tre generi. (c. s.).

Fig. 5. - Contorni della norma superiore di tre crani appartenenti ai generi *Miniopterus*, *Miotis*, e *Rhinolophus*. (I contorni corrispondono alla massima larghezza del cranio ed al minimo diametro retroorbitale sul quale sono sovrapposti.

ABBREVIAZIONI: *ba* = basion; *pro* = prostion; *na* = nasion; *br* = bregma; *op* = opistion.

I cerchietti delle fig. 3 e 4 rappresentano schematicamente gli anelli timpanici dei rispettivi crani.

Ingrandimento delle figure = 4,7 volte circa.

(1) Le modalità con cui si effettua l'ingrandimento del cranio nei Microchirotteri, sono profondamente diverse da quelle che si osservano nei Primati: in questi, infatti, l'occipitale ruota verso il basso ed il forame occipitale, di conseguenza, ruota dall'indietro in avanti e dall'alto verso il basso.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente comunica che è presente alla seduta il prof. Gröbner della Università di Innsbruck e porge al gradito ospite il cordiale saluto della Classe e suo personale.

Informa poi i Colleghi che le sedute previste dal calendario accademico hanno subìto una variazione in quanto è stato stabilito di rinviare al mese di aprile la discussione sulle epoche glaciali che era prevista per il marzo, mentre quest'ultimo mese avrà luogo una conferenza sulla fisica atomica che sarà tenuta dal Socio Edoardo Amaldi.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Herlitzka presenta il suo volume dal titolo « Fisiologia del lavoro umano » e lo illustra brevemente, ricordando inoltre la grande figura del suo Maestro Angelo Mosso, Socio Nazionale dell'Accademia dei Lincei che, con i suoi studi sulla fatica umana, fu il primo a dirigere l'attenzione allo studio fisiologico del lavoro e a dimostrare la differenza che le funzioni dell'organismo rivestono con il variare delle condizioni climatiche.

Del Mosso ricorda anche un'importante conferenza che egli tenne all'Accademia nell'Adunanza solenne del 29 maggio 1887 intorno al tema « Sulle leggi della fatica ».

L'Accademico Segretario illustra brevemente i libri inviati in omaggio all'Accademia, mettendo in particolare rilievo il volume celebrativo del centenario del « Royal Canadian Institute », l'opera del prof. E. J. B. Verleyen dal titolo « Le bouturage et les substances de croissance synthetiques », due opuscoli contenenti rispettivamente il discorso inaugurale dell'anno accademico 1948–'49 del Politecnico di Torino, tenuto dal Socio Panetti e la relazione del Direttore del Politecnico stesso, Socio Perucca; un altro opuscolo con la relazione del Direttore del Politecnico di Milano, Socio Cassinis, in occasione della cerimonia d'inaugurazione dell'anno accademico 1948–'49 del Politecnico stesso, alcuni studi di botanica del Socio Trotter, la commemorazione del compianto prof. Checchia Rispoli, letta nell'Istituto di Geologia dell'Università di Palermo da Francesco Cipolla ed altre pubblicazioni rispettivamente dello stesso Cipolla, di Alfonso Fresa e di Bruno Monterosso.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei Rendiconti i Soci Trabacchi, Colonnetti, Sansone (a mezzo del Collega Cantelli), Cantelli, Sergi, Amaldi Ugo, Cotronei, Crocco e Segre (a mezzo del Collega Signorini).

L'Accademico Segretario legge l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

SEGRE B., Geometria non euclidea ed ottica geometrica. Nota I.

SEGRE B., Geometria non euclidea ed ottica geometrica. Nota II.

SEGRE B., Alcune proprietà caratteristiche delle varietà a curvatura costante. Nota I.

SEGRE B., Alcune proprietà caratteristiche delle varietà a curvatura costante. Nota II.

AGENO M., GHIOZZOTTO M. e QUERZOLI R. – Una verifica della formula di Klein e Nishina, a 2.62 Mev. (pres. dal Socio G. C. TRABACCHI).

ALIBRANDI A., Azione della tiroxina sulla paralisi motoria da tiamina (pres. dal Socio A. CIACCIO).

BEER S. e SACCHETTI A. – La diafisi e l'estremità distale del femore di « Strepsiceros strepsiceros ». Nota II (pres. dal Socio S. SERGI).

CASTIGLIA C., Effetto dell'elasticità ritardata sugli stati di coazione di origine viscosa (pres. dal Socio G. COLONNETTI).

COLOMBO G., Sopra alcuni casi di riducibilità alle quadrature per le equazioni del moto di un punto sollecitato da forze posizionali (pres. dal Socio U. AMALDI).

LEVI F., Generalizzazione del legame sforzi-deformazioni nei solidi elastico-viscosi (pres. dal Socio G. COLONNETTI).

OBRECHKOFF N., Sur l'approximation diophantique linéaire (pres. dal Socio G. CASTELNUOVO).

OTTAVIANI G., Una condizione necessaria e sufficiente per la convergenza uniforme nell'intervallo di una successione di funzioni di una variabile, a variazione limitata, e sua estensione alle funzioni di due (o più) variabili (pres. dal Corrisp. F. P. CANTELLI).

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 12 febbraio 1949

Atti del XIV Congresso Geografico Italiano tenuto a Bologna dall'8 al 12 aprile 1947. Bologna, N. Zanichelli, 1949. Pp. 547, in–8°, con figg. e tavv.

CIPOLLA Francesco. – *Commemorazione del prof. Giuseppe Checchia Rispoli* (letta nell'Istituto di Geologia dell'Università di Palermo). Estr. da «Giornale di Scienze Naturali ed Economiche», vol. XLV, sez. I, 1948.

— *Ragni nostrani predatori della formica argentina.* (A proposito della lotta attuale contro l'«Iridomyrmex Humilis Meyr»). Estr. da «Giornale di Scienze Naturali ed Economiche», vol. XLV, sez. I, 1948.

FRESA Alfonso. — *Calendario nomografico.* (Determinazione del giorno della settimana dal 1599 av. Cristo al 2299 dell'êra volgare). Estr. da «Coelum», vol. XII, 1942, n. 9–12.

— *Che cosa si vede su Marte.* Estr. da «L'Universo», a. XXI, 1940, n. 8.

— *Determinazione dell'altezza dei Monti della Luna.* Estr. da «L'Universo», a. XXV, 1944 n. 2.

— *Tavole per trovare le date delle fasi lunari.* Estr. da «L'Universo», a. XXIII, 1942, n. 1.

HERLITZKA Amedeo. — *Fisiologia del lavoro umano.* Milano, Garzanti, 1948. Pp. XI-797, in–8°, con figg. e tavv.

MONTEROSSO Bruno. — *Deposizione delle uova e costruzione del bozzolo in «Teutana triangulosa Walck».* Estr. da «Bollettino delle sedute dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali in Catania», s. 3ª, fasc. 21.

— *Note Araneologiche.* – XV. *I primi stadi embrionali di «Teutana triangulosa (Walck)» studiati in «vivo».* Estr. da «Rendiconti dell'Accademia dei XL», s. 3ª, vol. XXVII, 1948.

MONTEROSSO Bruno. — *Note Araneologiche.* – XVII. *Temperatura dell'ambiente e fecondità in «Teutana triangulosa (Walck)».* Estr. da «Bollettino di Zoologia», vol. XV, 1948, n. 1–2–3.

PANETTI Modesto. — *Progressi dell'autoregolazione nelle motrici a fluido.* Discorso inaugurale dell'LXXXIX Anno Accademico del Politecnico di Torino. 5 novembre 1948. S.n.t. Pp. 19, in–8°.

PERUCCA Eligio. — *Relazione del Direttore del Politecnico di Torino.* Inaugurandosi l'Anno Accademico 1948–49. 5 novembre 1948. S.n.t. Pp. 15, in–8°.

POLITECNICO DI MILANO. — *Inaugurazione dell'Anno Accademico 1948–49.* 16 dicembre 1948. Milano, Stamp. Cesare Tamburini, 1949. Pp. 36, in–8°.

ROYAL CANADIAN INSTITUTE. — *Centennial Volume (1849–1949).* Edited by W. Stewart Wallace. Toronto, 1949. Pp. IX–232, in–8°, con tavv.

TROTTER Alessandro. — *Fitoterapia? Fitofarmaci?* Estr. da «Annali dell'Accademia di Agricoltura di Torino», vol. LXXXVIII, 1945–1946.

— *Galle dell'Eritrea. Ulteriori osservazioni e galle nuove.* Estr. da «Marcellia», vol. XXX, 1948, fasc. 4–6.

— *Notizie botaniche, storiche e biografiche intorno a Giovanni Gussone ed al suo tempo, desunte da suoi manoscritti inediti.* Estr. da «Delfinoa», vol. I, 1948.

VERLEYEN E.J.B. — *Le bouturage et les substances de croissance synthétiques.* (Études et recherches sur l'emploi des substances de croissance synthétique dans le bouturage en horticulture). Anvers, 1948. Pp. 204–IV, in–4°, con tavv.

WALLACE W. Stewart. – Vedi: Royal Canadian Institute.

U. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 12 marzo 1949

Presidenza del Socio G. CASTELNUOVO

NOTE DI SOCI

Chimica. — *Ricerche polarografiche e coulombometriche sui cianuri complessi di cobalto* (*). Nota di VINCENZO CAGLIOTI, GUIDO SARTORI, PAOLO SILVESTRONI, presentata (**) dal Corrisp. V. CAGLIOTI.

È noto che la soluzione di un sale cobaltoso in cianuro potassico presenta al polarografo un'onda di riduzione entro un vasto campo di concentrazione. È noto peraltro che i complessi cianidrici del cobalto bivalente sono instabili e facilmente ossidabili: e pertanto si è a lungo discusso se l'onda di riduzione dei complessi fosse dovuta alla riduzione del complesso cobaltoso oppure del suo prodotto di ossidazione (1).

Per chiarire la natura del fenomeno abbiamo esaminato il comportamento polarografico di soluzioni di cloruro cobaltoso in cianuro di potassio: queste soluzioni presentano la nota onda di riduzione che però tende a scomparire col tempo. D'altro canto una soluzione cianidrica del complesso $K_3[Co(CN)_6]$ da noi preparato secondo Benedetti Pichler (2) non presenta nel campo esplorato alcuna onda. Pertanto da queste esperienze orientative si può già dedurre che l'onda di riduzione non è dovuta al complesso $K_3[Co(CN)_6]$.

Per avere un'idea dell'ordine della reazione di riduzione, ci si è principalmente basati sull'analisi coulombometrica, dato che l'irreversibilità del fenomeno polarografico non permetteva di trarre risultati quantitativi.

Le soluzioni di un sale cobaltoso in presenza di ioni CN^- a varie concentrazioni, ridotte al coulombometro di Lingane si comportano in questo modo:

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico dell'Università di Roma. Centro di Chimica Generale del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 12 marzo 1949.

(1) «Z. Elektr.» *32*, 565 (1926); «Gazz. Chim. Ital.», *66*, 688 (1936).

(2) «Z. Anal. Chem.», *50*, 257 (1927); «Ch. Industry», *42*, 318 (1923); «Rec. Trav. Chim.», *44*, 529 (1925).

la quantità di gas che si sviluppa corrisponde con buona approssimazione ad un elettrone per mole. Se però la soluzione, ridotta fino alla scomparsa dell'onda polarografica, viene riossidata rapidamente con corrente d'aria, si ottiene un'onda all'incirca doppia dell'onda di partenza, la quale pure va diminuendo col tempo. Da questi ulteriori dati si può concludere che in principio si ha riduzione del complesso da bivalente a monovalente; questo ultimo per ossidazione rapida con aria, si trasforma in un complesso trivalente che, a differenza di $K_3[Co(CN)_6]$, è ancora riducibile a monovalente. Col tempo, sia il complesso del cobalto bivalente sia quello trivalente riducibile, si trasformano in un complesso non più riducibile che verosimilmente è il $K_3[Co(CN)_6]$.

Metodo di ricerca. – Le esperienze coulombometriche sono condotte nel modo seguente: si scioglie una quantità nota di cloruro di cobalto nell'elettrolita

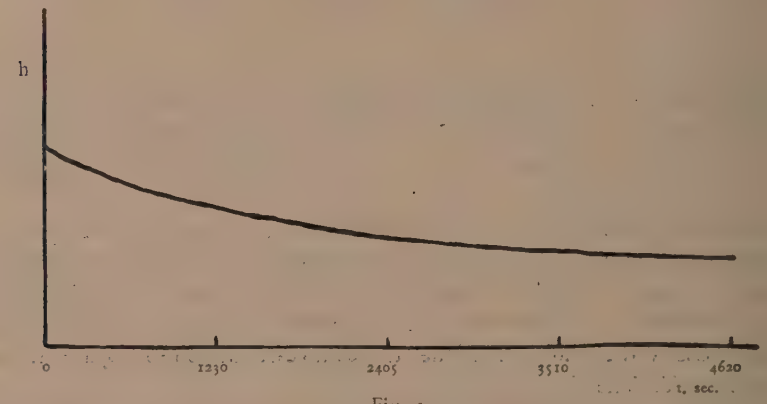


Fig. 1.

di supporto cianuro potassico, già purificato elettroliticamente: prima di iniziare la riduzione si esegue una curva polarografica per stabilire il valore della corrente di diffusione; quindi si inizia l'elettrolisi ad un potenziale lievemente superiore a quello di semionda e, di tempo in tempo, si interrompe la corrente di elettrolisi e si procede ad una nuova determinazione polarografica. Durante l'elettrolisi l'onda diminuisce per effetto della intervenuta riduzione della forma bivalente a monovalente; durante l'interruzione di corrente necessaria per la registrazione dei polarogrammi si ha un'ulteriore diminuzione della corrente di diffusione per l'ossidazione spontanea del complesso a $K_3[Co(CN)_6]$. Per valutare tale ossidazione spontanea è stato necessario stabilire per prima la curva riducibilità–tempo. A tal fine una soluzione $1{,}25 \cdot 10^{-2}$ M di $CoCl_2 \cdot 6H_2O$ in KCN N/2, ricoperta di olio di vaselina è stata esaminata tenendo costante il potenziale al valore della corrente di diffusione e registrando l'altezza dell'onda in funzione del tempo. I risultati di queste misure sono dati in fig. 1.

In tabella I sono riportati i valori di una serie di misure eseguite coulombometricamente su una quantità della stessa soluzione che conteneva complessi-

vamente 0,0005922 moli di $CoCl_2 \cdot 6H_2O$; essendo intercorsi 9′ 45″ tra l'istante in cui il sale è stato disciolto e la fine del polarogramma eseguito, in base al diagramma della fig. 1 la quantità del sale bivalente diminuirà per ossidazione spontanea del 14,6 %, divenendo così 0,0005057 M. A questa quantità quindi corrisponderà l'altezzz di $1,77 \cdot 10^{-5}$ A registrata col primo polarogramma.

Tabella I.

t	$i_d \cdot 10^5$	t_{ox}	t_{rid}	$i_d \cdot 10^5$	cc. ott.	cc. corr.	cc. teor.
9′ 45″	1,77	9′ 45′	—	—	—	—	—
19 40	1,48	13 5	6′ 35″	0,21	1,00	0,83	1,00
27 50	1,23	16 50	11 00	0,39	2,05	1,76	1,89
37 20	1,02	20 35	16 45	0,54	3,10	2,66	2,61
50 35	0,79	28 00	22 35	0,68	4,10	3,51	3,30
60 00	0,61	31 00	29 00	0,81	5,00	4,24	3,90
72 00	0,43	34 20	37 40	0,93	6,10	5,10	4,50
85 15	0,28	36 45	48 30	1,07	7,00	5,70	5,20
118 50	0,11	43 00	75 50	1,17	—	—	—
— (1)	1,52	—	—	—	—	—	—

(1) Questo valore corrisponde all'altezza dell'onda ottenuta dalla soluzione coulombometrata ossidata con acqua ossigenata. Su questo valore e sul precedente discuteremo in seguito.

Nella colonna 1 è riportato il tempo finale di ogni polarogramma; nella 2 l'altezza dell'onda relativa; nella 3 il tempo durante il quale la soluzione è rimasta senza passaggio di corrente, tempo dovuto alla durata dei polarogrammi oltre quello inizialmente intercorso è già considerato; nella 4 il tempo durante il quale si è avuta la riduzione elettrolitica; nella 5 la diminuzione di altezza dovuta alla riduzione: questi valori sono ottenuti come differenza fra quella che sarebbe stata l'altezza al tempo corrispondente per la sola ossidazione del sale (ricavata dalla curva della fig. 1) e l'altezza corrispondente al cobalto bivalente ancora presente ottenuta dai polarogrammi (colonna 2); nella 6 i cc. di gas tonante ottenuti, e riportati a condizioni normali; nella 7 i cc. corretti per la corrente residua (che era di 2,5 mA); nella 8 i cc. che teoricamente si sarebbero dovuti sviluppare per un processo del primo ordine.

Un'altra serie di esperienze è intesa a stabilire l'influenza della concentrazione dello ione CN^- sulla velocità di ossidazione del complesso cianidrico del cobalto bivalente abbandonato a se stesso e isolato dall'aria. I risultati sono riportati nella tabella II dove, per semplicità, le altezze iniziali sono state fatte uguali.

Tabella II.

Co 1,32·10⁻² M KCN 8·10⁻² M		Co 1,25·10⁻² M KCN 12,64·10⁻² M		Co 1,25·10⁻² M KCN 19,8·10⁻² M		Co 1,25·10⁻² M KCN 37,9·10⁻² M		Co 1,25·10⁻² M KCN 0,5 M	
t	h	t	h	t	h	t	h	t	h
4′	84	4′	84	4′	84	5′	84	4′	84
42′	82	32′	75	33′	77	36′	71	20′	69
63′	78	63′	74	63′	73	78′	60	36′	59
94′	76	136′	67	94′	68	108′	55	55′	51
234′	65	185′	63	125′	63	150′	49	77′	45
299′	59	345′	50	276′	51	330′	32	—	—

Infine è stata eseguita una serie di esperienze per accertare l'influenza della concentrazione dello ione CN^- sul potenziale di semionda del cobalto trivalente. In fig. 2 sono riportati i risultati di questa indagine.

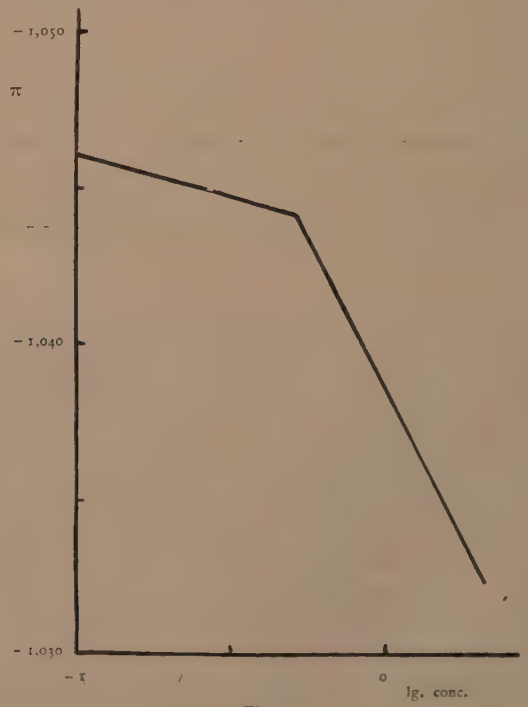


Fig. 2.

Discussione dei risultati. – Come già accennato, la diminuzione della corrente di diffusione di una soluzione di sale cobaltoso in cianuro potassico

indica la trasformazione del sale stesso in una forma non riducibile: siccome è noto che i complessi del cobalto bivalente, per la presenza di un elettrone spostatosi dal livello 3D ad un livello esterno alla sfera di coordinazione, tendono con facilità a perdere questo elettrone, con conseguente ossidazione ai corrispondenti sali del cobalto trivalente [3], e siccome il complesso esacianocobaltico, come abbiamo visto, non è più riducibile polarograficamente, si deve ammettere che la trasformazione osservata corrisponda alla ossidazione a $K_3[Co(CN)_6]$.

Passando ad esaminare il processo di riduzione, dalla tabella I risulta anzitutto che, la quantità di gas tonante sviluppato è in buon accordo con la supposizione che il processo sia del primo ordine. Dobbiamo quindi concludere che alla riduzione polarografica partecipa un solo elettrone e quindi si passa dal complesso del cobalto bivalente ad un complesso del cobalto monovalente. Notiamo infatti che per un processo del secondo ordine, quale sarebbe richiesto per la scarica dello ione Co^{++} tutti i valori dei cc. di gas teorici della colonna 8 sarebbero raddoppiati.

Se, dopo eseguita la riduzione coulombometrica, si ossida rapidamente la soluzione, ad esempio con acqua ossigenata, si nota che l'altezza dell'onda polarografica acquista un valore praticamente doppio di quello corrispondente al sale presente. Riferiamoci ora al caso dei valori asteriscati della tabella I; da questi risulta che dopo 118′ 50″ di esperienza si era in presenza di una concentrazione di sale bivalente pari ad una intensità della corrente di diffusione di $0{,}11 \cdot 10^{-5}$A, mentre la quantità ridotta a monovalente corrispondeva ad un'intensità di $1{,}17 \cdot 10^{-5}$A. La somma delle due intensità, cioè il totale del cobalto allo stato mono e bivalente è di $1{,}28 \cdot 10^{-5}$A. Dopo ossidazione si è ottenuta al polarografo una corrente di diffusione del valore di $2{,}52 \cdot 10^{-5}$A, corrispondente cioè al doppio della precedente: il potenziale a cui si ottiene questa onda è leggermente più negativo.

Siccome con una tale ossidazione sia il cobalto monovalente che il bivalente passano a trivalenti, si deduce che la forma di cobalto trivalente in tal modo ottenuta sia riducibile, il che fa escludere che si tratti del complesso esacianocobaltico. Il fatto che l'altezza sia doppia indica che anche questo nuovo complesso si riduce a monovalente (numero doppio di elettroni in giuoco). Orbene, la spiegazione di questi fatti può essere la seguente: il complesso cianidrico del cobalto bivalente, come hanno dimostrato recentemente Kolthoff e Hume [4] non è $K_4[Co(CN_6)]$ ma $K_3[Co(CN)_5H_2O]$. Per ossidazione rapida di questo complesso si ottiene $K_2[Co(CN)_5H_2O]$, ancora riducibile, mentre per ossidazione lenta si arriva a $K_3[Co(CN)_6]$ non più riducibile. Passando al significato dei dati della tabella II notiamo quanto segue: la velocità di ossidazione del cobalto bivalente a complesso esacianidrico del trivalente cresce con l'aumentare della concentrazione dello ione CN^-; infatti la reazione di ossidazione

$$[Co(CN)_5H_2O]^{-3} + CN^- = [Co(CN)_6]^{-3} + \Theta$$

(3) Pauling, *The nature of chemical bond.* Cornell University Press (1948).
(4) «Journ. Am. Chem. Soc.», *71*, 867 (1949).

sarà accelerata dalla presenza di ioni CN^-. Del resto esaminando quantitativamente i dati della tabella II si trova che effettivamente, considerando il processo di ossidazione come di primo ordine rispetto a ciascuno dei due componenti, le concentrazioni, espresse in funzione del logaritmo del tempo di trasformazione, si allineano abbastanza bene su delle rette come richiede la teoria.

Venendo a considerare la variazione del potenziale di semionda in funzione della concentrazione degli ioni CN^-, si può notare dalla figura 2 che i potenziali diventano più positivi con l'aumentare della concentrazione degli ioni CN^-. Il processo è irreversibile, come dimostra il fatto che in nessun caso si ottiene un'onda di ossidazione del complesso del cobalto monovalente, mentre è noto che la reversibilità termodinamica si ha solamente se il complesso ridotto si ossida allo stesso potenziale di riduzione della forma ossidata. Anche per i complessi cianidrici di nichel e di manganese è stata osservata una diminuzione del potenziale di semionda con l'aumentare della concentrazione degli ioni CN^-, ma non siamo in grado di darne una spiegazione soddisfacente.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Geometria. — *Le trasformazioni puntuali in una coppia a Jacobiano nullo.* – II. *Intorno del 3° ordine. Riferimenti intrinseci*(*). Nota di MARIO VILLA e GUIDO VAONA, presentata(**) dal Socio L. BERZOLARI.

5. Per fissare intrinsecamente gli ulteriori elementi dei riferimenti nei due S_r ($r > 2$) occorrerà passare all'intorno del 3° ordine. Riscriviamo perciò le equazioni di T tenendo conto dei termini di 3° grado. Si ha

$$(26)\qquad \begin{cases} y_s = x_s + \sum_{i,j} a^s_{ij}\, x_i\, x_j + \sum_{i,j,m} a^s_{ijm}\, x_i\, x_j\, x_m + [4] \\ y_r = \sum_{i,j} a^r_{ij}\, x_i\, x_j + \sum_{i,j,m} a^r_{ijm}\, x_i\, x_j\, x_m + [4], \end{cases}$$

dove

$$(27)\qquad \begin{cases} a^n_{ij} = a^n_{ji}\ , \quad a^n_{ii} = 0\ , \quad a^r_{rr} \neq 0\ , \quad \sum_{i,j} a^n_{ij} = 0\ , \quad a^{r-1}_{r-2,r} = a^r_{r-2,r}, \\ a^n_{ijm} = a^n_{jim} = a^n_{jmi} = \cdots, \\ \qquad (i, j, m, n = 1, 2, \cdots, r\ ;\ s = 1, 2, \cdots, r-1). \end{cases}$$

Fissando intrinsecamente l'S_{r-2} improprio e il punto unità dell'S_{r-1} stazionario, in virtù delle condizioni del n. 3, rimarrà contemporaneamente fissato il riferimento proiettivo in S_r. Rifacendoci ad un procedimento già usato nel caso

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta dell'8 gennaio 1949.

dello Jacobiano $\neq 0$ [10], si consideri ad esempio in S_r l'iperpiano individuato dalle $r-1$ direzioni caratteristiche assunte come assi $x_1, x_2, \cdots, x_{r-1}$ e sia V'_{r-1} l'ipersuperficie che gli corrisponde in T. La calotta σ'_3 del 3° ordine di centro O' appartenente a V'_{r-1} ha l'equazione

$$(28)\qquad y_r = \sum_{s,p} a^r y_s y_p + \sum_{s,p,q} a^r_{spq} y_s y_p y_q - \sum_{p,q} a^r_{pq} \left(y_p \sum_{s,t} a^q_{st} y_s y_t + y_q \sum_{s,t} a^p_{st} y_s y_t \right),$$

$$(p, q, s, t = 1, 2, \cdots, r-1).$$

Segando ora la calotta σ'_3 con opportuni piani intrinsecamente caratterizzati, si otterranno certi E_3 piani, geometricamente caratterizzati, tangenti ad una retta dell'S'_{r-1} stazionario essendo la σ'_3 tangente a tale iperpiano. È noto che un E_3 piano determina una proiettività fra i punti della sua tangente e il fascio di rette del suo piano passanti per il centro [11]. Segue che mediante siffatte proiettività si può caratterizzare geometricamente un punto, su ciascuna tangente agli E_3 considerati, come corrispondente di una retta del fascio intrinsecamente individuata (retta che si ha subito avendo già un riferimento intrinseco nella stella).

Seghiamo dunque la calotta σ'_3 cogli $r-1$ piani individuati dalla tangente cuspidale (asse y_r) e rispettivamente dalle $r-1$ rette di equazioni

$$(29)\qquad y_h = y_1 \;,\; y_2 = \cdots = y_{h-1} = y_{h+1} = \cdots = y_r = 0 \quad (h = 2, 3, \cdots, r-1),$$

$$(30)\qquad y_2 = -y_1 \;,\; y_3 = y_4 = \cdots = y_r = 0.$$

Gli E_3 che tali piani segano sulla σ'_3 risultano tangenti rispettivamente alle rette (29) e (30) ed hanno le equazioni

$$(29')\qquad y_r = 2a^r_{1h} y_1^2 + \rho_h y_1^3 \;,\; y_h = y_1 \;,\; y_2 = \cdots = y_{h-1} = y_{h+1} = \cdots y_{r-1} = 0,$$

$$(30')\qquad y_r = -2a^r_{12} y_1^2 + \rho y_1^3 \;,\; y_2 = -y_1 \;,\; y_3 = y_4 = \cdots = y_{r-1} = 0,$$

dove

$$(31)\qquad \begin{cases} \rho_h = a^r_{111} + 3a^r_{11h} + 3a^r_{1hh} + a^r_{hhh} - 4\sum_s a^s_{1h}\left(a^r_{1s} + a^r_{hs}\right), \\ \rho = a^r_{111} - 3a^r_{112} + 3a^r_{122} - a^r_{222} + 4\sum_s a^s_{12}\left(a^r_{1s} - a^r_{2s}\right). \end{cases}$$

Le proiettività determinate dagli E_3 (29'), (30') fra i punti delle loro tangenti e le rette $y_1 = ky_r$, $y_h = y_1$, $y_2 = \cdots = y_{h-1} = y_{h+1} = \cdots = y_{r-1} = 0$ e $y_1 = ky_2$, $y_3 = y_4 = \cdots = y_{r-1} = 0$, hanno rispettivamente le equazioni

$$(32)\qquad k = \frac{2a^r_{1h} - \rho_h y_1}{8\left(a^r_{1h}\right)^2 y_1},$$

$$(33)\qquad k = \frac{-2a^r_{12} - \rho y_1}{8\left(a^r_{12}\right)^2 y_1}.$$

(10) Si veda: M. VILLA, *Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari. – II. Intorno del 3° ordine. Riferimenti intrinseci.* «Questi Rendiconti», ser. VIII, vol. IV, pp. 192–196 (1948).

(11) Tale proiettività è quella subordinata dalla polarità rispetto ad una qualsiasi delle ∞^1 coniche contenenti l'E_3. Si veda: E. BOMPIANI, *Alcuni invarianti proiettivi di elementi curvilinei.* «Questi Rendiconti», ser. VI, vol. XXII, p. 486 (1935).

Assumiamo sulle tangenti (29), (30) degli E_1 considerati come punti impropri quelli corrispondenti nelle rispettive proiettività (32), (33) alla tangente cuspidale (asse y_r). Si ha

$$\rho = \rho_h = 0. \tag{34}$$

Infine scegliamo sulla retta $y_1 = y_2$, $y_3 = y_4 = \cdots = y_r = 0$ come punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \cdots, 0\right)$ quello corrispondente, nella relativa proiettività (32), alla retta $y_1 = y_2 = y_r$, $y_3 = y_4 = \cdots = y_{r-1} = 0$. Si ha

$$2\, a^r_{12} = 1. \tag{35}$$

6. Resta ancora da fissare intrinsecamente in S'_r il punto improprio dell'asse y_r. Si considerino, a tale scopo, gli E_2 di centro O che vengono mutati da T nell'E'_2 di flesso di centro O′ appartenente all'asse y_1 (12). Tali E_2 sono tangenti ad una retta del piano coordinato $x_1 x_r$, in quanto gli E_1 di centro O di detto piano (ed essi soltanto) sono mutati da T nell'E'_1 di centro O′ appartenente all'asse y_1. Si trova che gli E_2 richiesti hanno le equazioni

$$\begin{aligned} x_h &= \alpha_h x_1^2 \\ x_r &= \alpha x_1 + \beta x_1^2 \end{aligned} \qquad (h = 2, 3, \cdots, r-1), \tag{36}$$

dove le α , α_h acquistano uno dei due gruppi di valori

$$\alpha = \alpha_h = 0, \tag{37}$$

$$\alpha = -\frac{2\, a^r_{1r}}{a^r_{rr}} \quad , \quad \alpha_h = \frac{4\, a^r_{1r}\, a^h_{1r}}{a^r_{rr}}. \tag{38}$$

In corrispondenza ai valori (37) si hanno gli $\infty^1 E_2$ del piano $x_1 x_r$ tangenti in O alla retta caratteristica x_1; in corrispondenza ai valori (38) si hanno $\infty^1 E_2$ tangenti alla retta del piano $x_1 x_r$ di equazione $a^r_{rr} x_r + 2\, a^r_{1r} x_1 = 0$ (13), ed i cui piani osculatori appartengono ad un S_3 (quello di equazioni $a^k_{1r} x_2 = a^2_{1r} x_k$, $k = 3, 4, \cdots, r-1$).

Si considerino ora due E_2 geometricamente caratterizzati, appartenenti uno al sistema (37) e l'altro al sistema (38), per semplicità quelli che si hanno per $\beta = 0$ (14). Su questi E_2 si prendano due punti P , $\bar{P}$ giacenti su un iperpiano contenente l'S_{r-2} del tetraedro di riferimento opposto al piano $x_1 x_r$. Le coordinate di

(12) Si noti che nel caso di una coppia a Jacobiano $\neq 0$ esiste un solo E_2 che viene mutato da T in un E'_2 di flesso appartenente ad una retta fissata di S'_r, mentre nel caso in esame, in cui l'Jacobiano è nullo, esistono infiniti E_2 di S_r non di flesso che sono mutati da T in un E'_2 di flesso appartenente ad una retta fissata dell'S'_{r-1} stazionario. Più precisamente per ogni retta fissata dell'S'_{r-1} stazionario si hanno due sistemi ∞^1 di E_2 che sono mutati da T nell'E'_2 di flesso appartenente a detta retta; essi sono tangenti alle due rette secondo le quali il cono principale è tagliato dal piano corrispondente in ω (n. 2) alla retta fissata.

(13) Questa retta (= dall'asse x_1) costituisce, assieme all'asse x_1, l'intersezione del cono principale col piano $x_1 x_r$.

(14) Per $\beta = 0$ si ottiene l'E_2 di flesso del sistema (37). L'E_2 del sistema (38) si può caratterizzare mediante il suo piano osculatore avendo già un riferimento proiettivo nella stella.

$P, \bar{P}$ sono rispettivamente $(\varepsilon, 0, \cdots, 0, 0)$, $(\varepsilon, \alpha_2 \varepsilon^2, \cdots, \alpha_{r-1} \varepsilon^2, \alpha\varepsilon)$. Gli $E_1, \bar{E}_1$ di centro $P, \bar{P}$ appartenenti rispettivamente alle rette $r, \bar{r}$ che congiungono $P, \bar{P}$ col punto improprio della retta stazionaria (asse x_r), vengono mutati da T in due $E_1', \bar{E}_1'$ aventi centro sull'asse y_1 ed appartenenti a due rette $r', \bar{r}'$. Segando le due rette $r', \bar{r}'$ con l'S'_{r-1} $y_1 = 0$ e la retta che congiunge i due punti ottenuti con l'S'_{r-2} $y_1 = y_2 = 0$, si ottiene un punto $\bar{A}$. Orbene quando i punti $P, \bar{P}$ tendono ad O muovendosi sui rispettivi E_2 il punto $\bar{A}$ tende, in generale, ad un punto A' giacente sull'asse y_r ($\neq$ O). A' può assumersi come punto improprio dell'asse y_r.

Assumendo A' come punto improprio si ha

$$(39) \qquad 2\,a^r_{rr} \sum_s \left(a^2_{1r}\, a^1_{sr} - a^1_{1r}\, a^2_{sr}\right) a^s_{1r} - 3\, a^r_{rr} \left(a^2_{1r}\, a^1_{1rr} - a^1_{1r}\, a^2_{1rr}\right) + \\ + 9\, a^r_{1r} \left(a^2_{1r}\, a^1_{rrr} - a^1_{1r}\, a^2_{rrr}\right) + 2\, a^r_{rr}\, a^2_{1r} \left(a^1_{1r}\right)^2 = 0 .$$

Dalle (26), (27), (31), (34), (35) e (39) segue:

Nei riferimenti intrinseci indicati la trasformazione T *è rappresentata dalle equazioni canoniche*

$$y_s = x_s + \sum_{i,j} a^s_{ij}\, x_i\, x_j + \sum_{i,j,m} a^s_{ijm}\, x_i\, x_j\, x_m + [4]$$

$$y_r = \sum_{i,j} a^r_{ij}\, x_i\, x_j + \sum_{i,j,m} a^r_{ijm}\, x_i\, x_j\, x_m + [4],$$

dove

$$a^n_{ij} = a^n_{ji} \quad , \quad a^n_{ii} = 0 \quad , \quad a^r_{rr} \neq 0 \quad , \quad \sum_{i,j} a^n_{ij} = 0 ,$$

$$a^{r-1}_{r-2,r} = a^r_{r-2,r} \quad , \quad 2\, a^r_{12} = 1 ,$$

$$a^n_{ijm} = a^n_{jim} = a^n_{jmi} = \cdots ,$$

$$a^r_{111} + 3\, a^r_{11h} + 3\, a^r_{1hh} + a^r_{hhh} - 4 \sum_s a^s_{1h} \left(a^r_{1s} + a^r_{hs}\right) = 0 ,$$

$$a^r_{111} - 3\, a^r_{112} + 3\, a^r_{122} - a^r_{222} + 4 \sum_s a^s_{12} \left(a^r_{1s} - a^r_{2s}\right) = 0 ,$$

$$2\, a^r_{rr} \sum_s \left(a^2_{1r}\, a^1_{sr} - a^1_{1r}\, a^2_{sr}\right) a^s_{1r} - 3\, a^r_{rr} \left(a^2_{1r}\, a^1_{1rr} - a^1_{1r}\, a^2_{1rr}\right) + \\ + 9\, a^r_{1r} \left(a^2_{1r}\, a^1_{rrr} - a^1_{1r}\, a^2_{rrr}\right) + 2\, a^r_{rr}\, a^2_{1r} \left(a^1_{1r}\right)^2 = 0$$

$$(i, j, m, n = 1, 2, \cdots, r \; ; \; s = 1, 2, \cdots, r-1 \; ; \; h = 2, 3, \cdots, r-1).$$

7. Riprendiamo ora il caso $r = 2$ già studiato dal Bompiani [15]. Per la determinazione dei riferimenti intrinseci, l'Autore si è servito di particolari corrispondenze algebriche [1, 2] osculatrici ed è ricorso all'intorno del 4° ordine della trasformazione, mentre, come apparirà in questo numero, si possono ottenere riferimenti proiettivi intrinseci rimanendo nell'intorno del 3° ordine.

Data fra due piani $\pi(x, y)$, $\pi'(x', y')$ la trasformazione puntuale T, sia (O, O') la coppia a Jacobiano nullo di caratteristica uno. Assunti O, O' come

(15) Si veda: E. BOMPIANI, il 1° dei lav. cit. nella (1).

origini dei riferimenti proiettivi, le tangenti *stazionaria* e *Jacobiana* di π rispettivamente come assi x, y e le tangenti *fissa* e *cuspidale* di π' come assi x', y', le equazioni di T, nell'intorno di (O, O'), sono del tipo

$$x' = ay + 2a_{11}xy + a_{02}y^2 + [3]$$
$$y' = b_{20}x^2 + b_{02}y^2 + [3].$$

Si assumano *le due rette caratteristiche* di π, supposte distinte, di equazione $b_{20}x^2 + b_{02}y^2 = 0$, come rette $x = \pm y$. Si ha $b_{20} = -b_{02} = b$. Si assumano inoltre in π come punti impropri delle rette caratteristiche i punti corrispondenti nelle proiettività caratteristiche (n. 3) al punto improprio della tangente fissa. Si assuma infine come punto $(1, 0)$ della tangente fissa il corrispondente nella proiettività caratteristica del punto $(1, 1)$ della $x = y$. Si ha $a_{11} = a_{02} = 0$, $a = 1$. Le equazioni di T, fino ai termini di 3° grado, sono

$$x' = y + a_{30}x^3 + 3a_{21}x^2y + 3a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + [4]$$
$$y' = b(x^2 - y^2) + b_{30}x^3 + 3b_{21}x^2y + 3b_{12}xy^2 + b_{03}y^3 + [4].$$

Per fissare il punto improprio sulla tangente fissa (asse x') si consideri l'E_3' corrispondente in T all'E_3 di flesso di 2ª specie giacente sulla tangente Jacobiana e si assuma come punto improprio dell'asse x' il corrispondente dell'asse y' nella proiettività γ individuata dall'E_3' fra i punti della sua tangente e le rette per il suo centro. Si ha $b_{03} = 0$. Si assuma poi come retta $x' = y'$ la corrispondente in γ al punto $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ dell'asse x'. Si ha $b = -1$.

Come punto $(1, 1)$ di π si può scegliere quello ($\neq O$) in cui la conica contenente l'E_2 della Jacobiana e che tocca la retta impropria nel punto improprio dell'asse x, incontra la retta $x = y$. Si ottiene così $3b_{12} = 2$.

Per avere riferimenti proiettivi intrinseci nei due piani occorre ancora fissare un punto improprio del piano π'. Consideriamo perciò due punti P e $\bar{P}$, appartenenti all'intorno del 2° ordine di O, giacenti sulle due rette caratteristiche e allineati col punto improprio dell'asse x. Ad essi corrisponde, fino al 2° ordine, un unico punto P' della retta fissa di π'. Ai due E_1 di centri $P, \bar{P}$ appartenenti a due rette $r, \bar{r}$ per $P, \bar{P}$ che si incontrano in un punto R della retta impropria, T fa corrispondere due E_1 appartenenti a due rette $r', \bar{r}'$ per P'. Nel fascio di centro P', quando si dicano corrispondenti rette del tipo $r', \bar{r}'$, nasce una proiettività avente due raggi uniti u e v che tagliano l'asse y' in due punti U e V. Se ora si fanno tendere i punti P e $\bar{P}$ ad O in modo che la retta $P\bar{P}$ tenda all'asse x, i punti U e V tendono, in generale, ad una posizione limite; più precisamente uno di essi tende ad O', l'altro ad un punto $A' \neq O'$. Assumendo A' come punto improprio dell'asse y' si ha $a_{21} = 0$.

Si ottengono così per T gli *sviluppi canonici*

$$(40) \qquad \begin{cases} x' = y + a_{30}x^3 + 3a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + [4] \\ y' = y^2 - x^2 + x(b_{30}x^2 + 3b_{21}xy + 2y^2) + [4]; \end{cases}$$

i cinque coefficienti delle (40) sono invarianti proiettivi indipendenti.

Matematica. — *Sur l'approximation diophantique linéaire.* Nota di NIKOLA OBRECHKOFF, presentata (*) dal Socio G. CASTELNUOVO.

Dans cette Note nous démontrons un théorème qui donne une forme précise des théorèmes classiques de Lejeune–Dirichlet et Minkowski pour l'approximation des nombres irrationnels.

I. *Soient* $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m$ *des nombres réels arbitraires et* n *un nombre entier positif. Ils existent des nombres entiers* $x_1, x_2, \cdots, x_m$ *non tous nuls et un nombre entier* y *tels que l'on a,* $|x_i| \leqq n$, $i = 1, 2, \cdots, m$,

$$(1) \qquad |\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \cdots + \omega_m x_m - y| \leqq \frac{1}{(n+1)^m}.$$

On a le signe d'égalité dans (1) *seulement dans le cas où les nombres* $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m$ *sont égaux, abstraction faite de l'ordre, à*

$$\frac{\lambda_1}{n+1}, \frac{\lambda_2}{(n+1)^2}, \cdots, \frac{\lambda_m}{(n+1)^m},$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ *sont des nombres entiers premiers à* $n+1$.

Dans la démonstration nous utilisons le principe de Dirichlet modifié de la façon suivante: Sur un segment E de longueur l se trouvent n segments dont la somme des longueurs est égale à l, ces segments pouvant être composés des parties différentes. Alors il y aura au moins deux segments qui auront des points communs intérieurs ou tous ces segments remplissent le segment E.

Nous démontrerons le théorème I d'abord dans le cas d'un nombre ω. Considérons les intervalles

$$A_\nu \left(\nu\omega - \frac{1}{2(n+1)}, \quad \nu\omega + \frac{1}{2(n+1)} \right), \qquad \nu = 0, 1, 2, \cdots, n$$

et désignons par B_ν les segments congrus aux A_ν suivant le module 1, c'est-à-dire chaque point x de A_ν est remplacé par un point correspondant x' de l'intervalle B_ν tel que $x - x'$ est un nombre entier, en suivant ainsi une méthode employée par Khintchine dans sa démonstration du théorème de Dirichlet et de ses généralisations. Les segments B_ν se trouvent sur le segment $(0, 1)$ et la somme des longueurs des B_ν est égale à 1. Donc on aura deux possibilités: 1. Il y a au moins deux segments B_{ν_1} et B_{ν_2} qui auront un point commun intérieur x. Alors pour deux nombres entiers y_1 et y_2 on aura

$$|\omega\nu_1 - x - y_1| < \frac{1}{2(n+1)}, \quad |\omega\nu_2 - x - y_2| < \frac{1}{2(n+1)},$$

d'où l'on tire

$$|\omega\nu - y| < \frac{1}{n+1}, \quad \nu = \nu_1 - \nu_2, \quad y = y_1 - y_2, \quad |\nu| \leqq n.$$

(*) Nella seduta del 12 febbraio 1949.

2. Tous les segments B_ν couvrent $(0, 1)$ sans points communs intérieurs. Puique B_0 se compose des parties $\left(0, \frac{1}{2(n+1)}\right)$ et $\left(1 - \frac{1}{2(n+1)}, 1\right)$ on voit facilement que les autres segments B_ν seront

$$\left(\frac{k}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)}, \frac{k}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)}\right), \qquad 1 \leqq k \leqq n.$$

Donc ω doit avoir la forme $g/n+1$ où g est un nombre entier tel que les nombres $gx, x = 0, 1, 2, \cdots, n$ doivent être non congrus suivant le module $n+1$. Donc g doit être premier à $n+1$. On voit immédiatement de la démonstration que cette condition pour ω est aussi suffisante pourque dans (1) on a le signe d'égalité.

Supposons maintenant que le théorème I est démontré pour $m-1$ nombres ω_i. Considérons les intervalles

$$A\left(L - \frac{1}{2(n+1)^m}, L + \frac{1}{2(n+1)^m}\right), \quad L = \sum_{i=1}^{m} \omega_i x_i,$$

où $x_i = 0, 1, 2, \cdots, n$, $i = 1, 2, \cdots, m$, et désignons par B les intervalles reduits selon le module 1. On aura alors deux cas: 1. Il y a au moins deux segments B', B'' qui ont des points communs intérieurs et dans ce cas on démontre comme auparavant qu'ils existent des nombres entiers x_i, $i = 1, 2, \cdots, m$, $|x_i| \leqq n, z$, tels que l'on a $|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_m| > 0$,

$$|\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \cdots + \omega_m x_m - z| < \frac{1}{(n+1)^m}.$$

2. Tous les segments B remplissent l'intervalle $(0, 1)$. Alors les nombres ω_i doivent avoir la forme

$$\omega_i = \frac{a_i}{(n+1)^m}, \qquad i = 1, 2, \cdots, m$$

où $a_1, a_2, \cdots, a_m$ sont des nombres entiers. De plus la forme linéaire $f = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_m x_m$ doit avoir comme restes de division par $(n+1)^m$ tous les nombres entiers de 0 jusqu'au $(n+1)^m - 1$, lorsque les variables x_i, $i = 1, 2, 3, \cdots, m$, parcourent tous les nombres $0, 1, 2, \cdots, n$.

Nous démontrons en même temps le théorème suivant:

II. *La condition nécessaire et suffisante pour que la forme*

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_m x_m,$$

a_i nombres entiers, donne comme restes suivant le module n^m tous les nombres $0, 1, 2, \cdots, n^m - 1$ lorsque les variables $x_1, x_2, \cdots, x_m$ prennent les valeurs $0, 1, 2, \cdots, n-1$, est que les nombres a_i, $i = 1, 2, \cdots, m$ soient égaux, abstraction faite de l'ordre, aux nombres $b_i n^{i-1}$, $i = 1, 2, \cdots, m$, où b_i sont des nombres entiers premiers à n.

Supposons que ce théorème est déjà démontré pour $m-1$ variables.

On voit facilement que parmi les nombres a_i un au moins, par exemple a_1, sera premier à n. D'autre part on voit que la question posée se ramène à trouver les conditions pour que la congruence

$$(2) \qquad a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_m x_m \equiv 0 \pmod{n^m}$$

n'a pas des solutions en nombres entiers non tous nuls et qui ne surpassent pas en valeur absolue $n-1$. Soit λ une solution de $a_1 x \equiv 1 \pmod{n^m}$. En multipliant (2) par λ on obtient

$$-x_1 \equiv a_2 \lambda x_2 + a_3 \lambda x_3 + \cdots + a_m \lambda x_m \pmod{n^m}.$$

D'après le théorème I pour le cas des $m-1$ nombres ω_i ils existent des nombres entiers $x_2', x_3', \cdots, x_m', z$ tels que l'on a

$$\left| \frac{a_2 \lambda}{n^m} x_2' + \frac{a_3 \lambda}{n^m} x_3' + \cdots + \frac{a_m \lambda}{n^m} x_m' - z \right| \leqq \frac{1}{n^{m-1}} \quad , \quad |x_i'| \leqq n-1 \quad , \quad \sum_{i=2}^{m} |x_i'| > 0,$$

où l'on a l'égalité seulement dans le cas où les nombres $\frac{a_i \lambda}{n^m}, 2 \leqq i \leqq m$, ont la forme c_i/n^{m-i+1}, les nombre c_i étant entiers et premiers à n. Puisque λ est premier à n les nombres a_i auront, dans ce dernier cas, la forme

$$(3) \qquad a_1 = b_1 \quad , \quad a_2 = n b_2 \quad , \quad a_3 = n^2 b_3, \cdots, a_m = n^{m-1} b_m,$$

où b_i sont des nombres entiers premiers à n. Donc la congruence (2) aura des solutions x_i satisfaisant aux conditions démandées seulement dans le cas où les nombres a_i n'ont la forme (3). Ainsi la nècessité des conditions des théorèmes I et II est démontrée. De la démonstration exposée, on voit tout de suite que les mêmes conditions sont aussi suffisantes.

On peut démontrer le théorème II aussi en se basant sur la propriété suivante : un au moins entre les nombres a_i doit être divisible par n^{m-1}. En effet, où doit avoir

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \alpha^{a_1 \nu} \sum_{\nu=0}^{n-1} \alpha^{a_2 \nu} \cdots \sum_{\nu=0}^{n-1} \alpha^{a_m \nu} = \sum_{k=0}^{n^m-1} \alpha^k = 0,$$

où α est une racine primitive de $x^{n^m} = 1$.

Donc on aura, par exemple $\alpha^{a_1} = 1$, d'on il suit que $a_1 = \lambda n^{m-1}$ et des simples considérations nous montre que $(\lambda, n) = 1$. La congruence (2) se réduit alors à la congruence $a_2 x_2 + \cdots + a_m x_m \equiv 0 \pmod{n^{m-1}}$ de $m-1$ variables.

Si $x_i', i = 2, 3, \cdots, m$, $(|x_i'| \leqq n-1)$ est une solution de cette congruence et si x_1' est la solution de $\lambda x_1 + M \equiv 0 \pmod{n}$, $0 \leqq x_1' \leqq n-1$, M étant donné par $\sum_{i=2}^{m} a_i x_i' = M n^{m-1}$, le système $x_1', x_2', \cdots, x_m'$ sera une solution de (2).

Remarquons que par la même métode on peut démontrer des résultat semblables pour plusieures formes linéaires.

Matematica. — *Sopra alcuni casi di riducibilità alle quadrature per le equazioni del moto di un punto sollecitato da forze posizionali.* Nota di GIUSEPPE COLOMBO, presentata (*) dal Socio U. AMALDI.

1. Prendendo lo spunto da due note, la prima del Lecornu (1), la seconda dell'Appel (2), ci occuppiamo in questo breve lavoro, di determinare alcuni casi di riducibilità alle quadrature per le equazioni del moto piano e spaziale di un punto sollecitato da forza posizionale.

Daremo un criterio generale per riconoscere l'esistenza di trasformazioni lineari che riducono le equazioni del moto a tipi integrabili per quadrature.

Le condizioni che troveremo, leganti le derivate parziali prime delle componenti delle forze, si potrebbero interpretare come condizioni di olomorfismo per funzioni di un numero appartenente a certe algebre a 2 o 3 unità sul campo dei numeri complessi.

Di questi tipi particolari di forze si è occupato ultimamente il Pignedoli (3), relativamente al caso piano, in una recente Nota.

2. Consideriamo il sistema

$$\ddot{x} = X(x, y) \quad , \quad \ddot{y} = Y(x, y); \tag{1}$$

le X, Y sono supposte funzioni reali derivabili una volta rispetto alle due variabili.

Si ha subito che:

Se l'equazione in λ, μ

$$\lambda^2 X'_y + \lambda\mu (Y'_y - X'_x) - \mu^2 Y'_x = 0 \tag{2}$$

ha le sue soluzioni tutte indipendenti da x e y, il sistema (1) *è riducibile alle quadrature.*

Se $(\lambda_1, \mu_1), (\lambda_2, \mu_2)$ sono due soluzioni soddisfacenti alla

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

la sostituzione lineare

$$\xi = \lambda_1 x + \mu_1 y \quad , \quad \eta = \lambda_2 x + \mu_2 y, \tag{3}$$

trasforma il sistema (1) nel sistema

$$\ddot{\xi} = f(\xi) \quad , \quad \ddot{\eta} = \varphi(\eta); \tag{4}$$

(*) Nella seduta del 12 febbraio 1949.

(1) LECORNU, *Sur le mouvement d'un point dans un plan et sur le temps imaginaire.* «Comptes Rendus», t. 101, p. 1244.

(2) APPELL, *Proposition d'Algèbre, et de Géometrie deduites de la considération des racines cubiques de l'unité.* «Comptes Rendus», t. 84 (1), p. 540.

(3) PIGNEDOLI, *Su alcune equazioni differenziali del primo ordine in cui intervengono le funzioni armoniche.* «Rendiconti del Sem. Mat. e Fis. dell'Un. di Modena», vol. III, 1948–49.

infatti si ha, per la (2),

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(\lambda_1 X + \mu_1 Y) = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial \xi}(\lambda_2 X + \mu_2 Y) = 0 .$$

Poichè la trasformazione (3) non è degenere, determinati ξ ed η per quadrature sono determinabili anche x e y.

Perchè si verifichi questo caso basta che sia

$$X'_x - Y'_y = 2kX'_y \quad , \quad Y'_y = hX'_y \qquad [k^2+h \neq 0]. \tag{5}$$

Se è invece $k^2 + h = 0$, cioè se si ha

$$X'_x - Y'_y = 2kX'_y \quad , \quad Y'_x = -k^2 X'_y, \tag{6}$$

si ha anche

$$\begin{cases} kX + Y = f(kx + y) \\ X = xf'(kx + y) + \varphi(kx + y) \end{cases} \tag{7}$$

e quindi la sostituzione $\xi = kx + y$ riduce il sistema (1) alla forma

$$\ddot{\xi} = f(\xi) \quad , \quad \ddot{x} = xf'(\xi) + \varphi(\xi). \tag{8}$$

Per concludere, basta far vedere che il sistema (8) è riducibile alle quadrature.

Consideriamo la x funzione di t tramite ξ; si ha allora

$$\ddot{x} = \ddot{\xi}\frac{dx}{d\xi} + \dot{\xi}^2\frac{d^2x}{d\xi^2}$$

e quindi la seconda delle (8), tenuto conto della prima, diventa

$$\sqrt{a^2 + 2\int f(\xi)\,d\xi}\,\frac{d^2x}{d\xi^2} + f(\xi)\frac{dx}{d\xi} - xf'(\xi) = \varphi(\xi) \tag{8'}$$

che è riducibile alle quadrature perchè dell'omogenea associata si conosce l'integrale

$$x = \sqrt{a^2 + 2\int f(\xi)\,d\xi}.$$

È da notare che la soluzione della (8') dà le traiettorie del moto piano.

3. Si osservi intanto che la condizione espressa all'inizio del n. 2 si può interpretare come segue. Consideriamo λ e μ come unità indipendenti in un algebra lineare in due unità con modulo, associative, e commutative sopra il campo dei numeri complessi e introduciamo la variabile $z = \lambda x + \mu y$. Scrivendo la condizione perchè la funzione $\lambda X + \mu Y = f(z)$ ammetta derivata, si ottiene che deve essere verificata la

$$\frac{\lambda X'_x + \mu Y'_x}{\lambda} = \frac{\lambda X'_y + \mu Y'_y}{\mu},$$

che scriveremo nella forma

$$\begin{vmatrix} \lambda X'_x + \mu Y'_y & \lambda X'_y + \mu Y'_y \\ \lambda & \mu \end{vmatrix} = 0,$$

o meglio nella forma (2), ove si considerino λ e μ unità indipendenti.

I due tipi di algebre lineari, con modulo, non equivalenti, sopra il campo dei numeri complessi sono quelle caratterizzate rispettivamente dai quadri di moltiplicazione (4)

$$\text{I}^a \quad e_i^2 = e_i \,,\ e_i e_j = e_j e_i = 0 \quad ; \quad \text{II}^a \quad e_1^2 = e_1 \,,\ e_1 e_2 = e_2 e_1 = e_2 \,,\ e_2^2 = 0.$$

Se nella (2) si considerano λ e μ come unità E_1 , E_2 in un'algebra equivalente alla I^a, annullando i coefficienti delle due unità, si ottengono le condizioni (5). Queste condizioni assicurano l'esistenza di una trasformazione lineare, che riduce il sistema (1) alla forma (4), forma che lo stesso sistema ha se la (2) è verificata per $\lambda = e_1 \,, \mu = e_2$, essendo e_1 , e_2 unità della I^a algebra.

Analogamente partendo dalla II^a si ottiene il secondo caso di integrabilità per quadrature. Se nella (2) poniamo $\lambda = e_1 \,, \mu = e_2$, con e_1 , e_2 legate dal secondo quadro, si trova che, se questa è soddisfatta, si ha necessariamente $X = f(x)$, $Y = y f'(x) + \varphi(x)$. Le condizioni (6) si trovano poi assumendo λ e μ come unità nell'algebra più generale equivalente alla II^a.

4. Si consideri il sistema

$$(9) \qquad \ddot{x} = X(x, y, z) \quad , \quad \ddot{y} = Y(x, y, z) \quad , \quad \ddot{z} = Z(x, y, z),$$

dove sulle X , Y , Z si fanno ipotesi analoghe a quelle fatte su $X(x, y)$, $Y(x, y)$ nel n. 2.

Supponiamo che esista una terna di numeri λ , μ , ν tali che la matrice

$$\left\| \begin{matrix} \lambda X'_x + \mu Y'_x + \nu Z'_x & \lambda X'_y + \mu Y'_y + \nu Z'_y & \lambda X'_z + \mu Y'_z + \nu Z'_z \\ \lambda & \mu & \nu \end{matrix} \right\|$$

abbia caratteristica 1 identicamente in x , y , z; si vede allora subito che la funzione $\lambda X + \mu Y + \nu Z$ è funzione della variabile $w = \lambda x + \mu y + \nu z$, onde dal sistema (9) si trae $\ddot{w} = f(w)$.

Si ha, ancora, *che se il sistema in* λ , μ , ν

$$(10) \qquad \begin{cases} \lambda^2 X'_y + \lambda\mu (Y'_y - X'_x) - \mu^2 Y'_x + \nu\lambda Z'_y - \nu\mu Z'_x = 0 \\ \mu^2 Y'_z + \mu\lambda (Z'_z - Y'_y) - \nu^2 Z'_y + \lambda\mu X'_z - \lambda\nu X'_z = 0 \\ \nu^2 Z'_x + \nu\lambda (X'_x - Z'_z) - \lambda^2 X'_z + \mu\nu Y'_x - \mu\lambda Y'_z = 0 \end{cases}$$

ha tutte le sue soluzioni indipendenti dalle variabili x , y , z, *il sistema* (9) *è integrabile per quadrature.*

Una discussione analoga a quella fatta nel n. 2 sarebbe qui malagevole. Per distinguere i vari casi è più facile fare ricorso come nel n. 3 alle agebre lineari ternarie, con modulo, associative e commutative.

5. Esistono 5 algebre, a tre unità, con modulo, sopra il campo dei numeri complessi, caratterizzate dai seguenti quadri di moltiplicazione (5)

(4) Cfr. DICKSON, *Linear Algebras*. Cambridge Univ. Press, 1930, p. 21.
(5) Vedi op. cit. in (4), p. 23.

I^a $e_i^2 = e_i \, , \; e_i e_j = e_j e_i = 0 \, ;$

II^a $e_1^2 = e_1 \, , \; e_1 e_2 = e_2 e_1 = e_2 \, , \; e_3^2 = e_3 \, , \; e_1 e_3 = e_3 e_1 = e_2 e_3 = e_3 e_2 = e_2^2 = 0 \, ;$

III^a $e_1 e_i = e_i e_1 = e_i \, , \; e_2 e_3 = e_3 e_2 = e_3^2 = 0 \, , \; e_2^2 = e_3 \, ;$

IV^a $e_1 e_i = e_i e_1 = e_i \, , \; e_2^2 = e_1 \, , \; e_2 e_3 = e_3 \, , \; e_3 e_2 = -e_3 \, , \; e_3^2 = 0 \, ;$

V^a $e_1 e_i = e_i e_1 = e_i \, , \; e_2^2 = e_2 e_3 = e_3 e_2 = e_3^2 = 0 \, ;$

Queste algebre sono associative, e tutte commutative tranne la IV^a.

Se poniamo nelle (10), $\lambda = e_1 \, , \; \mu = e_2 \, , \; \nu = e_3$ essendo $e_1 \, , \; e_2 \, , \; e_3$ legate del I° quadro di moltiplicazione, annullando i coefficienti delle unità, otteniamo

$$X'_y = X'_z = 0 \quad , \quad Y'_x = Y'_z = 0 \quad , \quad Z'_x = Z'_z = 0$$

e quindi $X = f(x) \, , \; Y = \varphi(y) \, , \; Z = \psi(z)$.

Considerando $\lambda \, , \; \mu \, , \; \nu$ come unità $E_1 \, , \; E_2 \, , \; E_3$ in una qualunque algebra equivalente alla I^a si ottengono quindi, nella stessa maniera, le condizioni atte ad assicurare l'esistenza di una trasformazione lineare $\xi = a_1 x + b_1 y + c_1 z \, , \; \eta = a_2 x + b_2 y + c_2 z \, , \; \zeta = a_3 x + b_3 y + c_3 z$ a determinante non nullo che riduca il sistema (9) alla forma

$$(11) \qquad \ddot{\xi} = f(\xi) \quad , \quad \ddot{\eta} = \varphi(x) \quad , \quad \ddot{\zeta} = \psi(\zeta).$$

Il caso dell'Appell si ottiene rapidamente considerando l'algebra equivalente alla prima, che si ha assumendo come nuove unità le combinazioni

$$E_1 = e_1 + e_2 + e_3 \quad , \quad E_2 = e_1 + \alpha e_2 + \alpha^2 e_3 \quad , \quad E_3 = e_1 + \alpha^2 e_2 + \alpha e_3$$

dove α e α^2 sono le radici cubiche immaginarie dell'unità.

In questa nuova algebra E_1 è l'unità principale e si ha poi

$$E_2^2 = E_3 \quad , \quad E_3^2 = E_2 \quad , \quad E_2 E_3 = E_3 E_2 = E_1 \, .$$

Si ottengono, allora, quali condizioni di riducibilità alla forma (11), e quindi alle quadrature, le

$$(12) \qquad X'_x = Y'_y = Z'_z \quad , \quad X'_y = Y'_z = Z'_x \quad , \quad X'_z = Y'_x = Z'_y,$$

che sono le condizioni di Appell. In questo caso la sostituzione

$$\xi = x + y + z \quad , \quad \eta = x + \alpha y + \alpha^2 z \quad , \quad \zeta = x + \alpha^2 y + \alpha z$$

trasforma il sistema (9) alla forma (11).

Si può osservare che le (12) si possono interpretare come condizioni di olomorfismo della funzione $XE_1 + YE_2 + ZE_3$ nella variabile $xE_1 + yE_2 + zE_3$.

6. Consideriamo ora la 2^a algebra. Se nella (10) poniamo $\lambda = e_1 \, , \; \mu = e_2 \, , \; \nu = e_3$ e pensiamo $e_1 \, , \; e_2 \, , \; e_3$ legate dal II° quadro di moltiplicazione troviamo

$$e_1 X'_y + e_2 (Y'_y - X'_x) = 0 \quad , \quad -e_3 Z'_y + e_2 X'_z = 0 \quad , \quad e_3 Z'_x - e_1 X'_z - e_2 Y'_z = 0.$$

Da queste si ha

$$(13) \qquad X'_y = X'_z = 0 \; ; \; Z'_x = Z'_y = 0 \; ; \; Y'_z = 0 \; ; \; Y'_y = X'_x$$

e quindi il sistema (9) assume la forma

$$(14) \qquad \ddot{x} = f(x) \quad , \quad \ddot{z} = \psi(z) \quad , \quad \ddot{y} = y f'(x) + \varphi(x).$$

Per quanto abbiamo visto nel n. 2 per tali X, Y, Z il sistema (9) è riducibile alle quadrature. Partendo da una qualunque algebra equivalente a questa si ottengono condizioni analoghe alle (13) atte ad assicurare l'esistenza di una trasformazione lineare riducente il sistema (9) alla forma (14).

Si prenda per esempio l'algebra, equivalente alla seconda, che si ottiene assumendo come nuove unità le

$$E_1 = e_1 + e_2 \quad , \quad E_2 = e_1 + e_2 + e_3 \quad , \quad E_3 = -e_1 + e_3 .$$

La E_1 è qui unità principale ed inoltre si ha:

$$E_2^2 = 2E_2 - E_1 \quad , \quad E_3^2 = E_1 \quad , \quad E_2 E_3 = E_3 E_2 = E_1 - E_2 + E_3 .$$

In questo caso, dalle (10) si ottengono le condizioni di riducibilità alle quadrature:

$$X'_y + Y'_x - Z'_x = 0 \quad , \quad Y'_y - X'_x - 2Y'_x + Z'_x = 0 \quad , \quad Z'_y - Z'_x = 0$$
$$-X'_z + Y_x = 0 \quad , \quad Y'_z + Y'_z = 0 \quad , \quad Z'_z - X'_z - Y'_x + Z'_x = 0 .$$

Se X, Y, Z soddisfano a queste condizioni, la sostituzione

$$\xi = x + y - z \quad , \quad \eta = x + y + z$$

riduce il sistema (9) alla forma

$$\ddot{\xi} = f(\xi) \quad , \quad \ddot{\eta} = \varphi(\eta) \quad , \quad \ddot{y} = y f'(\xi) + \psi(\xi).$$

7. Alla terza algebra corrisponde analogamente il sistema in cui siano

$$(15) \qquad \begin{cases} X = f(x) \quad , \quad Y = y f'(x) + \varphi(x), \\ Z = z f'(x) + \dfrac{y^2}{2} f''(x) + y\varphi'(x) + \psi(x). \end{cases}$$

Anche questo è riducibile alle quadrature. Infatti dalla seconda equazione si ricava esplicitamente la y in funzione di x e la terza si riduce allora allo stesso tipo della seconda.

Alla quinta algebra corrisponde infine il sistema in cui le X, Y, Z sono funzioni del tipo

$$(16) \qquad X = f(x) \quad , \quad Y = y f'(x) + \varphi(x) \quad , \quad Z = z f'(x) + \psi(x);$$

il sistema è ovviamente integrabile per quadrature.

In generale si ha che se il sistema (10) ha tutte le sue soluzioni indipendenti da x, y, z, il sistema (9) è riducibile ad uno dei 4 tipi sopra riportati. Si verifica il primo caso se il sistema (10) ha 3 soluzioni linearmente indipendenti, il secondo caso se ha soltanto due soluzioni linearmente indipendenti, per modo che una di queste risulti doppia; il terzo se ha tutte le sue radici linearmente dipendenti, cioè se il sistema eterogeneo corrispondente ha 3 radici coincidenti. Infine il 4° caso si ha quando il sistema (10) si riduce ad essere di 2° grado ad ha tutte le soluzioni linearmente dipendenti, cioè il sistema eterogeneo corrispondente ha una radice doppia.

Analisi. — *Una condizione necessaria e sufficiente per la convergenza uniforme nell'intervallo* $(-\infty, \infty)$ *di una successione di funzioni di una variabile, a variazione limitata, e sua estensione alle funzioni di due (o più) variabili.* Nota di GIUSEPPE OTTAVIANI, presentata (*) dal Corrisp. F. P. CANTELLI.

1. È noto che per una successione di funzioni monotone nell'intervallo $(-\infty, \infty)$ vale il seguente teorema (1)

Condizione necessaria e sufficiente perchè una successione di funzioni

$$f_1(x), f_2(x), \cdots, \tag{1}$$

definite nell'intervallo $(-\infty, \infty)$ *e monotone, converga ivi, uniformemente, per* $n \to \infty$, *verso una funzione* $f(x)$ *(necessariamente monotona), tale che esistano i limiti* $f(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} f(x), f(+\infty)$, *è che sia, per ogni valore finito di* x *e per* $n \to \infty$,

$$\lim f_n(x) = f(x) \quad , \quad \lim f_n(x-) = f(x-) \quad , \quad \lim f_n(x+) = f(x+) \tag{2}$$

ed inoltre che sia

$$\lim f_n(-\infty) = f(-\infty) \quad , \quad \lim f_n(+\infty) = f(+\infty). \tag{3}$$

Per una successione di funzioni (1) a variazione limitata in $(-\infty, \infty)$ il Conti ha dimostrato un interessante teorema, che nella sua forma più generale ha il seguente enunciato (2):

Condizione sufficiente perchè una successione di funzioni (1), *definite nell'intervallo* $(-\infty, \infty)$ *e a variazione limitata, converga ivi uniformemente verso una funzione* $f(x)$ *a variazione limitata è che valgano per ogni valore di* x *le* (2), *ed inoltre che sia*

$$\lim V_{-\infty}^{\infty}(f_n) = V_{-\infty}^{\infty}(f) \tag{4}$$

dove $V_{-\infty}^{\infty}(f)$ indica la variazione totale in $(-\infty, \infty)$ della funzione $f(x)$.

Il confronto tra i due teoremi mostra che le condizioni (2) e (4), relative al secondo, si possono considerare le naturali estensioni, al caso delle funzioni a variazione limitata, delle condizioni (2) e (3), relative al primo teorema; senonchè, mentre le condizioni (2) e (3) sono, oltre che sufficienti, anche neces-

(*) Nella seduta del 12 febbraio 1949.

(1) Dovuto al CANTELLI (*Sulla determinazione empirica delle leggi di probabilità*, « Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari », luglio 1933), nel caso generale sopra considerato di una funzione $f(x)$ monotona, considerando cioè pure gli intorni dei punti di discontinuità. Il PÓLYA (*Ueber den zentralen Grenwertsatz* etc.; « Matematische Zeitschrift », 1920) aveva considerato già il caso particolare di una funzione limite continua. L'osservazione, evidente, della necessarietà della condizione è del Fréchet (*Recherches théoriques modernes sur la théorie des probabilités*. I^er^ livre, Paris, 1937).

(2) R. CONTI, *Estensione alle successioni di funzioni a variazione limitata di un criterio di Pólya Cantelli per la convergenza uniforme su intervalli infiniti*. « Atti dell'Accad. Naz. dei Lincei », ser. 8ª, vol. IV, 1948.

sarie per la convergenza uniforme – e ciò risulta immediato – le condizioni (2) e (4) sono solo sufficienti. Ciò si può dimostrare con un facile esempio: sia $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ una funzione, definita nell'intervallo $(0, 1)$, la quale per $x = r/2n^2$ $(r = 2, 4, \cdots, 2n^2)$ assuma il valore 0, per $x = r/2n^2$ $(r = 1, 3, \cdots, 2n^2 - 1)$ assuma il valore $\frac{1}{n}$, e in ciascun tratto vari linearmente tra i valori estremi. Si ha $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = 0$, e la convergenza è uniforme nell'intervallo $(-\infty, \infty)$, pur non soddisfacendo, la successione considerata, alla condizione (4), in quanto $V_0^1(f_n) = 2n^2 \cdot \frac{1}{n} = 2n$, mentre $V_0^1(f) = 0$.

Lo scopo di questa Nota è:

a) nei paragrafi 2 e 3, di porre in evidenza come, sotto altra ipotesi, da sostituire alla (4), si ottenga una condizione non solo sufficiente, ma anche necessaria per la convergenza uniforme di una successione di funzioni a variazione limitata in $(-\infty, \infty)$;

b) nei paragrafi 4 e 5, di generalizzare la condizione necessaria e sufficiente alle funzioni di due variabili che, oltre ad essere a variazione doppia finita secondo il Tonelli [3], siano anche a variazione limitata su una parallela all'asse delle x e su una parallela all'asse delle y [4], funzioni che chiameremo semplicemente a variazione doppia finita ristretta, e, in particolare, alle funzioni di ripartizione a due variabili, cioè tali che se $\Delta x > 0$, $\Delta y > 0$, il valore

$$(5) \qquad \Delta f(x, y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y)$$

risulti non negativo.

2. Con riferimento al punto *a*) del 1° paragrafo, dimostriamo che:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una successione di funzioni (1), *definite nell'intervallo* $(-\infty, \infty)$ *e a variazione limitata, converga ivi uniformemente verso una funzione* $f(x)$ *a variazione limitata è che valgano le* (2) *e che sia*

$$(6) \qquad V_{(-\infty)}^{(\infty)}(f_\infty) = V_{-\infty}^{\infty}(f),$$

dove il primo membro, che chiameremo *variazione totale limite in* $(-\infty, \infty)$ *della successione* $f_n(x)$, rappresenta il valore di cui ora diremo: considerati la funzione $f_n(x)$ e l'intervallo (α, β), determiniamo l'estremo superiore dei valori $|\Delta f_n| = |f_n(y) - f_n(x)|$ relativi alle coppie x, y tali che $\alpha \leq x < y \leq \beta$, e indichiamolo con $\operatorname{extr\,sup}_{(\alpha,\beta)} |\Delta f_n|$; poniamo inoltre

$$(7) \qquad \begin{cases} \operatorname{extr\,sup}_{(\alpha-,\beta)} |\Delta f_n| = \lim_{\varepsilon\to 0} \operatorname{extr\,sup}_{(\alpha-\varepsilon,\beta)} |\Delta f_n| \ (\varepsilon > 0), \text{ ecc.;} \\ \operatorname{extr\,sup}_{(-\infty,\beta)} |\Delta f_n| = \lim_{\alpha\to-\infty} \operatorname{extr\,sup}_{(\alpha,\beta)} |\Delta f_n|, \text{ ecc.;} \end{cases}$$

(3) Cfr. L. Tonelli, *Serie trigonometriche* (Zanichelli, Bologna, 1928), pp. 470-472. La definizione, equivalente a quella di funzione a variazione limitata di Vitali, Lebesgue, ecc., si estende al caso di funzioni definite in tutto il piano.

(4) Questa condizione porta come conseguenza che le funzioni considerate sono a variazione limitata su ogni parallela all'asse delle x o delle y (cfr. loc. cit. (3)) e anche su ogni retta.

indichiamo convenzionalmente con α' quello dei simboli $\alpha-$, α, $\alpha+$ e con β' quello dei simboli $\beta-$, β, $\beta+$ che intenderemo considerare, nel 1° membro della (7), come estremi o, in particolare, i valori $-\infty$, $+\infty$; poniamo pure, convenzionalmente, $\alpha-<\alpha<\alpha+$ e, in ogni caso, $a'<b'$ se $a<b$; indichiamo inoltre con $\overline{\lim}_{n\to\infty}\ \underset{(\alpha',\beta')}{\text{extr sup}}\,|\Delta f_n|$ il massimo limite, per $n\to\infty$, dell'estremo superiore sopra definito.

Considerato ora un intervallo (a', b'), finito o no, suddividiamolo in un numero qualsiasi m di intervalli mediante i punti di suddivisione

$$a' = \alpha'_1 < \alpha'_2 < \cdots < \alpha'_{m+1} = b',$$

calcoliamo la somma

$$\sum_{i=1}^{m} \overline{\lim}_{n\to\infty}\ \underset{(\alpha'_i,\,\alpha'_{i+1})}{\text{extr sup}}\,|\Delta f_n| \tag{8}$$

e determiniamone l'estremo superiore, relativo alle possibili suddivisioni dell'intervallo (a', b'),

$$\mathrm{V}_{a'}^{b'}(f_\infty) = \underset{(a',\,b')}{\text{extr sup}} \sum_{i=1}^{m} \overline{\lim}_{n\to\infty}\ \underset{(\alpha'_i,\,\alpha'_{i+1})}{\text{extr sup}}\,|\Delta f_n|. \tag{9}$$

Ove si consideri esplicitamente il valore indicato con a' o con b', per esempio il valore $b-$ (o il valore ∞), useremo la notazione $\mathrm{V}_{a'}^{(b-)}(f_\infty)$, (o la notazione $\mathrm{V}_{a'}^{(\infty)}(f_\infty)$) in luogo di $\mathrm{V}_{a'}^{b'}(f_\infty)$, allo scopo di distinguerla dalla notazione $\mathrm{V}_{a'}^{b-}(f_\infty)$ (oppure $\mathrm{V}_{a'}^{\infty}(f_\infty)$) che useremo per indicare $\lim_{\varepsilon\to 0} \mathrm{V}_{a'}^{b-\varepsilon}(f_\infty)$, $\varepsilon>0$ (oppure $\lim_{b\to+\infty} \mathrm{V}_{a'}^{b}(f_\infty)$).

Ciò premesso, il primo membro della (6) è dato dal valore della (9), per $a'=-\infty$, $b'=+\infty$.

3. La dimostrazione si ottiene mediante i seguenti teoremi, che per brevità enunciamo solamente, in quanto nel paragrafo 5 dimostriamo il caso analogo delle funzioni di due variabili.

A) La funzione $\mathrm{V}_{a'}^{i'}(f_\infty)$ è una funzione additiva d'intervallo; si ha, cioè, per $a'<b'<c'$,

$$\mathrm{V}_{a'}^{c'} = \mathrm{V}_{a'}^{b'} + \mathrm{V}_{b'}^{c'}. \tag{10}$$

B) Se valgono le (2), allora per qualsiasi coppia di numeri reali a, b si ha

$$\mathrm{V}_{a}^{b}(f) \leq \mathrm{V}_{a}^{b}(f_\infty) \quad ; \quad \mathrm{V}_{a-}^{b+}(f) \leq \mathrm{V}_{(a-)}^{(b+)}(f_\infty); \quad \text{ecc.} \tag{11}$$

C) Se valgono le (2) e la (6), è

$$\mathrm{V}_{a}^{b}(f) = \mathrm{V}_{a}^{b}(f_\infty) \quad ; \quad \mathrm{V}_{a+}^{b-}(f) = \mathrm{V}_{(a+)}^{(b-)}(f_\infty) = \mathrm{V}_{a+}^{b-}(f_\infty); \quad \text{ecc.} \tag{12}$$

D) Le condizioni (2) e (6) sono sufficienti e necessarie per la convergenza uniforme in $(-\infty, \infty)$ della successione $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ verso la funzione $f(x)$ a variazione limitata in $(-\infty, \infty)$.

4. Con riferimento al punto *b*) del 1° paragrafo, dimostriamo che:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una successione di funzioni $f_n(x,y)$, $n = 1, 2, \cdots$, *ciascuna definita in tutto il piano* (x,y) *e ivi a variazione doppia finita ristretta, converga, per* $n \to \infty$, *uniformemente in tutto il piano, verso una funzione* $f(x,y)$ *a variazione doppia finita ristretta, è che, per* $n \to \infty$ *e per qualunque coppia di valori* x, y, *si abbia*

$$(2') \qquad \lim f_n(x,y) = f(x,y) \quad ; \quad \lim f_n(x,y+) = f(x,y+) \quad ;$$
$$\lim f_n(x+,y+) = f(x+,y+); \quad \text{ecc.}$$

e che sia

$$(6') \qquad V^{(\infty)\,(\infty)}_{(-\infty)\,(-\infty)}(f_\infty) = V^{\infty\,\infty}_{-\infty\,-\infty}(f),$$

dove il 2° membro rappresenta la variazione totale nel piano di $f(x,y)$ e il 1° membro la variazione totale limite nel piano della successione $f_n(x,y)$, ottenuta, analogamente al caso di una variabile, come segue.

Consideriamo il rettangolo, avente due lati paralleli all'asse delle y e di ascissa a_1, a_2 e due lati paralleli all'asse delle x e di ordinata α_1, α_2; determiniamo l'estremo superiore dei moduli $|\Delta f_n|$ dei valori (5) relativi a punti appartenenti al rettangolo considerato, e indichiamolo con $\operatorname{extr\,sup}_{(a_1, a_2\,;\,\alpha_1, \alpha_2)} |\Delta f_n|$; poniamo inoltre

$$(7') \qquad \operatorname{extr\,sup}_{(a_1-, a_2\,;\,\alpha_1, \alpha_2)} |\Delta f_n| = \lim_{\varepsilon \to 0} \operatorname{extr\,sup}_{(a_1-\varepsilon, a_2\,;\,\alpha_1, \alpha_2)} |\Delta f_n| \ (\varepsilon > 0), \quad \text{ecc.};$$

indichiamo convenzionalmente con a' quello dei valori $a-, a, a+$ che intenderemo considerare; consideriamo inoltre il massimo limite, per $n \to \infty$, dell'estremo superiore ora definito. Suddividiamo il rettangolo $a' \leq x \leq b'$; $\alpha' \leq y \leq \beta'$ in un numero finito qualsiasi di parti mediante un sistema di rette parallele all'asse delle y, di ascisse $a' = a'_1 < a'_2 < \cdots < a'_{m+1} = b'$ e un sistema di rette parallele all'asse delle x, di ordinate $\alpha' = \alpha'_1 < \alpha'_2 < \cdots < \alpha'_{p+1} = \beta'$, e calcoliamo l'estremo superiore

$$(9') \qquad V^{b'\,\beta'}_{a'\,\alpha'}(f_\infty) = \operatorname{extr\,sup}_{(a', b'\,;\,\alpha', \beta')} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{p} \overline{\lim_{n \to \infty}} \operatorname{extr\,sup}_{\left(a'_i, a'_{i+1}\,;\,\alpha'_j, \alpha'_{j+1}\right)} |\Delta f_n|$$

relativo alle possibili suddivisioni in parti. Il 1° membro della (6') è il valore (9') per $a' = \alpha' = -\infty$, $b' = \beta' = +\infty$.

Se le $f_n(x,y)$ sono delle funzioni di ripartizione, si ottiene la estensione del teorema di Cantelli, riportato nel paragrafo 1, al caso delle funzioni di due variabili, riducendosi la condizione (6') alla condizione

$$(3') \qquad \lim_{n \to \infty} f_n(-\infty, -\infty) = f(-\infty, -\infty) \quad ;$$
$$\lim_{n \to \infty} f_n(-\infty, x) = f(-\infty, x); \quad \text{ecc.}$$

5. La dimostrazione si ottiene mediante i seguenti teoremi:

A) *La funzione* $V^{b'\,\beta'}_{a'\,\alpha'}(f_\infty)$, *ove esista finita, è una funzione additiva d'insieme*; si ha, cioè, per esempio,

$$(10') \qquad V^{c'\,\beta'}_{a'\,\alpha'} = V^{b'\,\beta'}_{a'\,\alpha'} + V^{c'\,\beta'}_{b'\,\alpha'} \quad \text{per} \quad a' < b' < c'.$$

La proprietà, valida pure nel caso di estremi infiniti, discende dalla definizione (9′) della funzione considerata.

B) Se valgono le (2′), *allora, per qualsiasi quaterna di numeri reali* $a, b; \alpha, \beta$, *finiti o no, si ha*

$$(11') \qquad V_{a\alpha}^{b\beta}(f) \leq V_{a\alpha}^{b\beta}(f_\infty) \quad ; \quad V_{a-,\alpha}^{b\beta}(f) \leq V_{(a-),\alpha}^{b\beta}(f_\infty); \quad \text{ecc.}$$

Infatti, per una qualsiasi suddivisione del rettangolo $a \leq x \leq b$, $\alpha \leq y \leq \beta$ in parti rettangolari, con i punti di divisione $a = a_1 < a_2 < \cdots < a_{m+1} = b$, $\alpha = \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_{m+1} = \beta$, si può scrivere, in base alla (2′),

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p} |\Delta f(a_i\,\alpha_j)| = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p} \lim_{n\to\infty} |\Delta f_n(a_i\,\alpha_j)|;$$

essendo $|\Delta f_n(a_i\,\alpha_j)| \leq \underset{(a_i\,,\,a_{i+1}\,;\,\alpha_j\,,\,\alpha_{j+1})}{\text{extr sup}} |\Delta f_n|$, si ricava

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p} |\Delta f(a_i\,\alpha_j)| \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p} \overline{\lim_{n\to\infty}} \underset{(a_i\,,\,a_{i+1}\,;\,\alpha_j\,,\,\alpha_{j+1})}{\text{extr sup}} |\Delta f_n|,$$

e quindi, a causa della (9′),

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p} |\Delta f(a_i\,\alpha_j)| \leq V_{a\alpha}^{b\beta}(f_\infty).$$

Si dimostra pertanto la prima delle (11′), rappresentando $V_{a\alpha}^{b\beta}(f)$ l'estremo superiore dei valori del 1° membro della disuguaglianza sopra scritta.

In modo analogo si dimostrano le altre.

C) Se valgono le (2′) *e la* (6′), *è*

$$(12') \qquad V_{a\alpha}^{b\beta}(f) = V_{a\alpha}^{b\beta}(f_\infty) \quad ; \quad V_{a+,\alpha}^{b-,\beta}(f) = V_{(a+)\alpha}^{(b-)\beta}(f_\infty) = V_{a+,\alpha}^{b-,\beta}(f_\infty); \quad \text{ecc.}$$

per qualsiasi quaterna di valori reali $a, \alpha; b, \beta$, *finiti o no.*

Infatti, per la (10′), si ha

$$(13) \quad \begin{cases} V_{(-\infty)(-\infty)}^{(\infty)(\infty)}(f_\infty) = V_{(-\infty)(-\infty)}^{a\,(\infty)}(f_\infty) + V_{a\,(-\infty)}^{b\,\alpha}(f_\infty) + V_{a\beta}^{b\beta}(f_\infty) + \\ \qquad + V_{a\,\beta}^{b\,(\infty)}(f_\infty) + V_{b\,(-\infty)}^{(\infty)(\infty)}(f_\infty) \\ V_{-\infty-\infty}^{\infty\,\infty}(f) = V_{-\infty-\infty}^{a\,\infty}(f) + V_{a-\infty}^{b\,\alpha}(f) + V_{a\alpha}^{b\beta}(f) + V_{a\,\beta}^{b\,\infty}(f) + \\ \qquad + V_{b-\infty}^{\infty\,\infty}(f); \end{cases}$$

inoltre, per le (11′), ciascuno dei termini del 2° membro della 2ª relazione (13) è minore o eguale al corrispondente della 1ª relazione (13); pertanto dall'eguaglianza dei primi membri delle (13) segue l'uguaglianza dei corrispondenti termini dei secondi membri e quindi, in particolare, segue la prima delle (12′). In modo analogo si dimostrano le altre.

D) Le condizioni (2′) *e* (6′) *sono sufficienti per la convergenza uniforme in tutto il piano* (x, y) *della successione* $f_n(x, y)$, $(n = 1, 2, \cdots)$ *verso* $f(x, y)$.

Infatti, prefissiamo un valore positivo ε ad arbitrio; consideriamo inoltre la funzione, di x, y, $V^{x}_{(-\infty)}{}^{y}_{(-\infty)}(f_\infty)$. Essendo per ipotesi $V^{(\infty)}_{(-\infty)}{}^{(\infty)}_{(-\infty)}(f_\infty)$ un valore finito, possiamo determinare una quaterna di valori $a, b; \alpha, \beta$ tali che

$$(14)\qquad \begin{aligned} &V^{a-}_{(-\infty)}{}^{(\infty)}_{(-\infty)}(f_\infty) < \varepsilon \quad ; \quad V^{(\infty)}_{b+,(-\infty)}{}^{(\infty)}_{(-\infty)}(f_\infty) < \varepsilon \quad ; \\ &- V^{(\infty)}_{(-\infty)}{}^{\alpha-}_{(-\infty)}(f_\infty) < \varepsilon \quad ; \quad V^{(\infty)}_{(-\infty)}{}^{(\infty)}_{\beta+}(f_\infty) < \varepsilon . \end{aligned}$$

Consideriamo la successione $x_1, x_2, \cdots$ dei punti di discontinuità di $V^{x}_{(-\infty)}{}^{\beta}_{(-\infty)}(f_\infty)$ in $a \leqq x \leqq b$; la corrispondente serie dei valori dei salti è convergente e pertanto possiamo determinare un indice r_0 tale che la somma della serie dei salti relativi ai punti $x_{r_0+1}, x_{r_0+2}, \cdots$ sia minore di ε.

Suddividiamo il rettangolo $(a, b; \alpha, \beta)$ in un numero finito di rettangoli, con i lati paralleli all'asse delle y, mediante i punti di suddivisione $a = a_1 < a_2 < \cdots < a_{s+1} = b$ della x, costituiti dai valori $x_1, \cdots, x_r$ ed eventualmente da altri, in modo che per ciascun rettangolo sia

$$(15)\qquad V^{a_{i+1}-,\beta}_{a_i+,\ \alpha}(f_\infty) = V^{(a_{i+1}-)\ \beta}_{(a_i+)\ \alpha}(f_\infty) < \varepsilon .$$

Inoltre, in base alle (2'), determiniamo un indice n'_0 tale che per $n \geqq n'_0$ valgano le disuguaglianze

$$(16)\qquad |f_n(a_i \pm, \alpha_j) - f(a_i \pm, \alpha_j)| < \varepsilon , \qquad i = 1, 2, \cdots, s+1 \; ; \; j = 1, 2,$$

avendo posto $\alpha_1 = \alpha \; ; \; \alpha_2 = \beta$.

Si può inoltre determinare un indice n''_0 tale che per $n \geqq n''_0$ valgano le disuguaglianze

$$\operatorname*{extr\,sup}_{(a_i+,\, a_{i+1}-;\, \alpha_j,\, \alpha_{j+1})} |\Delta f_n| \leqq \overline{\lim_{n\to\infty}} \operatorname*{extr\,sup}_{(a_i+,\, a_{i+1}-;\, \alpha_j,\, \alpha_{j+1})} |\Delta f_n| + \varepsilon ,$$

avendo posto $a_0 = \alpha_0 = -\infty$, $a_{s+2} = \alpha_3 = +\infty$, e quindi, per le (9'), (12'), (14) e (15),

$$(17)\qquad \begin{cases} \operatorname*{extr\,sup}_{(a_i+,\, a_{i+1}-;\, \alpha_j,\, \alpha_{j+1})} |\Delta f_n| \leqq V^{a_{i+1}-\ \alpha_{j+1}}_{a_i+\ \ \alpha_j}(f_\infty) + \varepsilon < 2\varepsilon \\ \operatorname*{extr\,sup}_{(a_i+,\, a_{i+1}-;\, \alpha_j,\, \alpha_{j+1})} |\Delta f| \leqq V^{a_{i+1}-\ \alpha_{j+1}}_{a_i+\ \ \alpha_j}(f) < \varepsilon . \end{cases}$$

Inoltre, dato che ciascuna delle funzioni a una variabile $f_n(a_i, y)$, $i = 1, 2, \cdots, s+1$; $f_n(x, \alpha_j)$, $j = 1, 2$, converge, per $n \to \infty$, rispettivamente verso $f(a_i, y)$, $f(x, \alpha_j)$, uniformemente su tutta la retta y, o la retta x, si può determinare un indice n'''_0 tale che per $n \geqq n'''_0$ e qualunque sia y o sia x, sia

$$(18)\qquad |f_n(a_i, y) - f(a_i, y)| < \varepsilon \quad ; \quad |f_n(x, \alpha_j) - f(x, \alpha_j)| < \varepsilon .$$

Indichiamo con n_0 il più grande dei numeri n'_0, n''_0, n'''_0; possiamo ora dimostrare che, in relazione al valore $\varepsilon > 0$ prefissato ad arbitrio, si ha, per qualsiasi valore di x, y e per $n \geqq n_0$,

$$(19)\qquad |f_n(x, y) - f(x, y)| < 4\varepsilon ,$$

dimostrando così l'uniforme convergenza di $f_n(x,y)$ verso $f(x,y)$ in tutto il piano (x,y).

Se (x,y) appartiene a una delle rette $x = a_i$, oppure $y = \alpha_j$, la validità della (19) rientra nelle (18); se (x,y) è un punto interno a uno dei rettangoli, per esempio $(a_i, a_{i+1}; \alpha_j, \alpha_{j+1})$ $(i = 0, 1, \cdots, s+1; j = 0, 1, 2)$, la validità della (19) segue dalle (16), (17) e dalle evidenti disuguaglianze

$$f_n(a_i+, \alpha_j+) - \operatorname*{extr\,sup}_{(a_i+,\, a_{i+1}-;\, \alpha_j+,\, \alpha_{j+1}-)} |\Delta f_n| \leq f_n(x,y) \leq$$

$$\leq f_n(a_{i+1}-, \alpha_{j+1}-) + \operatorname*{extr\,sup}_{(a_i+,\, a_{i+1}-;\, \alpha_j+,\, \alpha_{j+1}-)} |\Delta f_n|;$$

$$f(a_i+, \alpha_j+) - \operatorname*{extr\,sup}_{(a_i+,\, a_{i+1}-;\, \alpha_j+,\, \alpha_{j+1}-)} |\Delta f| \leq f(x,y) \leq$$

$$\leq f(a_{i+1}-, \alpha_{j+1}-) + \operatorname*{extr\,sup}_{(a_i+,\, a_{i+1}-;\, \alpha_j+,\, \alpha_{j+1}-)} |\Delta f|$$

E) Le condizioni (2′) *e* (6′) *sono necessarie per la convergenza uniforme di* $f_n(x,y)$ *verso la* $f(x,y)$ *a variazione doppia finita ristretta.*

Consideriamo un qualsiasi rettangolo $(a,b;\alpha,\beta)$, limitato o no, e dimostriamo in primo luogo che si ha

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \operatorname*{extr\,sup}_{(a,b;\alpha,\beta)} |\Delta f_n| \leq V_{a\alpha}^{b\beta}(f). \tag{20}$$

Infatti si può estrarre una successione di indici n_i, $i = 1, 2, \cdots$, tale che

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \operatorname*{extr\,sup}_{(a,b;\alpha,\beta)} |\Delta f_n| = \lim_{i\to\infty} \operatorname*{extr\,sup}_{(a,b;\alpha,\beta)} |\Delta f_{n_i}|; \tag{21}$$

a ciascun indice n_i si può far corrispondere quattro valori $x_i, x_i'; y_i, y_i'$ tali che

$$\lim_{i\to\infty} \operatorname*{extr\,sup}_{(a,b;\alpha,\beta)} |\Delta f_{n_i}| = \lim_{i\to\infty} |f_{n_i}(x_i' y_i') - f_{n_i}(x_i y_i') - f_{n_i}(x_i' y_i) + f_{n_i}(x_i, y_i)|; \tag{22}$$

dalla successione n_i, $i = 1, 2, \cdots$, si può estrarre una nuova successione n_{i_j}, $j = 1, 2, \cdots$, tale che ognuna delle successioni $x_{i_j}, x_{i_j}', y_{i_j}, y_{i_j}'$ sia monotona, per esempio decrescente, e quindi ammetta per $j \to \infty$ un limite determinato, che indichiamo rispettivamente con x_0, x_0', y_0, y_0'.

Poichè per ipotesi $f_n(x,y)$ tende verso $f(x,y)$, per $n \to \infty$, uniformemente nel piano, il secondo membro della (22) è uguale a

$$|f(x_0'+, y_0'+) - f(x_0+, y_0'+) - f(x_0'+, y_0+) + f(x_0+, y_0+)| \leq V_{a\alpha}^{b\beta}(f). \tag{23}$$

Le (21), (22), (23) dimostrano la (20), la quale vale pure nel caso di estremi $a' = a-, a+$.

Tenute ora presenti la (9′) e la (20), si ricava la disuguaglianza

$$V_{(-\infty)(-\infty)}^{(\infty)(\infty)}(f_\infty) \leq V_{-\infty-\infty}^{\infty\infty}(f),$$

e quindi la relazione (6′), a causa della disuguaglianza contraria (11′).

Le relazioni (2′) sono una conseguenza immediata della convergenza uniforme.

Equazioni differenziali. — *Una proprietà che caratterizza l'unicità della soluzione delle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine* (*). Nota di UGO BARBUTI, presentata (**) dal Corrisp. G. SANSONE.

1. Sulle condizioni sufficienti per la unicità (1) della soluzione della equazione:

$$y' = F(x, y) \tag{1}$$

nel problema di Cauchy, si sono più o meno diffusamente fermati vari autori.

Si conosce pure un teorema che assegna una condizione necessaria e sufficiente, dovuto a T. Yosie (2). Questa proposizione, che si enuncia facendo uso dei numeri derivati, è provata nell'ipotesi che il secondo membro della (1) sia superficialmente continuo.

In questa Nota, supponendo, per la (1) soddisfatte le ipotesi esistenziali nell'indirizzo di C. Caratheodory, indico alcune proprietà che conducono a caratterizzare l'unicità della soluzione della (1). Nel caso della continuità della $F(x, y)$ esse servono a caratterizzare anche l'integrale superiore e inferiore.

La dimostrazione di queste proposizioni si consegue in modo molto semplice, utilizzando un teorema di confronto di E. Baiada (3); la loro utilità, oltre al loro valore intrinseco, sta nel fatto che ad esse devono, naturalmente, ricondursi tutte le condizioni sufficienti e quindi forniscono un mezzo di verifica per la validità di quest'ultime e di qualunque teorema di confronto.

2. Sia $F(x, y)$ una funzione definita nel campo

$$S: \qquad a \leq x \leq b \quad ; \quad -\infty < y < +\infty$$

e tale che, fissato un punto $(\bar{x}, \bar{y})$ di S, le funzioni $F(x, \bar{y})$, $F(\bar{x}, y)$ resultino: la prima misurabile (nel senso di Lebesgue) in (a, b), la seconda continua. Esista inoltre una funzione non negativa $M(x)$, sommabile (nel senso di Lebesgue), e sia:

$$|F(x, y)| \leq M(x).$$

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della Scuola Normale Superiore, in Pisa, nell'anno accademico 1947–48.

(**) Nella seduta del 12 marzo 1949.

(1) Per i teoremi esistenziali, i criteri di unicità ed una interessante bibliografia, ved. G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, par. 2ª (Zanichelli, Bologna, 1941), p. 129: pp. 85–104; p. 134.

(2) T. YOSIE, *Über die Unität etc.* « Japanese Jornal of Mathematics » (1926), pp. 161–175.

(3) E. BAIADA, *Confronto e dipendenza dai parametri ecc.* « Rend. Acc. Linc. », ser. VIII, vol. 3° (1947), pp. 258–271. Vedere anche F. CAFIERO, *Su due teoremi di confronto ecc.* « Boll. Un. Matem. », ser. III, anno 3°, n. 2 (1948), pp. 124–128.

In queste ipotesi fissato un punto $P^o = (x^o, y^o)$ di S, si sa che esiste *almeno* una funzione $y = f(x)$, assolutamente continua, che verifica per ogni x di (a, b) l'equazione

$$(2) \qquad f(x) = y^o + \int_{x^o}^{x} F(t, f(t))\, dt$$

e quindi in quasi tutto (a, b) la (1) con la condizione: $f(x^o) = y^o$.

In queste ipotesi vale anche il seguente teorema di confronto [3]:

Se $y(x)$ è continua e soddisfa la disuguaglianza:

$$(3) \qquad \int_{\xi}^{x} F(t, y(t))\, dt \geqq y(x) - y(\xi)$$

con $x^o \leqq \xi \leqq x \leqq b$, allora esiste almeno *una soluzione della* (2): *$g(x)$, che verifica in tutto (x^o, b) la disuguaglianza:*

$$g(x) \geqq y(x).$$

3. *Sia $y = f(x)$ soluzione della* (2). *Se esiste un'altra soluzione della* (2) *$y = g(x)$, per cui sia in qualche punto di (x^o, b) $g(x) > f(x)$, allora potremo sempre costruire una nuova soluzione $y = \bar{g}(x)$ della* (2) *che soddisfi in tutto (x^o, b) la disuguaglianza $\bar{g}(x) \geqq f(x)$.*

In vero l'insieme dei punti x in cui è $g(x) = f(x)$ è chiuso, perciò si compone di un insieme perfetto P più un insieme numerabile N. Si consideri allora la funzione $\bar{g}(x)$ così definita in (x^o, b):

$$\bar{g}(x) = \text{Max}\,(g(x), f(x)) \quad \text{se} \quad x \in \text{CP}\ [4],$$
$$\bar{g}(x) = g(x) = f(x) \quad \text{se} \quad x \in \text{P}.$$

La funzione $\bar{g}(x)$, $(\geqq f(x))$, $(g(x^o) = y^o)$ è assolutamente continua e soddisfa ancora la (2).

Scelto infatti un $\varepsilon > 0$ potremo determinare, in virtù della assoluta continuità delle funzioni $g(x)$ ed $f(x)$ in (x^o, b), un $\delta > 0$ in modo che se (a_i, b_i), $(i = 1, 2, \cdots, m)$, è un gruppo *qualsiasi* di intervalli non sovrapponentisi di (x^o, b), per i quali è $\sum_1^m |b_i - a_i| < \delta$, sia anche:

$$(4) \qquad \sum_1^m |f(b_i) - f(a_i)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad , \quad \sum_1^m |g(b_i) - g(a_i)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nei due punti a_i, b_i, o $g(a_i) \geqq f(a_i)$ e $g(b_i) \geqq f(b_i)$, oppure $f(a_i) \geqq g(a_i)$ e $f(b_i) \geqq g(b_i)$ e allora

$$(5) \qquad |\bar{g}(b_i) - \bar{g}(a_i)| = |g(b_i) - g(a_i)|, \text{ oppure } = |f(b_i) - f(a_i)|,$$

(4) La notazione $x \in \text{CP}$ significa che x appartiene al complementare di P rispetto all'intervallo (x^o, b).

e questo termine si trova in una delle due somme nelle (4); o si ha $g(a_i) > f(a_i)$ e $g(b_i) < f(b_i)$, oppure $g(a_i) < f(a_i)$ e $g(b_i) > f(b_i)$. In questi due casi esiste almeno un punto x_i interno all'intervallo (a_i, b_i) in cui $g(x_i) = f(x_i)$.

Valgano, per fissare le idee, le prime due disuguaglianze precedenti, si ha $\bar{g}(b_i) - \bar{g}(a_i) = f(b_i) - g(a_i) = f(b_i) - f(x_i) + g(x_i) - g(a_i)$ e passando ai valori assoluti:

$$|\bar{g}(b_i) - \bar{g}(a_i)| \leq |f(b_i) - f(x_i)| + |g(x_i) - g(a_i)| . \tag{6}$$

Poichè è $|x_i - a_i| + |b_i - x_i| = |b_i - a_i|$, si ha che il complesso degli intervalli (a_i, b_i) più quelli ottenuti da questi intercalando gli eventuali punti x_i, hanno una lunghezza totale minore di δ, onde il gruppo di questi intervalli è tale che per essi la $f(x)$ e la $g(x)$ soddisfano ancora alle (4), per cui sommando membro a membro le (4) relativamente a questo gruppo di intervalli e tenendo presente le (5) e (6), si ha:

$$\sum_{1}^{m} |\bar{g}(b_i) - \bar{g}(a_i) < \varepsilon ,$$

da cui l'assoluta continuità [5] di $\bar{g}(x)$ in (x^0, b).

Per provare che $\bar{g}(x)$ soddisfa alla (2) in (x^0, b) basterà mostrare che essa soddisfa alla (1) salvo i punti di un insieme di misura nulla. Per questo si osservi che $\bar{g}(x)$ possiede intanto, per l'assoluta continuità, derivata in quasi tutto (x^0, b). Tolti i punti in cui $\bar{g}(x)$ manca della derivata, i punti in cui le funzioni $g(x)$ e $f(x)$ non soddisfano alla (1) e i punti dell'insieme N, insieme complessivo di misura nulla, in ogni altro punto la derivata di $\bar{g}(x)$ coincide con la derivata di una delle due funzioni $g(x)$ od $f(x)$ (se $x \in CP$) o con entrambe (se $x \in P$), e poichè queste soddisfano alla (1) ne viene l'asserto.

4. Sia, ancora, $y = f(x)$ soluzione della (2) e sia $y = \Delta(x)$ una funzione definita in (x^0, b) $(a \leq x^0 < b)$ e soddisfacente alle ipotesi (i): *sia non negativa (ma non identicamente nulla); assolutamente continua;* $\Delta(x^0) = 0$.

Vale allora il seguente:

Teorema A. – *Condizione necessaria e sufficiente affinchè ogni soluzione della* (2) $g(x)$, *distinta dalla* $f(x)$, *soddisfi la disuguaglianza* [6]:

$$g(x) \leq f(x) \quad ; \quad (x^0 \leq x \leq b) \tag{7}$$

è che per ogni $\Delta(x)$ *soddisfacente alle ipotesi* (i) *si possa trovare una coppia di numeri* (λ, l), *almeno,* $(x^0 \leq \lambda < l \leq b)$, *in modo che sia:*

$$\int_{\lambda}^{l} [F(t, f(t) + \Delta(t)) - F(t, f(t))]\, dt < \Delta(l) - \Delta(\lambda) . \tag{8}$$

(5) Cfr. L. Tonelli, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni* (Zanichelli, Bologna), vol. I, p. 63.

(6) Un teorema analogo vale sostituendo alla (7) la disuguaglianza $g(x) \geq f(x)$ $(x^0 \leq x \leq b)$, purchè si inverta il senso della disuguaglianza (8) e si cambi $\Delta(x)$ in $-\Delta(x)$. Teoremi analoghi si possono enunciare a sinistra di x^0.

La condizione è sufficiente. Supponiamo esista una soluzione della (2) $g(x)$, distinta da $f(x)$, che non soddisfi la (7), potremo supporre per i risultati del n. 3 $g(x) \geqq f(x)$, e, posto $\Delta(x) = g(x) - f(x)$, la funzione $\Delta(x)$ soddisfa alle ipotesi (i) ed esisterà per essa un intervallo (λ, l) per cui è, per la (2) e la (8):

$$\Delta(l) = g(l) - f(l) = \int_{x^0}^{l} [F(t, f(t) + \Delta(t)) - F(t, f(t))]\, dt =$$

$$= \int_{x^0}^{\lambda} [F(t, f(t) + \Delta(t)) - F(t, f(t))]\, dt +$$

$$+ \int_{\lambda}^{l} [F(t, f(t) + \Delta(t)) - F(t, f(t))]\, dt < g(\lambda) - f(\lambda) + \Delta(l) - \Delta(\lambda) = \Delta(l),$$

ciò che è assurdo. La condizione (8) è anche necessaria. Per mostrare questa seconda parte del teorema, ammettiamo che ogni soluzione $g(x)$ della (2), distinta dalla $f(x)$, soddisfi la disuguaglianza (7) e supponiamo non vera la (8), vale a dire, ammettiamo esista una funzione $\bar{\Delta}(x)$ soddisfacente alle ipotesi (i), per la quale sia sempre:

$$\int_{\xi}^{x} [F(t, f(t) + \bar{\Delta}(t)) - F(t, f(t))]\, dt \geqq \bar{\Delta}(x) - \bar{\Delta}(\xi)$$

per ogni x e ξ tali che: $x^0 \leqq \xi \leqq x \leqq b$; quest'ultima dà allora:

$$\int_{\xi}^{x} F(t, f(t) + \bar{\Delta}(t))\, dt \geqq f(x) + \bar{\Delta}(x) - (f(\xi) + \bar{\Delta}(\xi)),$$

e confrontando questa con la (3), per il teorema di confronto del n. 2, si ha allora che esiste almeno una soluzione della (2) $g(x)$ che verifica per ogni x di (x^0, b) la disuguaglianza $g(x) \geqq f(x) + \bar{\Delta}(x)$, e poichè è $\bar{\Delta}(x) > 0$ in qualche punto x, in essi sarà anche $g(x) > f(x)$, il che contraddice la (7).

Ne segue il *Criterio generale d'unicità*:

TEOREMA B. – *Condizione necessaria e sufficiente affinchè* $y = f(x)$ *sia l'unico integrale della* (1), *uscente da* P^0, $(x^0 < b)$ *è che per ogni funzione* $\Delta(x)$, *soddisfacente alle ipotesi* (i), *si possano determinare due coppie di numeri, almeno,* (λ_i, l_i) *con* $x^0 \leqq \lambda_i < l_i \leqq b$, $(i = 1, 2)$, *per cui sia* (7):

$$(9) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{\lambda_1}^{l_1} [F(t, f(t) + \Delta(t)) - F(t, f(t))]\, dt < \Delta(l_1) - \Delta(\lambda_1) \\ \displaystyle\int_{\lambda_2}^{l_2} [F(t, f(t) - \Delta(t)) - F(t, f(t))]\, dt > -\Delta(l_2) + \Delta(\lambda_2). \end{cases}$$

(7) Un teorema analogo vale per gli integrali giungenti al punto P^0 $(x^0 > a)$.

5. Nel caso che $F(x, y)$ sia continua, la precedente proposizione può enunciarsi:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè $y = f(x)$ *sia l'unico integrale uscente da* P°, *è che per ogni funzione* $\Delta(x)$ *non negativa (ma non identicamente nulla),* $\Delta(x^0) = 0$, *dotata di derivata continua,* $\Delta'(x^0) = 0$, *si possa determinare una coppia di numeri, almeno,* x_1, x_2 *di* (x^0, b) *per cui sia* [7]:

$$(9') \qquad \begin{cases} F(x_1, f(x_1) + \Delta(x_1)) - F(x_1, f(x_1)) < \Delta'(x_1) \\ F(x_2, f(x_2) - \Delta(x_2)) - F(x_2, f(x_2)) > -\Delta'(x_2). \end{cases}$$

Per la equivalenza, in questo caso, delle (9) alle (9'), si osservi che dalle (9') discendono immediatamente, per la continuità ammessa per le funzioni $F(x, y), \Delta'(x)$, le (9). Viceversa dalle (9) discendono le (9'), perchè, se essendo soddisfatta, ad esempio, la prima delle (9), non esistesse nell'intervallo (λ_1, l_1) un punto x, almeno, in cui fosse verificata la prima delle (9') si avrebbe:

$$F(x, f(x) + \Delta(x)) - F(x, f(x)) \geq \Delta'(x) \quad ; \quad (\lambda_1 \leq x \leq l_1),$$

onde integrando sull'intervallo (λ_1, l_1) non potrebbe essere vera la prima delle (9).

Osserviamo, qui, che se solo la prima delle (9') è verificata $y = f(x)$ è *il massimo integrale* uscente da P°, se solo la seconda esso è *il minimo integrale* uscente da P° e viceversa. Proposizioni analoghe valgono per gli integrali giungenti in P°.

Vale anche notare che se la funzione $F(x, y)$ gode delle proprietà: $F(x, 0) = 0$, $F(x, y) = -F(x, -y)$, la sola condizione

$$F(x_1, \Delta(x_1)) < \Delta'(x_1)$$

che è la prima delle (9') *occorre e basta* a garantire la unicità della soluzione $y = 0$ per la origine. Ciò è ovvio per la simmetria della $F(x, y)$ rispetto all'asse x, ma risulta anche dall'osservare che la seconda delle (9') è in questo caso una conseguenza della prima.

6. Le disuguaglianze (9), (9') dànno un criterio generale atto a stabilire l'unicità di una data soluzione della (2). In pratica saranno da preferirsi i teoremi di confronto, per i quali, la conoscenza di funzioni maggioranti di comportamento noto, potrà evitarci il lavoro di verificare le (9) o le (9').

È tuttavia interessante *osservare* che la verifica delle (9'), ad esempio, è in qualche caso assai facile. Lo mostreremo nel seguente criterio che abbiamo provato in altra Nota [8] e che ci ha guidati alla formulazione dei teoremi su esposti. Questo teorema che contiene il criterio di Perron e quello di Peano è il seguente:

Se $F(x, y)$ *è continua in*

$$R: \qquad x^0 \leq x \leq x^0 + b \quad ; \quad |y - y^0| \leq \beta \ [9]$$

(8) U. Barbuti, *Sull'integrale massimo e minimo ecc.* « Rend. Acc. Linc. », ser. VIII, vol. 3° (1947), pp. 273–276. Avverto, rettificando, che in questa Nota le disuguaglianze che intervengono nei vari teoremi vanno invertite se questi si enunciano per i valori a sinistra del punto x^0.

(9) Nel seguito supporremo, solo per rimanere fedeli alle convenzioni relative al teorema di esistenza enunciato al n. 2, definita la $F(x, y)$ nella striscia: $x^0 \leq x \leq x^0 + b$, $-\infty < y < +\infty$, prolungandola col porre: $F(x, y) = F(x, y^0 + \beta)$ se $y > y^0 + \beta$ e $F(x, y) = F(x, y^0 - \beta)$ se $y < y^0 - \beta$ Con ciò la (10) rimane verificata in tutta la striscia.

e se soddisfa alla condizione:

$$(10) \qquad F(x, y_2) - F(x, y_1) \leq \frac{y_2 - y_1}{x - x^0} \quad ; \quad x^0 < x \leq x^0 + b$$

per ogni coppia di numeri y_1, y_2 *tali che* $y^0 - \beta \leq y_1 < y_2 \leq y^0 + \beta$, *allora esiste una sola soluzione della* (1) *uscente da* (x^0, y^0).

Sia $y = y(x)$ una qualunque funzione definita in $(x^0, x^0 + b)$ e ivi limitata. Si consideri una funzione $\Delta(x)$ soddisfacente alle ipotesi dette al n. 5 e si prenda in esame la funzione $\psi(x) = \dfrac{\Delta(x)}{x - x^0}$. Esisterà certo, almeno, un x_1 per cui è $\psi(x_1) < \Delta'(x_1)$ perchè se fosse sempre $\dfrac{\Delta(x)}{x - x^0} \geq \Delta'(x)$ si avrebbe:

$$\psi'(x) = \frac{1}{x - x^0}\left(-\frac{\Delta(x)}{x - x^0} + \Delta'(x)\right) \leq 0$$

per ogni $x > x^0$, onde, poichè $\psi(x) \to 0$ per $x \to x_0 + 0$ si avrebbe sempre $\psi(x) \leq 0$, cioè $\Delta(x) \leq 0$, ciò che non è.

Dunque avremo per questo valore di x, per la (10)

$$F(x_1, y(x_1) + \Delta(x_1)) - F(x_1, y(x_1)) \leq \frac{\Delta(x_1)}{x_1 - x^0} < \Delta'(x_1).$$

E poichè la (10) porta anche, cambiando di segno, alla disuguaglianza

$$F(x, y_1) - F(x, y_2) \geq \frac{y_1 - y_2}{x - x^0},$$

se si considera la funzione $-\Delta(x)$ e si ragiona come sopra sulla disuguaglianza precedente, si ottiene che esiste almeno un punto $x_2 (= x_1)$, in cui è

$$F(x_2, y(x_2) - \Delta(x_2)) - F(x_2, y(x_2)) > -\Delta'(x_2).$$

Con ciò, riguardo alla funzione $F(x, y)$ in esame, le (9′) sono soddisfatte per *qualunque* funzione $y(x)$, in particolare (e ciò basta ai fini del teorema di unicità) lo sono se al posto di $y(x)$ vi mettiamo una soluzione $y = f(x)$ della equazione differenziale (1). E così risulta ancora provato che la condizione (10) è sufficiente alla unicità, ma anche che è ben lontana dall'essere necessaria.

L'analisi precedente mette anche in luce il ruolo giocato dalla condizione (10) nel problema della unicità.

Meccanica. — *Generalizzazione del legame sforzi–deformazioni nei solidi elastico–viscosi.* Nota di FRANCO LEVI, presentata (*) dal Socio G. COLONNETTI.

In una prima impostazione del problema dell'equilibrio dei solidi elastico–viscosi, noi abbiamo ammesso che l'incremento che la deformazione viscosa longitudinale $\bar{\varepsilon}$ che si sviluppa durante l'intervallo di tempo infinitesimo dt nella fibra generica sia legato alla corrispondente sollecitazione normale σ da una espressione della forma:

$$\frac{d\bar{\varepsilon}}{dt}\,dt = \sigma \cdot \frac{d\bar{\varepsilon}_0}{dt}\,dt \tag{1}$$

dove $\bar{\varepsilon}_0$ sta a rappresentare la deformazione viscosa specifica (quella che si riscontra sotto l'azione di una sollecitazione costante di 1 Kg/cmq.) (1).

Tale rappresentazione analitica non rende conto tuttavia di un importante aspetto del fenomeno fisico: e cioè dell'elasticità ritardata. Scopo della presente Nota è di mostrare come si possa modificare la (1) per tener conto anche di questo effetto.

A questo fine, noi ci appoggeremo sull'interpretazione statica del fenomeno dell'elasticità ritardata da noi recentemente proposta (2), la quale si basa essenzialmente sull'idea che ogni fibra del solido sia formata dall'unione di elementi elastici con degli elementi elastico–viscosi. Naturalmente, noi ci limiteremo a considerare anche qui dei solidi nei quali ci si possa accontentare di tener conto delle deformazioni longitudinali in una direzione privilegiata, introducendo perciò le stesse restrizioni già ammesse nella prima trattazione del problema (3).

Noi daremo dunque del nostro solido elastico viscoso due schematizzazioni ideali riferentesi ciascuna ad un diverso stadio dell'indagine statica. E precisamente: nel calcolare le reazioni dei vincoli esterni noi ammetteremo di aver a che fare con un solido omogeneo; invece, per stabilire la legge « sforzi–deformazioni » nella fibra generica del materiale, noi considereremo la fibra stessa come formata da un insieme di elementi longitudinali elastici e di elementi longitudinali elastico–viscosi uniformemente distribuiti nella sezione, e perfettamente aderenti gli uni agli altri. Noi ammetteremo peraltro che negli elementi elastico–viscosi la comparsa delle deformazioni viscose sia regolata dalla (1).

Sia allora $\bar{A}$ l'estensione della porzione elastico–viscosa della sezione nella fibra generica, $\bar{\varepsilon}_0$ il valore ad un istante qualsiasi della viscosità specifica

(*) Nella seduta del 12 febbraio 1949.

(1) F. LEVI, *Distorsioni isomorfe e fenomeni viscosi.* « Ricerca scientifica », n. 5–6, maggio–giugno 1948.

(2) F. LEVI, *Viscosità ed elasticità ritardata.* « Ricerca scientifica », n. 10, 1948.

(3) La nostra attuale impostazione del problema, e d'altronde anche quella che trascura l'elasticità ritardata, si potrebbe adattare senza modifiche sostanziali anche ad altri tipi di sollecitazione, quale ad esempio quello che si riscontra nei solidi sottoposti a torsione.

corrispondente ed $\bar{\varepsilon}$ la deformazione viscosa effettiva allo stesso istante (per ipotesi, $\bar{\varepsilon}$ ha lo stesso valore in tutti gli elementi elastico-viscosi di una stessa fibra), A' l'estensione della porzione elastica della sezione della fibra, infine A l'area ideale complessiva della fibra, ridotta al modulo elastico delle fibre elastico-viscose.

Poniamo al solito:

$$\rho = 1 - \frac{\bar{A}}{A}$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\int_{\bar{A}} \bar{\varepsilon} d A}{A} = \bar{\varepsilon} \frac{\bar{A}}{A}$$

ed indichiamo con σ la sollecitazione normale agente sull'elemento generico della fibra (nella parte elastico-viscosa della sua sezione). In applicazione della (1) avremo:

$$\bar{\varepsilon} = \int_0^t \sigma \frac{d\bar{\varepsilon}_0}{dt} dt .$$

D'altra parte, se N è la sollecitazione esterna applicata alla fibra, si avrà ovviamente:

$$\sigma = \frac{N}{A} + E(\bar{\lambda} - \bar{\varepsilon}) = \frac{N}{A} + E\bar{\lambda}\left(1 - \frac{A}{\bar{A}}\right).$$

Donde, sostituendo:

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{A}}{A} \int_0^t \left[\frac{N}{A} + E\bar{\lambda}\left(1 - \frac{A}{\bar{A}}\right)\right] \frac{d\bar{\varepsilon}_0}{dt} dt = \int_0^t \left(\frac{N\bar{A}}{A^2} - E\rho\bar{\lambda}\right) \frac{d\bar{\varepsilon}_0}{dt} dt$$

e, derivando rispetto a t:

$$\frac{d\bar{\lambda}}{dt} + E\rho\bar{\lambda} \frac{d\bar{\varepsilon}_0}{dt} - \frac{\bar{A}N}{A^2} \frac{d\bar{\varepsilon}_0}{dt} = 0 . \tag{2}$$

Ammettiamo, per semplificare le formule, che i due materiali costituenti la fibra presentino lo stesso modulo elastico onde si abbia:

$$A = \bar{A} + A'.$$

Il quoziente N/A rappresenta allora la sollecitazione unitaria S agente sulla fibra del solido, considerato omogeneo, mentre il coefficiente $\bar{\lambda}$ rappresenta la deformazione longitudinale $\bar{\varepsilon}$ che la fibra subisce a causa dell'effetto viscoso.

Con queste notazioni, la (2) si scrive

$$\frac{d\bar{\varepsilon}}{dt} + E\rho\,\bar{\varepsilon} \frac{d\bar{\varepsilon}_0}{dt} - \frac{\bar{A}}{A} \frac{d\bar{\varepsilon}_0}{dt} S = 0 . \tag{3}$$

Tale sarà dunque la legge sforzi-deformazioni che noi dovremo adottare in sostituzione della (1) per lo studio delle proprietà statiche d'insieme del nostro solido elastico-viscoso.

Si nota subito che, rispetto alla (1), la (3) comporta un termine in più (il secondo) il quale fa dipendere l'incremento dalla deformazione viscosa, non soltanto dal valore della sollecitazione esterna applicata, ma anche dalla deformazione viscosa esistente a quel momento della fibra considerata. Ne segue che, in conformità con i dati sperimentali sull'elasticità ritardata, la deformazione viscosa tende sempre a diminuire indipendentemente dall'azione ulteriore della sollecitazione esterna. Abbiamo inoltre già visto che questa impostazione del problema conduce ad una soddisfacente interpretazione del comportamento dei materiali viscosi sottoposti dapprima all'azione di un carico costante e poi scaricati [3].

È dunque lecito affermare che la (3) interpreta il fenomeno fisico in modo più fedele di quanto non lo facesse la (1).

Vediamo dunque di precisare quali siano le conseguenze dell'adozione di questo nuovo legame sforzi-deformazioni.

a) Solido isostatico sottoposto a carico costante.

L'integrazione della (3) conduce immediatamente alla relazione:

$$\bar{\varepsilon} = S\frac{\bar{A}}{AE\rho}\left(1 - e^{-E\rho\bar{\varepsilon}_0}\right) \tag{4}$$

e dunque

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_0 = \frac{\bar{A}}{AE\rho}\left(1 - e^{-E\rho\bar{\varepsilon}_0}\right). \tag{4'}$$

Se si paragona la (4') con la legge di variazione della viscosità specifica adottata nei nostri lavori citati:

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_0 = \gamma\left(1 - e^{-\theta t}\right) \tag{5}$$

si vede che quest'ultima, esaminata alla luce della nostra attuale interpretazione del problema, ammette implicitamente che la legge che regola il comportamento delle fibre elastico-viscose sia della forma:

$$\bar{\varepsilon}_0 = Kt. \tag{6}$$

Se ci si riferisce ai dati d'esperienza, l'adozione della (6), e dunque della (5), sembra giustificata per alcune leghe metalliche nelle quali la parte viscosa della sezione è formata da cristalli di un metallo puro il quale tenda notoriamente a deformarsi indefinitamente sotto carico. In altri casi, ed in particolare per il calcestruzzo, quando gli elementi viscosi subiscano sicuramente un invecchiamento che smorzi gradualmente la loro tendenza a deformarsi sotto carico permanente, (ciò che si verifica notoriamente nel calcestruzzo per il graduale prosciugamento dello strato gelatinoso che avvolge i grani del legante [4]) si dovranno adottare per $\bar{\varepsilon}_0$ delle espressioni più complesse, aventi ad esempio la forma di un decremento esponenziale.

Adottiamo ad esempio la forma

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_0 = \alpha\left(1 - e^{-\beta t}\right)$$

(4) P. Haller, *Schwinden und Kriechen von mortel und beton.* « E. M. P. A. », Zurigo.

viene, per $\bar{\mathcal{E}}_0$:

$$\bar{\mathcal{E}}_0 = \frac{\bar{A}}{AE\rho}\left[1 - e^{-E\varrho\alpha(1-e^{-\beta t})}\right].$$

Espressione che corrisponde ancora ad una legge a decremento esponenziale ma che si presta meglio della (5) a seguire le curve sperimentali poichè in essa compaiono tre coefficienti arbitrari invece di due, ciò che permette di far coincidere l'origine, l'asintoto e due punti intermedi.

Notiamo ancora che quando la quasi totalità della sezione trasversale della fibra sia costituita da elementi elastico-viscosi (quando cioè $\bar{A}$ tenda al valore A e dunque ρ tenda a 0) l'espressione (4') si può semplificare sviluppando in serie l'esponenziale e limitandosi a considerare il primo termine. Viene allora:

$$\bar{\mathcal{E}}_0 = \frac{\bar{A}}{AE\rho}\left(1 - \frac{1}{1 + E\rho\bar{\varepsilon}_0}\right)$$

che, al limite, conduce a

$$\bar{\mathcal{E}}_0 = \bar{\varepsilon}_0$$

Con ciò si spiega che in un materiale nel quale «l'ossatura elastica» sia molto tenue si possano anche riscontrare delle deformazioni viscose indefinitamente crescenti.

b) Solidi iperstatici.

L'integrazione della (3) nel caso generale (S variabile) conduce alla seguente espressione della $\bar{\mathcal{E}}$:

$$\bar{\mathcal{E}} = e^{-E\varrho\bar{\varepsilon}_0}\left[C + \frac{\bar{A}}{A}\int S\,\frac{d\bar{\varepsilon}_0}{dt}\,e^{E\varrho\bar{\varepsilon}_0}\,dt\right].$$

Il valore della costante C deriva dalla condizione:

$$t = 0 \qquad \bar{\mathcal{E}} = 0$$

per cui si ha:

$$\bar{\mathcal{E}} = \frac{\bar{A}}{A}\,e^{-E\varrho\bar{\varepsilon}_0}\int_0^t S\,\frac{d\bar{\varepsilon}_0}{dt}\,e^{E\varrho\bar{\varepsilon}_0}\,dt. \tag{7}$$

Si nota che in questa espressione della $\bar{\mathcal{E}}$ il valore della sollecitazione S compare, sia pure sotto integrale, sotto forma lineare e omogenea.

Esaminiamo allora separatamente il caso di un solido in equilibrio sotto l'azione di forze esterne ed il caso del solido in stato di coazione.

1° Se lo stato di tensione è determinato dalla presenta di un sistema di forze esterne è ovvio che le deformazioni impresse longitudinali dovute all'effetto viscoso che si verificheranno durante il primo intervallo di tempo infinitesimo che segue l'applicazione delle forze saranno in ogni punto proporzionali alle tensioni iniziali corrispondenti. Si tratterà dunque di un sistema di deformazioni congruenti il cui intervento lascerà immutato lo stato di tensione. Il ragionamento si può naturalmente ripetere per i successivi intervalli di tempo; si può dunque affermare che i successivi incrementi della deformazione viscosa rimarranno in ogni punto sempre affini alla deformazione elastica iniziale. Il che dimostra

l'invarianza del regime statico determinato nel solido elastico viscoso da un sistema qualsiasi di forze esterne (5).

Da questa conclusione derivano allora due corollari immediatamente dimostrabili: la validità del principio di sovrapposizione tra due diversi sistemi di forze esterne; la possibilità di affermare che, in presenza di forze di intensità variabile nel tempo, lo stato di tensione sarà sempre identico a quello che si avrebbe in regime perfettamente elastico.

2° Anche in presenza di uno stato di coazione le deformazioni viscose verificantesi durante il primo intervallo di tempo infinitesimo saranno affini alle deformazioni elastiche iniziali. Ma poichè, per ipotesi, queste non erano congruenti la corrispondente distorsione non sarà più congruente ma isomorfa (1). Si avrà dunque invarianza della deformazione e, d'altra parte, la tensione in ciascun punto rimarrà affine al suo valore iniziale. Il ragionamento si può allora ripetere per i successivi intervalli di tempo; il che consente di affermare che, anche in seguito, lo stato di deformazione rimarrà inalterato (isomorfismo) mentre lo stato di tensione rimarrà simile a se stesso. Anche qui l'indagine del comportamento statico conduce a constatare la validità del principio di sovrapposizione e la possibilità di applicare i ragionamenti svolti al caso di distorsione variabili nel tempo (purchè esse si conservino sempre affini a se stesse).

Si riconoscono, nelle proposizioni enunciate, le conclusioni cui eravamo giunti nella nostra prima impostazione del problema elastico–viscoso. Principio di sovrapposizione, invarianza del regime statico dovuto ad un sistema di forze esterne, isomorfismo in presenza di uno stato di coazione rimangono dunque validi anche quando si tenga conto dell'elasticità ritardata. Anche in questo caso naturalmente l'attendibilità di questi risultati è condizionata dalla validità delle ipotesi semplificative poste alla base del nostro studio.

Ed ecco in qual modo le leggi che regolano il comportamento statico del solido elastico–viscoso si prestano ad una impostazione analitica del problema.

Supponiamo in un primo tempo, che nel nostro solido intervenga una distorsione costante, caratterizzata nel punto generico da una deformazione impressa longitudinale $\bar{\varepsilon}_c$.

Al tempo t la deformazione totale ε_T nella fibra generica assumerà il valore:

$$E_T = \frac{S}{E} + \frac{\bar{A}}{A} e^{-E\rho\bar{\varepsilon}_o} \int_0^t S \frac{d\bar{\varepsilon}_o}{dt} e^{E\rho\bar{\varepsilon}_o} dt + \bar{\varepsilon}_c$$

e la condizione d'invarianza di tale deformazione si scriverà:

$$(8) \qquad \frac{1}{E}\frac{dS}{dt} - E\rho\frac{\bar{A}}{A}\frac{d\bar{\varepsilon}_o}{dt} e^{-E\rho\bar{\varepsilon}_o} \int_0^t S \frac{d\bar{\varepsilon}_o}{dt} e^{E\rho\bar{\varepsilon}_o} dt + \frac{\bar{A}}{A} S \frac{d\bar{\varepsilon}_o}{dt} = 0.$$

(5) S'intende che la costanza riguarda le S e non le tensioni agenti nell'interno della fibra poichè queste ultime variano con l'entità della deformazione viscosa.

Equazione perfettamente analoga a quella che avevamo ottenuta partendo dalla (1) ma nella quale la presa in considerazione dell'elasticità ritardata si traduce nell'apparizione di un termine integrale supplementare.

Se invece la distorsione che interviene nel solido elastico-viscoso è variabile nel tempo, pur mantenendosi sempre affine a se stessa, si dovrà esprimere che la variazione della deformazione totale che si manifesta durante un intervallo di tempo elementare dt è la stessa che si verificherebbe in regime elastico.

Sia allora $\bar{\varepsilon}_R$ la deformazione impressa variabile che si riscontra al tempo t nell'elemento generico. La variazione della deformazione totale si può calcolare come la somma *a*) della variazione di deformazione elastica, *b*) della variazione della deformazione impressa (dovuta alla viscosità e alla variazione della distorsione $\bar{\varepsilon}_R$).

Si avrà dunque

$$\frac{d\bar{\varepsilon}_T}{dt}\,dt = \frac{1}{E}\frac{dS}{dt}\,dt + \frac{d\bar{\varepsilon}_R}{dt}\,dt + \frac{\bar{A}}{A}S\frac{d\bar{\varepsilon}_o}{dt}\,dt - E\rho\frac{\bar{A}}{A}\frac{d\bar{\varepsilon}_o}{dt}\,dt\,e^{-E\rho\bar{\varepsilon}_o}\int_o^t S\frac{d\bar{\varepsilon}_o}{dt}\,e^{E\rho\bar{\varepsilon}_o}\,dt\,.$$

In regime elastico si avrebbe invece

$$\frac{d\bar{\varepsilon}_T}{dt}\,dt = \frac{d\bar{\varepsilon}_R}{dt}\,dt + \frac{S_o}{E}\frac{d\bar{\varepsilon}_R}{dt}\,dt$$

dove S_o sta ad indicare la tensione che la distorsione considerata, ridotta a valore unitario, determinerebbe in regime elastico nel punto considerato.

Eguagliando le due espressioni della variazione della deformazione totale si ottiene allora la seguente equazione integro-differenziale:

$$(9)\qquad \frac{1}{E}\frac{dS}{dt} + \frac{\bar{A}}{A}S\frac{d\bar{\varepsilon}_o}{dt} - E\rho\frac{\bar{A}}{A}\frac{d\bar{\varepsilon}_o}{dt}\,e^{-E\rho\bar{\varepsilon}_o}\int_o^t S\frac{d\bar{\varepsilon}_o}{dt}\,e^{E\rho\bar{\varepsilon}_o}\,dt - \frac{S_o}{E}\frac{d\bar{\varepsilon}_R}{dt} = 0$$

la quale regola la variazione del regime statico nel punto generico del solido.

Anche qui si nota che la (9) è analoga all'espressione che si ottiene partendo dalla (1), salvo la comparsa di un termine integrale supplementare la cui presenza è dovuta alla presa in considerazione della elasticità ritardata.

A prima vista, la messa in conto dell'elasticità ritardata sembra doversi tradurre in complicazioni analitiche notevoli poichè essa conduce a sostituire a delle ordinarie equazioni differenziali lineari delle equazioni integro-differenziali. In realtà, le espressioni (8) e (9) si riducono molto facilmente a delle equazioni differenziali lineari del secondo ordine.

Poniamo infatti per abbreviare la scrittura:

$$\frac{1}{E} = \alpha \qquad \frac{\bar{A}}{A} = \beta \qquad \frac{d\bar{\varepsilon}_o}{dt} = \bar{\varepsilon}_o' \qquad \frac{dS}{dt} = S'.$$

La (8) diventa allora:

$$\alpha S' + \beta S\bar{\varepsilon}_o' = E\rho\,\beta\bar{\varepsilon}_o'\,e^{-E\rho\bar{\varepsilon}_o}\int_o^t S\,\bar{\varepsilon}_o'\,e^{E\rho\bar{\varepsilon}_o}\,dt\,.$$

Ciò che si può scrivere:

$$\frac{\alpha}{\beta}\frac{S'}{\bar{\varepsilon}'_0}e^{E\rho\bar{\varepsilon}_0} + S\,e^{E\rho\bar{\varepsilon}_0} = E\rho\int_0^t S\,\bar{\varepsilon}'_0\,e^{E\rho\bar{\varepsilon}_0}\,dt$$

e infine, derivando rispetto a t e semplificando:

$$\frac{\alpha}{\beta}\frac{S''\bar{\varepsilon}'_0 - \bar{\varepsilon}''_0 S'}{\bar{\varepsilon}'^{2}_0} + \frac{\alpha}{\beta}E\rho S' + S' + S\bar{\varepsilon}'_0 E\rho = E\rho\, S\bar{\varepsilon}'_0.$$

Donde l'equazione lineare omogenea

$$(10)\qquad S''\frac{\alpha}{\beta}\frac{1}{\bar{\varepsilon}'_0} - S'\left[\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\bar{\varepsilon}''_0}{\bar{\varepsilon}'^{2}_0} - E\rho\right) - 1\right] = 0$$

che con metodi noti si riduce ad una quadratura.

Con le stesse posizioni, e scrivendo peraltro $\frac{S_0}{E} = \eta$ la (9) conduce invece alla seguente equazione:

$$(11)\qquad S''\frac{\alpha}{\beta}\frac{1}{\bar{\varepsilon}'_0} - S'\left[\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\bar{\varepsilon}''_0}{\bar{\varepsilon}'^{2}_0} - E\rho\right) - 1\right] - \frac{\eta}{\beta}\left(\frac{\bar{\mathfrak{S}}''_R\,\bar{\varepsilon}'_0 - \bar{\varepsilon}''_0\,\bar{\mathfrak{S}}'_R}{\bar{\varepsilon}'^{2}_0} + E\rho\,\bar{\mathfrak{S}}'_R\right) = 0.$$

Si giunge così ad una equazione differenziale lineare del secondo ordine completa, la cui integrale generale sarà la somma della soluzione dell'equazione resa omogenea (e cioè della (10)) e di una soluzione particolare dell'equazione completa. Soluzione particolare che si può individuare col metodo della variazione delle costanti.

Osserviamo ancora che i valori delle due costanti di integrazione che compariranno negli integrali generali della (10) e della (11) si potranno determinare in base alle seguenti condizioni: *a*) per $t = 0$ la S assumerà un valore iniziale noto, calcolabile in regime elastico; *b*) per $t = 0$ il valore della derivata $\frac{dS}{dt}$ dovrà risultare identico a quello che le competerebbe in assenza del fenomeno di elasticità ritardata, il quale, all'origine, non può naturalmente influire sull'andamento dello stato di tensione. Tale valore della $\frac{dS}{dt}$ si potrà dunque calcolare a partire dall'espressione della S ricavata dalle equazioni (8) e (9) prive del termine integrale.

Meccanica. — *Effetto dell' elasticità ritardata sugli stati di coazione di origine viscosa.* Nota di CESARE CASTIGLIA, presentata (*) dal Socio G. COLONNETTI.

Lo studio si propone di analizzare l'effetto della elasticità ritardata in un solido elastico viscoso a vincoli iperstatici, soggetto all'azione di una distorsione impressa $\bar{\varepsilon}(t)$, variabile nel tempo con legge nota.

L'indagine analitica viene impostata sulle equazioni differenziali dell'effetto di elasticità ritardata proposte dal Levi (1). Tali equazioni vengono stabilite partendo dalla considerazione che la fibra elementare del solido sia composta da un elemento prismatico a cui venga accoppiato un elemento longitudinale a comportamento elastico.

Tale schematizzazione della composizione del solido consente infatti di generalizzare la relazione sforzi-deformazioni facendovi comparire, oltre al termine elastico e a quello viscoso, un termine di elasticità dipendente dal tempo.

In un solido viscoso infatti nel quale si ammetta che la entità della deformazione viscosa sia proporzionale alla sollecitazione normale unitaria, la legge sforzi-deformazione assume la forma:

$$\frac{d\bar{\zeta}}{dt}\,dt = \Sigma\,\frac{d\bar{\zeta}_o}{dt}\,dt \tag{1}$$

dove $\bar{\zeta}$ e Σ rappresentano rispettivamente la deformazione viscosa e la sollecitazione della fibra generica, ed $\bar{\zeta}_o$ la deformazione viscosa specifica (deformazione viscosa sotto lo sforzo unitario.

Supponendo invece che la fibra generica sia costituita da una frazione $\bar{A}$ della sezione trasversale ad andamento elastico viscoso (con modulo elastico E e deformazione specifica $\bar{\varepsilon}_o$) ed una frazione elastica A' di modulo E', la legge sforzi-deformazioni assume la forma:

$$\frac{d\bar{\zeta}}{dt} + E\rho\,\bar{\zeta}\,\frac{d\bar{\varepsilon}_o}{dt} - \frac{\bar{A}}{A}\,\frac{d\bar{\varepsilon}_o}{dt}\,\Sigma = 0 \tag{2}$$

in cui si è posto: A sezione ideale della sezione ridotta al modulo della parte elastico-viscosa e $\rho = 1 - \bar{A}/A$.

La (2) comporta un termine in più rispetto alla (1), il quale fa dipendere l'incremento della deformazione viscosa non soltanto dal valore della sollecitazione esterna applicata, ma anche dalla deformazione viscosa esistente in quel momento nella fibra considerata.

Il fatto che tale relazione comporti la Σ sotto forma lineare fa si che in questa relazione sono ancora valide le leggi di congruenza e di isomorfismo, già stabilite per i solidi elastico-viscosi in assenza di elasticità ritardata.

(*) Nella seduta del 12 febbraio 1949.

(1) F. LEVI, *Viscosità ed elasticità ritardata* « Ricerca scientifica », ottobre 1948; *Generalizzazione del legame sforzi-deformazioni nei solidi elastico viscosi.* In corso di stampa all'Acc. Lincei.

Il principio di invarianza dello stato di deformazione in presenza di una distorsione (isomorfismo) permette ora di applicare la (2) al caso di un solido iperstatico soggetto ad una distorsione $\bar{\varepsilon}(t)$.

Limitiamoci per ora a considerare applicata al solido una distorsione costante nel tempo $\bar{\varepsilon}_c$. Nel caso più generale di una distorsione variabile con legge nota, si otterrà una equazione differenziale non omogenea che può venire svolta con metodi analoghi a quelli qui trattati.

Nella ipotesi allora di una distorsione costante la espressione differenziale del fenomeno prende la forma:

$$(2') \qquad \frac{1}{E}\frac{d\Sigma}{dt} - E\rho\frac{\bar{A}}{A}\frac{d\bar{\varepsilon}_o}{dt}e^{-E\rho\bar{\varepsilon}_o}\int_o^t \Sigma\frac{d\bar{\varepsilon}_o}{dt}e^{E\rho\bar{\varepsilon}_o}\,dt + \frac{\bar{A}}{A}\Sigma\frac{d\bar{\varepsilon}_o}{dt} = 0.$$

Derivando una seconda volta dopo avere isolato il termine integrale, e semplificando si ottiene:

$$(3) \qquad \Sigma'' - \Sigma'\left(\frac{\bar{\varepsilon}_o''}{\bar{\varepsilon}_o'} - E\rho\bar{\varepsilon}_o' - E\frac{\bar{A}}{A}\bar{\varepsilon}_o'\right) = 0.$$

Ci proponiamo ora di valutare gli effetti della elasticità ritardata in quei solidi che presentano per la viscosità specifica $\bar{\varepsilon}_o$ una legge a decremento esponenziale del tipo:

$$(4) \qquad \bar{\varepsilon}_o = \gamma(1 - e^{-\delta t})$$

(la quale si riscontra, ad esempio, nel calcestruzzo).

Calcolando quindi $\bar{\varepsilon}_o'$ e $\bar{\varepsilon}_o''$ e sostituendo nella (3) si ottiene:

$$(5) \qquad \Sigma'' + \Sigma'(\delta + E\gamma\delta\, e^{-\delta t}) = 0.$$

L'integrale generale di questa equazione generale può venire ricavato ponendo:

$$e^{-\delta t} = x$$

e sostituendo nella (5) a $\Sigma(t)$ la $Y(x)$.

Sotto tale condizione la (5) diventa

$$\delta^2 x^2 Y''(x) + \delta^2 x\, Y'(x) - (\delta + E\gamma\,\delta x)\,\delta x\, Y'(x) = 0.$$

Semplificando si ottiene una equazione lineare a coefficienti costanti:

$$(6) \qquad \delta^2 Y''(x) - E\gamma\delta^2 Y'(x) = 0.$$

L'integrale generale della (6) è una combinazione lineare di due esponenziali della forma:

$$c_1 e^{z_1 x} + c_2 e^{z_2 x}$$

in cui z_1 e z_2 sono rispettivamente

$$(7) \qquad \begin{cases} z_1 = E\gamma \\ z_2 = 0 \end{cases}$$

dell'equazione di secondo grado in z, formata con gli stessi coefficienti della (6).

Tornando a sostituire $Y(x)$ con $\Sigma(t)$, si ottiene in definitiva:

$$(8) \qquad \Sigma = c_1 e^{z_1 e^{-\delta t}} + c_2.$$

I valori delle due costanti di integrazione possono essere calcolati al limite in base alle seguenti considerazioni:

per $t = 0$, la Σ assumerà un valore iniziale noto Σ_0, calcolabile in regime elastico nel punto considerato per la $\bar{\varepsilon}_c$.

per $t = 0$, il valore della derivata $\frac{d\Sigma}{dt_{(0)}}$ dovrà risultare eguale a quello che le competerebbe in regime viscoso in assenza del fenomeno di elasticità ritardata. Alla origine, infatti, questo non influisce sullo stato di tensione del solido.

La prima condizione si traduce allora:

$$(a) \qquad \Sigma_0 = c_1 e^{z'} + c_2 .$$

Il valore $\frac{d\Sigma}{dt_0}$ della seconda relazione può ricavarsi dalla (2') priva del termine integrale; otterremo confrontando con la derivata della (8) calcolata nel punto zero:

$$(b) \qquad \frac{d\Sigma}{dt_{(0)}} = E\gamma \frac{\bar{A}}{A} \Sigma_0 = z_1 c_1 e^{z_1 t} .$$

A tempo infinito, si ottiene per $\frac{\Sigma}{\Sigma_0}$ l'espressione:

$$(9) \qquad \frac{\Sigma}{\Sigma_0} = c'_1 + c'_2$$

avendo posto $c'_1 = c_1/\Sigma_0$ e $c'_2 = c_2/\Sigma_0$.

Esprimendo, dalle (a) e (b) le costanti di integrazione, la (9) diviene:

$$(10) \qquad \frac{\Sigma}{\Sigma_0} = \frac{\bar{A}}{A} e^{E\gamma t} + \rho .$$

Osserviamo immediatamente come le proprietà del materiale viscoso compaiono attraverso il valore di $E\gamma$ e $\bar{A}/A$. Il valore di tali parametri può ricavarsi per via sperimentale. Immaginiamo infatti di sottoporre il materiale considerato ad un carico costante e di determinarne la legge di deformazione viscosa nel tempo. In questa condizione di carico, l'integrale della (2) conduce alla seguente relazione fra Σ ed $\bar{\zeta}$:

$$\bar{\zeta} = \Sigma \frac{\bar{A}}{A} \frac{1}{E\rho} (1 - e^{-E\rho\varepsilon_0})$$

e dunque

$$\bar{\zeta}_0 = \frac{\bar{A}}{A} \frac{1}{E\rho} (1 - e^{-E\rho\bar{\varepsilon}_0}).$$

Dal paragone della curva sperimentale con tale espressione teorica si possono ricavare i termini numerici, ed in particolare $\bar{A}/A$ il cui valore interessa per lo studio asintotico del fenomeno.

Consideriamo allora i due valori limiti di tale rapporto $\bar{A}/A$, corrispondenti a *zero* per materiale composto interamente da elementi elastici, ed a 1 per materiale elastico–viscoso (in assenza di elasticità ritardata).

Per questi valori $\bar{A}/A$ si ottiene rispettivamete

$$\frac{\Sigma}{\Sigma_0} = 1 \qquad \frac{\Sigma}{\Sigma_0} = e^{-E\gamma} . \tag{11}$$

La presenza della elasticità ritardata (valore di A/A tra O ed 1) si traduce quindi in una variazione della caduta di tensione.

Per individuare la legge di tale variazione basterà considerare ancora la (10). Tale legge ci assicura che il fenomeno dell'elasticità ritardata ha l'effetto di smorzare la caduta di tensione che si avrebbe in regime puramente viscoso in presenza di una distorsione costante nel tempo.

Per quanto si è detto, la (10) consente ancora di calcolare la caduta di tensione basandosi sui dati di una prova a carico costante e viceversa di calcolare la viscosità specifica asintotica basandosi su una prova a distorsione costante.

Per altri materiali come ad esempio le leghe metalliche, la legge più adatta a rappresentare la viscosità specifica nelle fibre elastico-viscose del solido è del tipo:

$$\bar{\varepsilon}_0 = kt .$$

In tali condizioni la (3) diviene

$$\Sigma'' + \Sigma' kE\left(\rho + \frac{\bar{A}}{A}\right) = 0 . \tag{12}$$

L'integrale generale di tale equazione lineare a termini costanti viene data da:

$$\Sigma = c_1 e^{y_1 t} + c_2 e^{y_2 t} \tag{13}$$

in cui y_1 e y_2 sono rispettivamente

$$y_1 = -kE$$
$$y_2 = 0 .$$

Il calcolo delle costanti può farsi nelle stesse condizioni ai limiti come per la (3). Il valore di y_1, essendo essenzialmente positivi i termini componenti i coefficienti della (12), è sempre negativo, per cui la (13) può scriversi:

$$\frac{\Sigma}{\Sigma_0} = c_1' e^{-|y_1| t} + c_2' \qquad \left(c_1' = \frac{c_1}{\Sigma_0},\ c_2' = \rho\right). \tag{13'}$$

Si avrebbe allora che per $\frac{\bar{A}}{A} = 1$

$$\lim_{t \to \infty} \Sigma/\Sigma_0 = 0 .$$

In un materiale dunque nel quale la legge di viscosità specifica delle fibre elastico-viscose abbia un andamento proporzionale al tempo, la tensione in ogni punto tenderebbe, sotto l'azione di una distorsione costante, ad annullarsi.

Tale conclusione, che coincide con i dati sperimentali quando si operi a caldo (annullamento di tensioni per trattamento termico) non si verifica invece nelle ordinarie condizioni di temperatura. Il fatto si spiega ammettendo che in quest'ultimo caso esista, cosa assai probabile, una soglia di tensione, al disotto della quale il fenomeno viscoso non ha più luogo.

Astronomia. — *Sopra la doppia 12050 del Catalogo di Aitken.* Nota di MARIA ANTONIETTA GIANNUZZI, presentata (*) dal Socio G. ARMELLINI.

1. La stella ADS 12050 ($m_1 = 7,2$; $m_2 = 8,3$; $\alpha = 18^h\,4^m$; $\delta = 22°\,6'$ equin. 1950) è una doppia che ha dato luogo a molte discussioni sopra la sua natura, essendo ancora incerto se essa sia una doppia fisica (e cioè una stella *binaria*, propriamente detta), oppure una doppia semplicemente ottica, o *pseudobinaria*, secondo la denominazione proposta dal prof. Armellini («Astr. Siderale», vol. II, p. 426). Come è noto, nel primo caso i due astri sono realmente vicini tra loro e si muovono sotto la loro reciproca attrazione, onde l'astro satellite descrive un'ellisse che ha per fuoco l'astro principale. Nel secondo caso invece i due astri sono casualmente allineati con la Terra, onde – pur potendo essere distantissimi tra loro – si proiettano sulla sfera celeste in due punti molto vicini. Però in questo ultimo caso, poichè i due astri hanno generalmente moti propri differenti, i quali (almeno per l'intervallo di qualche secolo) possono ritenersi rettilinei ed uniformi, il moto relativo di una stella rispetto all'altra apparisce pure rettilineo uniforme, anzichè ellittico, come nel primo caso.

2. Ora, come si è detto, gli astronomi hanno manifestato opinioni discordanti sopra la natura di questa doppia. Flammarion, che ha eseguito varie osservazioni in proposito e che riporta la doppia al n. 2455 (numero che essa ha nel primitivo Catalogo di Struve) del suo *Catalogue des étoiles doubles* (Paris, 1878), scrive che essa è *probablement orbital*; e cioè crede trattarsi di una vera doppia *fisica*. Ma trenta anni dopo Burnham, che registra la doppia al n. 9043 del suo *General Catalogue of double stars* (Washington, 1906) dichiara invece nettamente che *the change is due to proper motion*; e cioè crede che essa sia una doppia *ottica*, o pseudobinaria. Quindici anni dopo invece, nel 1921, Jackson (Greenwich, *Catal.*, p. 191, 1921) stima all'opposto che si tratti di un vero *sistema binario* ed anzi assegna come periodo di rivoluzione circa mille anni. Ma diciassette anni appresso, Rose Bonnet nelle sue *Mesures d'étoiles doubles* («Observatoires de Paris», 1938) da lei eseguite col rifrattore Eichens di 30 cm. dell'Osservatorio di Parigi, manifesta invece nuovamente l'opinione che si tratti di una *pseudobinaria* e che quindi la stella minore abbia un moto apparente relativo *rettilineo uniforme* rispetto alla stella principale. Ed anzi assegna a questo moto relativo il valore di $0'',067$ all'anno e da, come direzione di questo movimento, l'angolo di posizione di 7° circa.

3. In presenza di tali discordanze, il prof. G. Armellini, onde studiare la questione, eseguì personalmente (cfr. «Memorie della Società Astronomica Italiana», vol. XIX-1) nel 1945 una nuova serie di osservazioni di questa doppia, valendosi

(*) Nella seduta dell'11 dicembre 1948.

del grande rifrattore Steinheil, di 40 cm. di apertura, dell'Osservatorio Astronomico di Roma su Monte Mario. E mi affidò quindi l'incarico di riesaminare tutte le osservazioni esistenti in proposito, che si estendono per un periodo di circa centoventi anni (a datare da quelle di Struve del 1828) e di dedurne le necessarie conseguenze sulla natura dell'astro; ciò che passo ora ad esporre brevemente in questa Nota.

4. Ho iniziato il mio lavoro ricercando, nei cataloghi e nelle riviste della biblioteca dell'Osservatorio di Monte Mario, le opportune notizie sopra i risultati delle osservazioni. Indicando con ρ la distanza angolare dei due astri e con ϑ l'angolo di posizione (contato, al solito, in senso NESW a partire dalla direzione Nord del cerchio orario) dell'astro secondario rispetto al principale, ho così ottenuto la Tabella I.

5. Venuta in possesso di questa lunga serie di osservazioni (le più antiche, si trovano già riportate nei Cataloghi di Burnham e di Aitken), ho proceduto anzi tutto a controllarle graficamente, tracciando due diagrammi cartesiani, dove prendevo per ascissa i tempi e per ordinata nell'uno gli angoli di posizione ϑ e nell'altro le distanze ρ. Ho così scartato le osservazioni del 1889 del Nissen, del 1920 del Giacobini, del 1930 del Mason e del 1935 di Aller, giacchè i punti rappresentativi si allontanano notevolmente dall'andamento regolare dei diagrammi, indicando evidentemente la presenza di errori nelle misure.

Ciò fatto, ho preso per origine la stella principale e, servendomi degli angoli ϑ e delle distanze ρ, ho tracciato graficamente le diverse posizioni assunte dal 1828 al 1945 dalla stella secondaria ed ho trovato che i punti si dispongono, quasi esattamente, lungo una linea retta inclinata di 7° 30′ sulla tangente al cerchio orario per l'astro. *Ne ho dedotto che il sistema è pseudobinario* (doppia ottica) *e che la direzione del moto proprio relativo è poco diversa da quella (7°) data da Rose Bonnet.*

6. Sono passata quindi a determinare la grandezza del moto proprio relativo, ed a tal fine ho costruito un terzo diagramma cartesiano, prendendo per ascisse i tempi (con la scala di un millimetro per anno) e per ordinate gli spazi percorsi dalla stella satellite (con la scala di 20 millimetri per secondo di arco) che ricavavo dal diagramma precedentemente costruito.

Ho trovato che anche in questo ultimo diagramma (come appunto doveva avvenire, essendo il moto proprio relativo dei due astri rettilineo uniforme) i punti si dispongono in linea retta. Ho tracciato tale retta ed ho misurato la tangente dell'angolo che essa forma con l'asse delle ascisse e che evidentemente ci dà la grandezza del moto proprio annuo, espresso in ventesimi di secondo di arco. Poichè, dal diagramma, tale angolo risulta eguale a 52° 40′ (la cui tangente è eguale ad 1,311) il moto proprio relativo annuo μ' sarà 1,311/20 e cioè 0″,065; risultato anche esso poco diverso da quello dato dalla Bonnet e che ne costituisce una buona conferma.

TABELLA I.

Data	ϑ	ρ	Osservatore
1828,77	144°,5	4″,93	Struve
43,62	133 ,4	4 ,39	Mädler
55,66	124 ,3	3 ,98	Wrottesley
57,29	123 ,0	3 ,70	Secchi
64,96	115 ,5	3 ,53	Dembowski
67,69	113 ,9	3 ,41	Dembowski
69,95	110 ,9	3 ,41	Duner
73,34	108 ,7	3 ,37	Dembowski
75,61	104 ,8	3 ,43	Schiaparelli
76,01	105 ,1	3 ,25	Dembowski
79,66	100 ,5	3 ,53	Hall
83,16	99 ,1	3 ,61	Engelmann
84,61	97 ,5	3 ,45	Hall
89,64	96 ,2	3 ,54	Nissen
93,00	87 ,3	3 ,28	Schiaparelli
94,12	85 ,9	3 ,36	Comstock
98,55	80 ,7	3 ,48	Comstock
1900,57	79 ,4	3 ,54	Cohn
02,61	79 ,0	3 ,49	Gr. Obs.
07,51	71 ,7	3 ,59	Comstock, Doberck
10,58	70 ,3	3 ,78	Gr. Obs.
12,90	67 ,6	3 ,81	Phillips, Doberck
15,51	66 ,1	3 ,86	Wyssotsky (AN 258)
20,63	64 ,9	4 ,64	Giacobini (Obs. Paris)
20,96	61 ,2	4 ,24	Doberck
22,72	61 ,9	4 ,79	Giacobini
25,90	58 ,4	4 ,43	Gr. Obs.
26,57	57 ,9	4 ,47	Doberck (AN 228)
27,50	56 ,8	4 ,48	Phillips (MN 88)
28,60	57 ,6	4 ,53	Moll (AJ n. 924)
29,22	54 ,5	4 ,58	Obs. Paris
30,41	53 ,6	4 ,49	Bonnet
30,44	56 ,2	4 ,52	Mason (Obs. Philadelphia)
32,82	51 ,8	4 ,66	Doberck (AN 248)
35,73	52 ,7	5 ,62 (!)	Aller (AN 259)
37,67	50 ,2	4 ,76	Pignatelli (Sp. Vatic.)
38,66	52 ,1	5 ,17	Schmeidler (AN 270)
39,59	51 ,2	5 ,00	Schmeidler (AN 270)
40,66	47 ,0	5 ,33	Pignatelli (Sp. Vatic.)
45,68	47 ,6	5 ,53	Armellini (Soc. Astr. XIX)

7. Ciò posto, per avere le componenti del moto relativo della stella secondaria in ascensione e declinazione, basta applicare le due ben note formole dell'astronomia sferica:

$$(1) \qquad \mu'_\alpha = \mu' \sin\gamma \sec\delta \quad ; \quad \mu'_\delta = \mu' \cos\gamma$$

dove γ indica l'angolo di direzione del moto proprio (e cioè, nel nostro caso, si ha $\gamma = 7^\circ 30'$) e δ la declinazione dell'astro, eguale a $22^\circ 6'$. Si ha subito

$$(2) \qquad \mu'_\alpha = 0'',009 = 0^s,0006 \quad ; \quad \mu'_\delta = 0'',065 .$$

Poichè, secondo [1] il Boss, le componenti del moto proprio eliocentrico dell'astro principale sono $\mu_{o\alpha} = 0'',012$ e $\mu_{o\delta} = -0'',071$, si ha allora per le componenti del moto proprio eliocentrico dell'astro secondario

$$(3) \qquad \mu_\alpha = \mu_{o\alpha} + \mu'_\alpha = 0'',021 \quad ; \quad \mu_\delta = \mu_{o\delta} + \mu'_\delta = -0'',006 .$$

In conseguenza, la grandezza del moto proprio eliocentrico μ dell'astro secondario, secondo la nota formola dell'astronomia sferica

$$(4) \qquad \mu = \sqrt{\mu_\alpha^2 \cos^2\delta + \mu_\delta^2}$$

sarà $\mu = 0'',021$, e cioè circa quattro volte minore di quello dell'astro principale che ammonta a $0'',072$.

8. La diversità di questi moti propri ci lascia plausibilmente supporre che l'astro secondario sia molto più distante del principale. E tale supposizione sembra convalidata dal fatto che a Monte Wilson si trovò per la sua parallasse *trigonometrica* un valore negativo ($-0'',003$); ciò che indica che questa parallasse è realmente tanto piccola da riuscire inferiore agli errori di osservazione.

D'altra parte, poichè questo astro secondario è di tipo spettrale B 5, e cioè è una stella gigante bianca azzurrognola, si può logicamente presumere che la sua grandezza assoluta M sia poco diversa da $-0,7$. Ed allora (essendo la grandezza apparente m eguale ad 8,3) dalla nota formola

$$(5) \qquad M = m + 5 + 5 \log p$$

si ricaverebbe una parallasse p eguale a $0'',0016$; corrispondente ad una distanza di circa settecento parsec e cioè di circa duemilatrecento anni di luce, e certamente inferiore agli errori di osservazione che si aggirano intorno al centesimo di secondo. Per la stella principale invece si sarebbe ottenuta a Monte Wilson una parallasse spettroscopica di $0'',014$, corrispondente ad una distanza nove volte minore, onde le due stelle sarebbero realmente molto distanti tra loro, in accordo con le mie conclusioni.

(1) Cfr. B. Boss, *General Catalogue*, vol. V (Washington, 1937).

Si deve notare però che da una parallasse p di 0″,0016 e da un moto proprio annuo μ di 0″,021, secondo la formola

$$V = \frac{4{,}74\,\mu}{p} \tag{6}$$

si otterrebbe per la stella secondaria una velocità trasversale eliocentrica V di oltre settanta chilometri al minuto secondo; velocità certamente un po' forte per una stella di tipo B5. Forse lo splendore assoluto è alquanto inferiore alla grandezza —0,7 e quindi p è in realtà un poco maggiore di 0″,0016 [2].

Fisica. — *Una verifica della formula di Klein e Nishina, a 2,62 MeV* [*]. Nota di Mario Ageno, Mario Chiozzotto e Ruggero Querzoli, presentata [**] dal Socio G. C. Trabacchi.

1. Il passaggio di quanti γ attraverso la materia è accompagnato, com'è ben noto, da numerosi fenomeni d'interazione, tre dei quali sono solitamente di gran lunga prevalenti sugli altri: la diffusione per effetto Compton, l'assorbimento per effetto fotoelettrico e l'assorbimento per creazione di coppie nel campo di un nucleo. Gli altri fenomeni d'interazione tra quanti γ e materia, quali per esempio la creazione di coppie nel campo di un elettrone, l'eccitazione di un nucleo atomico, ecc., si verificano tutti con frequenza minore per alcuni ordini di grandezza.

La teoria dell'effetto Compton, basata sulle equazioni di Dirac, porta per la sezione d'urto alla nota formula di Klein e Nishina [1]. La sezione d'urto per effetto fotoelettrico è stata calcolata da Hall [2] e da Hulme e collaboratori [3] e quella per creazione di coppie da Bethe e Heitler in un fondamentale lavoro [4].

La sovrapposizione dei tre effetti, nonchè la necessità di adoperare raggi γ rigorosamente monocromatici, rende difficile la verifica sperimentale della teoria. In realtà, negli ultimi quindici anni molte misure sono state istituite a questo scopo [5] e si è potuto concludere per una buona concordanza tra teoria ed espe-

(2) Verso la fine del marzo 1949, durante la correzione delle bozze di questa Nota, è giunto all'Osservatorio di Roma il fasc. 1 del vol. IV del « Bollettino dell'Osservatorio Astronomico di Uccle » (Belgio), dove è contenuta una Nota di S. Arend sopra la medesima stella 12050 ADS. Sono stata lieta di vedere che anche Arend arriva alla medesima mia conclusione, e cioè che l'*étoile double ADS 12050 constitue une double optique.*

(*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di fisica dell'Istituto Superiore di Sanità di Roma.

(**) Nella seduta del 12 febbraio 1949.

(1) O. Klein, Y. Nishina, « Zeit. f. Phys. », *52*, 853 (1929).

(2) H. Hall, « Phys. Rev. », *45*, 620 (1934).

(3) H. R. Hulme, J. McDougall, R. A. Buchingham, R. H. Fowler, « Proc. Roy. Soc. », A *149*, 131 (1935).

(4) H. Bethe, W. Heitler, « Proc. Roy. Soc. », A *146*, 83 (1934).

(5) E. McMillan, « Phys. Rev. », *46*, 868 (1934); W. Gentner, J. Starkiewicz, « J. de Phys. et Rad. », *6*, 340 (1935); J. Halpern, H. R. Crane, « Phys. Rev. », *55*, 258 (1939); G. Groetzinger, L. Smith, « Phys. Rev. », *67*, 53 (1945); McDaniel, V. Dardel, Walker, « Phys. Rev. », *72*, 985 (1947); D. E. Alburger, « Phys. Rev. », *73* 344 (1948); C. M. Davidson, R. D. Evans, « Bull. Am. Phys. Soc. », *23*, 45 (1948).

rienza, almeno per energie dei quanti γ incidenti non superiori a 2,62 MeV. La precisione del confronto non è mai tuttavia molto notevole e si aggira in pratica, nei casi più favorevoli, solo sul 5%.

Dato che il calcolo teorico di Hulme e collaboratori ha una precisione non superiore all'8%, l'effetto fotoelettrico pone per ora un limite ad ogni tentativo di restringere i termini del confronto. Ciò è però di grande importanza per quanto riguarda l'effetto Compton: i limiti di validità della formula di Klein e Nishina sono infatti limiti di validità della teoria dell'elettrone di Dirac.

Per questo motivo, noi ci siamo proposti di verificare la formula di Klein e Nishina con la massima precisione ottenibile coi mezzi tecnici a nostra disposizione. In particolare, abbiamo rivolto la nostra attenzione alle energie superiori ai 2 MeV, perchè in questo campo di energie da un lato le misure esistenti sono meno numerose e meno precise, dall'altro la sezione d'urto per effetto fotoelettrico è o del tutto trascurabile o al più una piccola frazione delle sezioni d'urto per effetto Compton e per creazione di coppie.

Mentre le nostre misure erano in corso avanzato di esecuzione, è apparso un lavoro di C. L. Cowan [6], in cui si determinano i coefficienti di assorbimento di diversi materiali assorbenti per raggi γ di energia compresa tra 0,3 e 2,3 MeV, emessi da radioisotopi artificiali. Con errori statistici dell'ordine dell'1%, il Cowan trova differenze tra i valori calcolati e quelli osservati che si aggirano sul $4 \div 5\%$, concludendo tuttavia per la buona validità della teoria. A parte la diversa energia dei raggi γ impiegati, il metodo e la geometria adottata in queste misure recenti fanno sì che esse non si differenzino sostanzialmente dalle misure precedenti e non si può quindi (come giustamente conclude l'Autore) accettare come significative le differenze trovate.

2. Il metodo da noi adottato per la verifica sperimentale della formula di Klein e Nishina consiste nel determinare l'attenuazione subìta da un fascetto di quanti γ monocromatici nell'attraversare spessori noti di materiali assorbenti. Si ottengono in tal modo i coefficienti di assorbimento totali μ per i raggi γ in questione, di un certo numero di materiali di diverso numero atomico Z. Di qui si possono ottenere separati i coefficienti di assorbimento per effetto Compton σ, per creazione di coppie k e per effetto fotoelettrico τ, ricordando ch'essi sono rispettivamente proporzionali a Z, Z^2 e Z^4. Per un determinato materiale assorbente (per esempio il piombo) si ha infatti:

$$\sigma_0 + k_0 + \tau_0 = \mu_0 \tag{1}$$

essendo σ_0, k_0, τ_0 tre grandezze per ora incognite e μ_0 il dato dell'esperienza. Per un altro materiale assorbente si avrà poi:

$$\sigma_1 = \sigma_0 \frac{\rho_1}{\rho_0} \frac{A_0}{A_1} \frac{Z_1}{Z_0} \qquad k_1 = k_0 \frac{\rho_1}{\rho_0} \frac{A_0}{A_1} \frac{Z_1^2}{Z_0^2} \qquad \tau_1 = \tau_0 \frac{\rho_1}{\rho_0} \frac{A_0}{A_1} \frac{Z_1^4}{Z_0^4}$$

(6) C. L. Cowan, «Phys. Rev.», *74*, 1841 (1948).

e se μ_1 è il relativo coefficiente di assorbimento totale misurato:

$$(2) \qquad \left(\frac{\rho_1 Z_1}{A_1}\right)\left(\frac{A_0}{\rho_0 Z_0}\right)\sigma_0 + \left(\frac{\rho_1 Z_1^2}{A_1}\right)\left(\frac{A_0}{\rho_0 Z_1^2}\right)k_0 + \left(\frac{\rho_1 Z_1^4}{A_1}\right)\left(\frac{A_0}{\rho_0 Z_0^4}\right)\tau_0 = \mu_1 .$$

Si giunge così a scrivere tante equazioni lineari nelle 3 grandezze incognite σ_0, k_0, τ_0 quanti sono i materiali sperimentati. Se questi sono in numero maggiore di tre si può non soltanto determinare le incognite, ma anche controllare la dipendenza dal numero atomico di ciascun coefficiente di assorbimento.

Questo metodo naturalmente limitato a quel campo di energie non troppo elevate in cui k è semplicemente proporzionale a Z^2. Per ciò poi che riguarda τ la sua proporzionalità a Z^4 vale solo molto all'ingrosso: tale posizione è però per noi lecita, dato che per le energie che ci interessano l'effetto fotoelettrico non rappresenta che una molto piccola correzione.

3. Ci siamo innanzi tutto proposti di adottare il metodo ora descritto per una verifica di precisione della formula di Klein e Nishina per raggi γ di 2,62 MeV del ThC''.

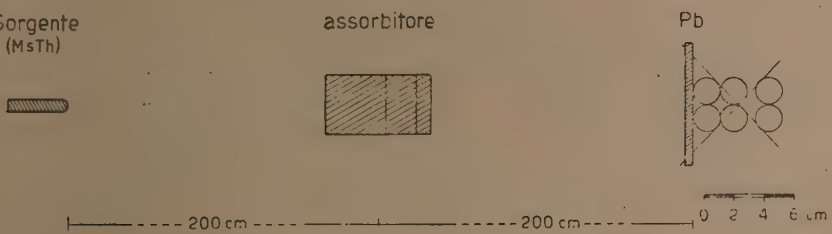


Fig. 1.

La disposizione da noi adottata per la misura dei coefficienti di assorbimento totali è rappresentata schematicamente nella figura 1. In essa la sorgente di raggi γ, l'assorbitore e il rivelatore sono stati disegnati in iscala; non sono invece in iscala per evidenti ragioni tipografiche le distanze che li separano. La distanza sorgente rivelatore è di 4 metri e a metà tra i due sono posti gli assorbitori: questa disposizione è come noto la più favorevole, quando si vuole ridurre al minimo la radiazione che pur essendo stata diffusa nell'assorbitore investe ugualmente il rivelatore (diffusione in).

La sorgente dei raggi γ è costituita da un tubetto saldato in vetro di circa 4 cm di lunghezza e del diametro di 1 cm circa, contenente 15 millicurie di mesotorio. Gli assorbitori sono di forma cilindrica di 4 cm di diametro. Il rivelatore è costituito da tre coppie di contatori di Geiger in coincidenza tripla. Contatori e registrazione sono quelli già descritti in un precedente lavoro [7]. Davanti ai contatori, come convertitore dei raggi γ trasmessi è posta una lamina di piombo dello spessore di 4 mm. L'angolo solido sotto cui è visto il rivelatore dal centro dell'assorbitore è di $5\ 10^{-4}$ steradianti. L'impiego di coincidenze

(7) M. Ageno, M. Chiozzotto, « N. C. », 1949, in corso di stampa.

triple permette di eliminare, mediante un opportuno assorbitore posto tra i contatori, le coincidenze dovute a eventuali componenti di bassa energia della radiazione γ incidente. Nel nostro caso era sufficiente a questo scopo lo spessore di parete dei contatori.

Onde ridurre al minimo il fondo di raggi γ diffusi dagli oggetti circostanti, l'apparecchio è stato montato al centro di una grande stanza, a non meno di due metri dal pavimento e dalla più vicina parete, e i sostegni portanti la sorgente gli assorbitori e i contatori sono stati ridotti al minimo di materia, compatibilmente con la stabilità.

Il « fondo » dovuto all'effetto di zero dei contatori e quello dovuto alla radiazione γ diffusa sono stati misurati separatamente nel modo seguente. Si è prima determinato l'effetto di zero dei contatori, allontanando la sorgente di raggi γ (3,05 triple/min). Poi, con la sorgente presente, si è determinato il numero di triple al minuto, interponendo un assorbitore costituito da 7 cm di Pb+7 cm di Bi. Siccome tale assorbitore lascia passare solo 1/340 dell'intensità incidente, con una piccola correzione si è potuto dedurre da questa misura il valore del fondo in presenza della sorgente (4,41 triple/min). Ai raggi γ diffusi sono dunque attribuibili 1,36 triple/min, pari a meno della metà dell'effetto di zero e integralmente imputabili alla diffusione da parte dell'aria.

Come materiali assorbenti sono stati scelti: C, Al, Cu, Sn e Pb, essendo questi, tra i materiali disponibili, quelli che davano maggiori garanzie di purezza. Per ciascuno si è rilevata una curva di assorbimento con 5 punti, determinati tutti con un errore statistico inferiore all'1%. Si è inoltre eseguita una curva di assorbimento con una paraffina di composizione chimica nota ($C_{24}H_{50}$), onde dedurre dal confronto dei coefficienti di assorbimento del C e dalla paraffina il coefficiente di assorbimento dell'idrogeno. La curva della paraffina e stata determinata con 7 punti e con la stessa precisione statistica.

Allo scopo di poter introdurre una correzione per le coincidenze casuali, per ogni punto di ciascuna curva di assorbimento, oltre alle coincidenze triple sono stati determinati separatamente: *a*) i numeri S_1, S_2, S_3 di impulsi su ciascun ramo delle coincidenze triple; *b*) i numeri D_{12} delle coincidenze doppie tra primo e secondo ramo e D_{23} delle coincidenze doppie tra secondo e terzo ramo. I poteri risolutivi delle triple ($3\ 10^{-5}$ sec) e di ciascuna coppia di coincidenze doppie ($0{,}8\ 10^{-5}$ sec e $0{,}9\ 10^{-5}$ sec rispettivamente) sono stati misurati accuratamente, in condizioni di affollamento dei contatori analoghe a quelle di misura.

Oltre alle due correzioni per il fondo e per le casuali non è stata introdotta nessun'altra correzione. Si è infatti calcolato che a causa del piccolissimo angolo solido sotto cui il rivelatore è visto dall'assorbitore la correzione per la « diffusione in » risulta nei casi più sfavorevole sempre sicuramente inferiore all' 1 %. Parimenti, si è calcolato l'ordine di grandezza della correzione da apportare alle misure a causa del tempo morto dei contatori ($< 10^{-4}$ sec), per tener conto del diverso affollamento di questi nella parte iniziale e nella parte finale di ogni curva di assorbimento. Tale correzione è risultata nei casi più sfavorevoli sempre inferiore all' 1 %, ed è stata perciò trascurata.

Tabella I.

	Z	Densità	Riduzione a $1/e$	μ sperimentale	σ (calc.)	k (calc.)	τ (calc.)	μ (calc.)
C	6	2,2	26,48 gr/cm^{-2}	$0{,}083 \pm 1{,}2 \cdot 10^{-3}$ cm^{-1}	0,0824	0,0015	—	0,0839
Al	13	2,7	26,68	$0{,}101 \pm 1 \cdot 10^{-3}$	0,0974	0,0039	—	0,1012
Cu	29	8,9	26,81	$0{,}3320 \pm 8 \cdot 10^{-4}$	0,2881	0,0256	0,0016	0,3332
Sn	50	7,3	26,50	$0{,}275 \pm 2{,}3 \cdot 10^{-3}$	0,2310	0,0353	0,0077	0,2740
Pb	82	11,3	23,93	$0{,}472 \pm 3{,}8 \cdot 10^{-3}$	0,3352	0,0842	0,0495	0,4695
$C_{24}H_{50}$	—	—	23,19	—	—	—	—	—
H	1	$8{,}987 \cdot 10^{-5}$	13,52	$0{,}666 \cdot 10^{-5} \pm 3 \cdot 10^{-7}$	$0{,}673 \cdot 10^{-5}$	—	—	$0{,}673 \cdot 10^{-5}$

Le misure relative a ciascuna curva di assorbimento sono state fatte alternando frequentemente tra loro i vari assorbitori, misurando ogni volta le singole e le doppie e alternando alle misure con assorbitore delle misure con assorbitore zero. Queste ultime e le misure di singole e di doppie ci hanno data la garanzia della costanza di funzionamento di tutto il nostro apparato per tutta la durata delle misure. I dati parziali ottenuti per ciascun punto sono stati poi confrontati tra loro sotto l'aspetto statistico e si è ottenuta così una nuova conferma a posteriori della regolarità di funzionamento di tutto l'apparato.

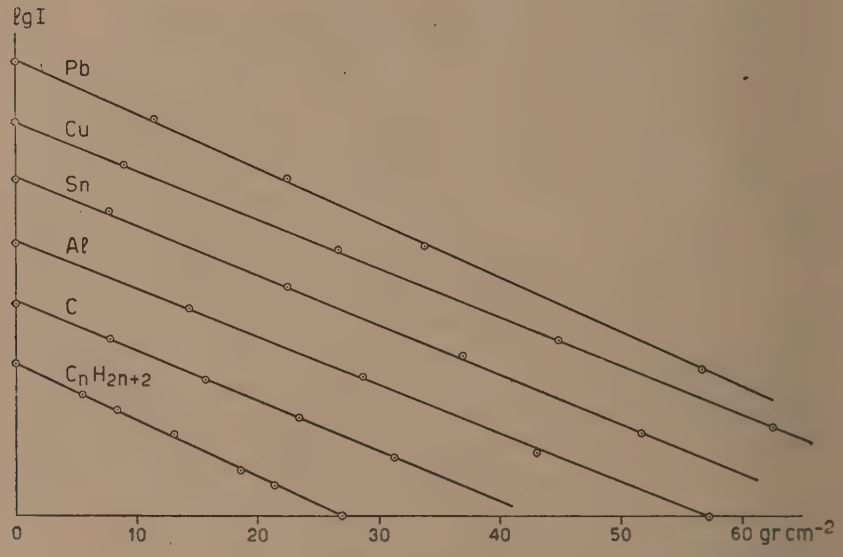


Fig. 2.

4. I resultati ottenuti sono rappresentati in iscala semilogaritmica nella figura 2. In ascisse sono riportati in gr cm^{-2} gli spessori dei vari assorbitori e in ordinate è riportato il logaritmo della frazione trasmessa (espressa in unità arbitrarie, scelte in modo da non sovrapporre tra loro le varie curve). Tra i punti relativi a ciascuna curva di assorbimento è stata interpolata una retta col metodo dei minimi quadrati e dalla pendenza della retta si è calcolato il relativo coefficiente di assorbimento. I valori ottenuti sono raccolti nella tabella I.

Nelle ultime quattro colonne abbiamo posto i valori calcolati dei coefficienti di assorbimento parziali e totali, per porli a confronto coi resultati delle misure, contenuti nella colonna quinta. Come si vede, la concordanza tra i dati della quinta e dell'ultima colonna è tale, per tutti i valori di Z sperimentati, da permettere senz'altro di asserire che entro l' 1 % i dati delle colonne sesta, settima e ottava rappresentano le soluzioni delle equazioni (2).

Per ciò che riguarda in particolare l'effetto Compton, se ne conclude che per i raggi γ di 2,62 MeV la formula di Klein e Nishina è certamente valida entro l'1 %.

Sono attualmente in corso, condotte con i criteri suesposti, misure analoghe con raggi γ di energia più elevata.

Desideriamo infine ringraziare il prof. G. C. Trabacchi per l'interessamento costantemente dimostratoci e per avere in ogni modo facilitato il nostro lavoro nel laboratorio da Lui diretto.

Chimica fisica organica. — *Sull'isossazolo* (*). Nota di GIOVANNI SPERONI e PIERO PINO, presentata (**) dal Corrisp. A. QUILICO.

Il comportamento chimico dell'isossazolo e dei suoi derivati, la cui conoscenza, iniziatasi con i lavori di Claisen (1), si è ampiamente sviluppata ad opera di Quilico e dei suoi Collaboratori (2), presenta caratteristiche che differenziano notevolmente questa serie di composti dagli altri eterociclici. La diversa influenza dei sostituenti a seconda delle posizioni che occupano, l'apertura del nucleo in ambiente alcalino, legata, potenzialmente e nel modo, alle posizioni sostituite, sono conseguenze di una variabilità del carattere aromatico, che deve essere evidentemente in relazione con la natura dei legami dell'incatenamento di atomi nucleari, in cui la contiguità dei due diversi eteroatomi può presentare una particolare sensibilità.

Con l'intento di portare un contributo alla conoscenza della struttura di questo eterociclico, abbiamo voluto approfondire lo studio delle proprietà fisiche dei composti isossazolici (3) ed in questa Nota riferiamo i risultati cui siamo pervenuti nello studio del termine fondamentale (4).

Il confronto di alcune proprietà fisiche dell'isossazolo con quelle di altri eterociclici, può dare un primo inquadramento di esso in questa classe di composti.

È evidente che l'etero atomo impartisce alla molecola caratteri specifici: gli eterociclici con un ossigeno hanno punti di ebollizione e solubilità in acqua inferiori ai corrispondenti termini azotati. La maggior solubilità in acqua del pirrolo rispetto al furano deve essere attribuita alla capacità del primo di formare legami a ponte d'idrogeno. La solubilità della piridina, del pirazolo e dell'imidazolo si deve invece ascrivere alla spiccata tendenza dell'atomo di azoto, avente un doppietto elettronico

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica-fisica dell'Università di Firenze.

(**) Nella seduta del 12 marzo 1949.

(1) «B.», 21, 1150 (1888).

(2) Per una vasta bibliografia fino al 1938 v. A. QUILICO, *Nuove ricerche sull'isossazolo.* «Atti X Congresso Intern. Chimica Pura e Applicata», Roma III, 327 (1938). I successivi lavori di Quilico e della sua scuola sono comparsi sulla «Gazzetta Chimica Italiana» e sulle «Memorie della Soc. Lombarda di Scienze e Lettere».

(3) Uno sguardo generale sull'argomento è stato presentato all'XI Congresso Intern. di Chimica Pura e Applicata, Londra, 1947.

(4) I particolari sperimentali delle determinazioni verranno riferiti in successive Note.

libero, ad associarsi con l'acqua [5] e si può mettere in relazione con ciò il loro debole carattere basico. Gli abnormi valori dei punti di ebollizione e lo stato solido a temperatura normale del pirazolo e dell'imidazolo sono dovuti, come Hückel ha dimostrato [6], a forte associazione per legami idrogenici.

TABELLA I.

Proprietà fisiche di alcuni eterociclici.

Temp. fusione	— 42°	—	—	< — 80°	70°	90°
Temp. ebollizione	115°,3	131°	31°	94°,8	188°	256°
d_4^{20}	0,982	0,948	0,936	1,076	—	—
$V_{mol.}^{20}$	80,5	70,7	72,6	64,1	—	—
Solubilità in H_2O	∞	p. sol.	insol.	abbast. solub.	solub.	m. solub.
Solubilità in benzolo . . .	∞	∞	∞	∞	abbast. solub.	p. solub.
K_b	$2{,}3 \cdot 10^{-9}$	—	—	$\sim 10^{-12}$	$3 \cdot 10^{-12}$	$1{,}2 \cdot 10^{-7}$
K_a	—	$3{,}16 \cdot 10^{-15}$	—	—	—	—

L'isossazolo, pur avendo un atomo di ossigeno in luogo di uno di azoto, mostra un comportamento simile al pirazolo per quanto riguarda la solubilità in acqua e la basicità; è più solubile in acqua a freddo del pirazolo ed il coefficiente di temperatura è positivo, ma assai inferiore a quello del pirazolo.

Il punto di ebollizione è invece molto inferiore a quello degli etorociclici a due atomi di azoto ed inferiore a quelli del pirrolo e della piridina, il che può essere attribuito alla presenza dell'ossigeno.

La crioscopia in benzolo a concentrazioni fra 0,04 mol/litro e 0,8 mol/litro (vedi tabella II) dimostra per l'isossazolo una associazione che, pur essendo assai inferiore a quella altissima del pirazolo e dell'amidazolo, raggiunge tuttavia, alla massima concentrazione sperimentata, un valore del 20 %. In diossano si verifica un'associazione che a parità di concentrazione è sensibilmente inferiore a quella in benzolo.

Le misure di tensione superficiale, effettuate col metodo di Sugden, confermano l'esistenza di una associazione; infatti pure essendo il paracoro pressochè costante, la costante di Eötwos ha un valore crescente con la temperatura ma,

(5) R. SANTI, PALIT., « Journ. Phys. Ch. », *51*, 837 (1947); HILDEBRAND, *Solubility*, « Reinhold Pub. Co. N. Y. », 1936; HILDEBRAND a. CARTER, « Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. », *16*, 285 (1930).

(6) « Zeit. phys. Ch. », Abt. A *189*, 129 (1940).

nell'intervallo considerato, sempre inferiore alla media normale (vedi tabella III). Il valore del paracoro trovato non differisce molto dal valore calcolato, [P] = 153,1; la non perfetta concordanza si inquadra nelle anomalie riscontrate nei paracori di molecole anulari da S. Kumur Ray (7).

TABELLA II.

Crioscopia in benzolo		Crioscopia in diossano	
Concentrazione in mol/litro	P. M.	Concentrazione in mol/litro	P. M.
0,0444	64,1	0.0645	63,6
0,114	66,3	0,1112	60,5
0,192	68,9	0,3523	66,8
0,400	72,7	0,9035	71,6
0,781	78,2		

TABELLA III.

Densità, tensione superficiale, paracoro e costante di Eötwos dell'isossazolo.

	0°	20°	30°	40°
d_4^t	1.0972	1,0763	1.0659	1,0546
σ (dine/cm²)	38,9	36,0	34,3	33,1
[P]	157,2	157,2	156,9	157,0
Costante Eötwos	1,91		1,98	

La temperatura critica non è misurabile sperimentalmente a causa della decomposizione del prodotto; il valore calcolato dal coefficiente di temperatura della tensione superficiale ($\gamma = -0{,}004291$) è 552,04 °K, ed è in perfetto accordo col valore ottenuto con la regola di Guldberg: 551,7 °K.

La variazione dei valori della tensione superficiale delle soluzioni acquose in funzione della concentrazione, mostra che l'isossazolo è tensioattivo; ciò prova l'esistenza nella molecola di una zona idrofoba contrapposta all'idrofilia dell'azoto.

Ci eravamo proposti di eseguire sull'isossazolo la misura della costante dielettrica, ma abbiamo dovuto desistere, in quanto l'isossazolo ha rivelato possedere una conducibilità elettrica tale da rendere impossibili le misure con l'apparecchio da noi usato.

(7) « Indian Chem. Soc. », *11*, 499 (1934).

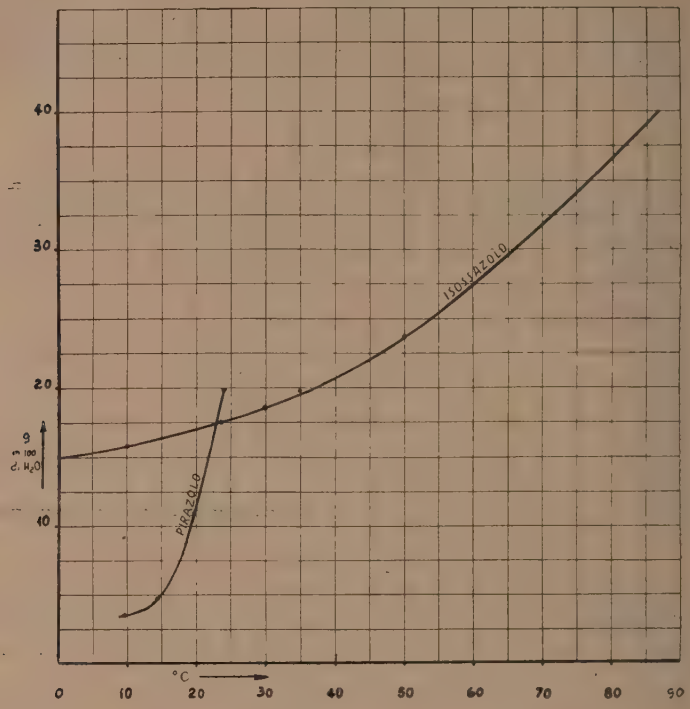


FIG 1 - SOLUBILITÀ DELL'ISOSSAZOLO IN ACQUA

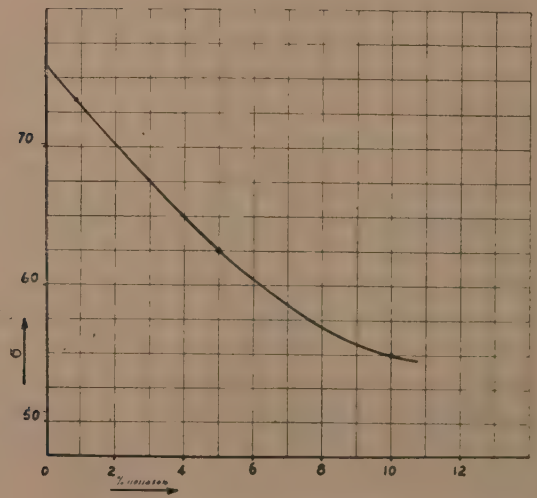


FIG. 2 TENSIONE SUPERFICIALE DI SOLUZIONI ACQUOSE DI ISOSSAZOLO

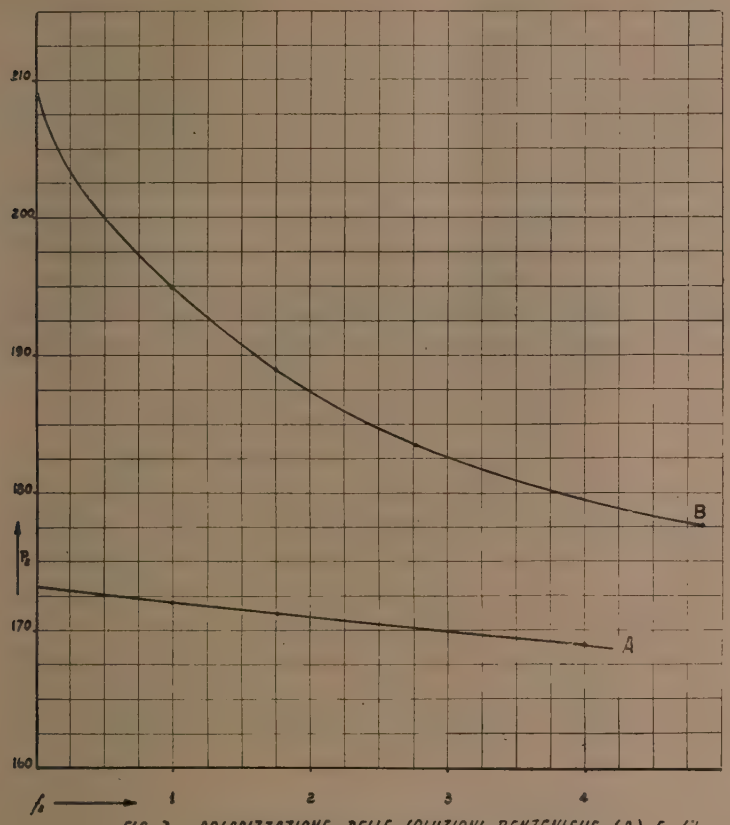


FIG 3 POLARIZZAZIONE DELLE SOLUZIONI BENZENICHE (A) E IN DIOSSANO (B)

Il momento dipolare è stato calcolato da misure di costanti dielettriche di soluzioni in benzolo e in diossano, col metodo della diluizione, assumendo come valore della $_{E}P$ quello della rifrazione molecolare.

TABELLA IV.

Momento dipolare dell'isossazolo in benzolo e in diossano.

n_D^{25}	$_{E}P(RM_D^{25})$ cm3	$_{o}P$ in benzolo cm3	$_{o}P$ in diossano cm3	μ in benzolo D	μ in diossano D
1,42446	16,43	157,3	193,1	2,76	3,01

Il valore del momento in benzolo concorda perfettamente con quello di 2,75 trovato da Jensen e Friediger [8].

È degno di nota che mentre la polarizzazione in benzolo è funzione lineare della concentrazione, la curva della polarizzazione in diossano presenta una accentuata convessità sull'asse delle concentrazioni. Una tale variazione della polarizzazione con la diluizione è, come noto, legata a una variazione nel grado di associazione, allorchè questa porta ad un abbassamento del momento dipolare. Nel caso dell'isossazolo la linearità della polarizzazione in benzolo mostra una scarsa influenza della debole associazione che abbiamo visto esistere dai dati crioscopici; il comportamento della polarizzazione in diossano, in cui, come abbiamo detto, l'isossazolo è meno associato che in benzolo, deve quindi essere attribuito ad effetto del solvente. Si può pensare che il diossano, la cui capacità associativa,

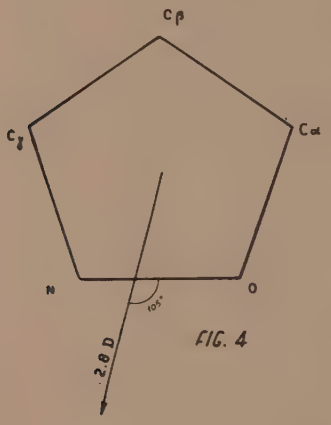


FIG. 4

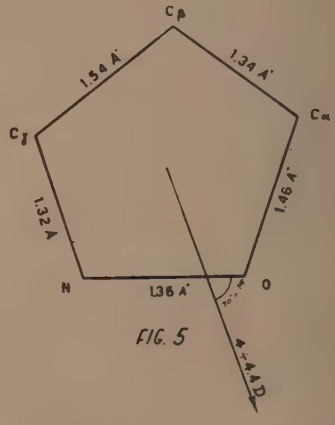


FIG. 5

dovuta alle coppie elettroniche isolate agli ossigeni, è ben nota, formi un'associazione con due molecole di isossazolo, avente una più alta simmetria e quindi un momento elettrico inferiore a quello dell'isossazolo; tale associazione, diminuendo la concentrazione, tenderebbe a trasformarsi in un complesso di una molecola con una molecola avente un momento elettrico superiore a quello dell'isossazolo stesso, cosa che effettivamente si verifica.

Il valore di 2,76 D del momento misurato in benzolo concorda assai bene con quello calcolato da Tappi e Springer [9] dai momenti trovati per i metilderivati, supponendo un nucleo a forma di pentagono regolare. Il momento dell'isossazolo, secondo tali Autori sarebbe diretto, supposto applicato al centro, verso il legame fra gli eteroatomi e facente con esso, spostato verso l'azoto, un angolo di 105°

(8) « Kgl. Danske Videnskab. Selskab. Mat. phys. Medd. », *20*, 20-1 (1943); « C. A. », *1945*, 2068.

(9) « Gazz. Chim. Ital. », *70*, 490 (1940). Si deve notare che gli Autori parlano di momento parziale del ciclo C_3NO, il che non è esatto; il momento calcolato risulta riferito al composto C_3H_3NO.

(fig. 4). Componendo i momenti di legame [10] applicati al baricentro di un modello rigido che rispetti, nelle distanze interatomiche, la formula classica e che sia chiuso con tensione distribuita, si trova per l'isossazolo un momento diretto verso il legame N—O facente con esso un angolo di circa 70° e di una grandezza di circa 4 D (fig. 5).

La differenza fra questo valore e quello trovato sperimentalmente è di un ordine di grandezza notevolmente superiore alle imprecisioni che possono derivare sia da possibili deformazioni dell'anello, sia da incertezze nei valori assunti. È evidente quindi che la formula classica non tiene conto di fattori che intervengono a spostare e soprattutto ad accorciare il momento e che appaiono invece assai evidenti considerando strutture elettroniche a sestetto aromatico. Considerando le forme limiti possibili (fig. 6) [11] si può notare che nelle strutture eccitate il momento derivante dallo spiazzamento delle cariche, accorcia, per composizione,

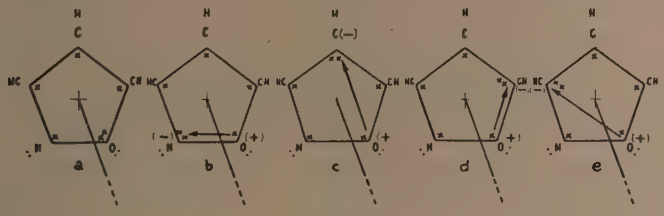


FIG. 6

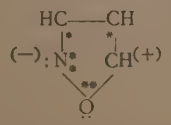
x INDICA ELETTRONI π ; • ELETTRONI σ ; LA GRANDEZZA DEI MOMENTI NON HA ALCUN SIGNIFICATO QUANTITATIVO

il momento calcolato per la forma classica, che due di esse (*b* e *e*) lo spostano notevolmente verso l'azoto, ed una sola (*d*), debolmente, verso l'ossigeno.

Si può osservare che non tutte le forme limiti sono egualmente probabili, dovendosi supporre la principale risonanza fra le strutture *a* e *b*, mentre delle tre restanti la più favorita dovrebbe essere la *d*. Tuttavia, anche ammettendo un

(10) Per i momenti di legame sono stati assunti i seguenti valori: C—H: 0,4 D; C—O: 0,8 D; N—O (dedotto dalla scala di elettronegatività): 0,5 D (PAULING, « Nature of the Chemical Bond », 1944); C=N; 2,6 D (SIDGWICK e SUTTON, « J. Chem. Soc. », *1930* (1876)).

(11) JENSEN e FRIEDIGER (loco cit.) nella interpretazione del momento dell'isossazolo attribuiscono importanza alla struttura eccitata I.



I.

Questa, oltre ad essere energeticamente assai improbabile, non trova riscontro nelle proprietà dell'isossazolo. Ci ripromettiamo di discutere più ampiamente la questione in un nostro successivo lavoro.

egual contributo alla risonanza di tutte le forme, ne risulta nel complesso che il momento della molecola viene spostato verso l'azoto.

Ben poco si può arguire sulla percentuale delle forme eccitate presenti, in quanto mancano sia dati calorimetrici che permetterebbero la valutazione diretta dell'energia di risonanza, sia valori della lunghezza effettiva dei legami del nucleo isossazolico. Tappi [12] trova, dalle misure eseguite su derivati isossazolici, una energia di risonanza di 50 Kcal/mol., valore assai alto in confronto a quello di altri eterociclici aromatici.

D'altra parte, poichè il massimo contributo al momento calcolato per la formula classica è dato dal legame C = N, si deve supporre che sia questo a subire la modificazione più profonda con diminuzione della elettronegatività dell'azoto rispetto al carbonio. Ciò può essere attribuito, oltre che all'effetto della risonanza, ad una protomeria che è resa molto verosimile da alcune caratteristiche dell'isossazolo e specialmente dalla sua relativamente alta conducibilità elettrica allo stato anidro.

Si deve supporre che il protone si trasferisca all'azoto anzichè all'ossigeno in quanto in tutte le forme eccitate l'ossigeno è sempre positivato e quindi incapace di legare il protone; si deve ricordare a questo proposito che Milone e Tappi [13] identificarono negli spettri Raman di alcuni derivati dell'isossazolo una riga attribuibile al legame N—H. D'altra parte la maggiore capacità di protomeria all'azoto che non all'ossigeno è confermata dal fatto che il furano non è conduttore mentre è nota la conducibilità della piridina.

Deducendo le forme protomere possibili da tutte le strutture mesomere si osserva che solo quelle derivanti dalle forme *a* e *b* sono ammissibili e di esse sono più favorite quelle che interessano l'idrogeno adiacente all'azoto (fig. 7). L'effetto della risonanza, provocando un allungamento dei doppi legami della formula classica, ed un accorciamento dei legami $C_\gamma - C_\beta$, e N—O, regolarizza il ciclo pentatomico, in modo che minori errori si commettono rappresentando l'isossazolo come un pentagono regolare, anzichè con strutture ipotetiche asimmetriche.

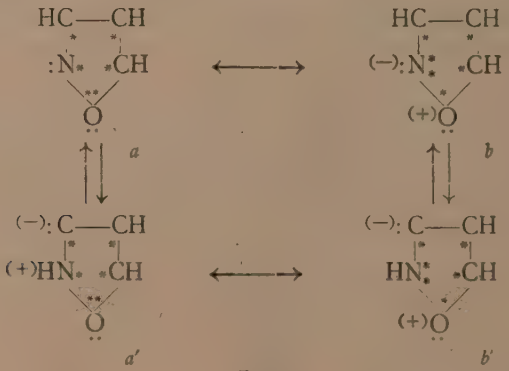
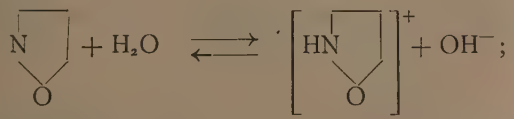


Fig. 7.

(12) «Gazz. Chim. Ital.», *70*, 414 (1940).
(13) «Gazz. Chim. Ital.», *70*, 359 (1940).

La presenza della forma *a'* rende conto della conducibilità dell'isossazolo in quanto è ammissibile una dissociazione:

Nonostante tale capacità di dissociazione, le soluzioni acquose hanno un debole carattere basico, in quanto l'isossazolo come le altre basi azotate, può dar luogo in presenza di acqua all'equilibrio:



la costante di dissociazione basica ($K_b = 10^{-12}$) è leggermente inferiore a quella del pirazolo [14].

Anche il fenomeno di associazione col solvente che si riscontra nelle soluzioni di isossazolo in diossano trova una plausibile interpretazione solo nella formazione di legame idrogenico fra il gruppo NH delle forme protomere e gli atomi di ossigeno della molecola di diossano.

La possibilità di formazione di legami idrogenici con molecole d'acqua, da parte dei gruppi NH, favorisce la solubilità in essa dell'isossazolo unitamente alla capacità di associazione, da parte del doppietto libero all'azoto, delle strutture mesomere e della fondamentale.

Ci riserviamo di esaminare in un prossimo lavoro l'interpretazione che lo schema della struttura elettronica che abbiamo esposto per l'isossazolo, consente nei riguardi del comportamento chimico di questo eterociclico e dei suoi derivati.

Chimica biologica. — *La reazione di condensazione acetonica e del butanolo alcalino* (F_2) *nello studio dei composti piridinici ad* N *quaternario derivati dalla nicotinamide o dalla* N_1*–metilnicotinamide nel fegato di ratto* [*]. Nota di ARTURO BONSIGNORE e LETIZIA BEVILACQUA, presentata [**] dal Corrisp. U. LOMBROSO.

È noto da diversi anni che l'N_1–metilnicotinamide in butanolo alcalino (per NaOH) origina un composto intensamente fluorescente (F_2) che viene usato per il suo dosaggio nell'urina [1] e nei tessuti [2]. Non si conosce esattamente la natura chimica del composto fluorescente; l'ipotesi che finora ha ottenuto maggiori

(14) DEDICHEN, « Ber. », *39*, 1831.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica biologica dell'Università di Genova.

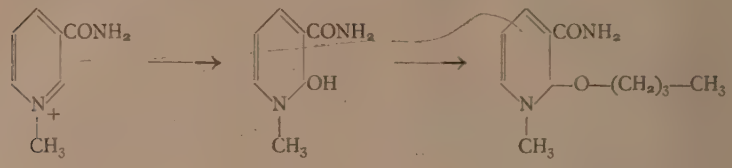
(**) Nella seduta del 12 marzo 1949.

(1) V. A. NAJJAR e R. W. WOOD; « Proc. Soc. Exp. Biol. and Med. », *44*, 386 (1940).

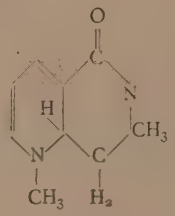
(2 W. A. PERLZWEIG, M. C. BERNHEIN e F. BERNHEIN, « J. Biol. Chem. », *150*, 401 (1943).

consensi è quella che si tratti di un etere butilico del carbinolo derivato dell'N_1–metilnicotinamide per azione dell'idrato sodico [3].

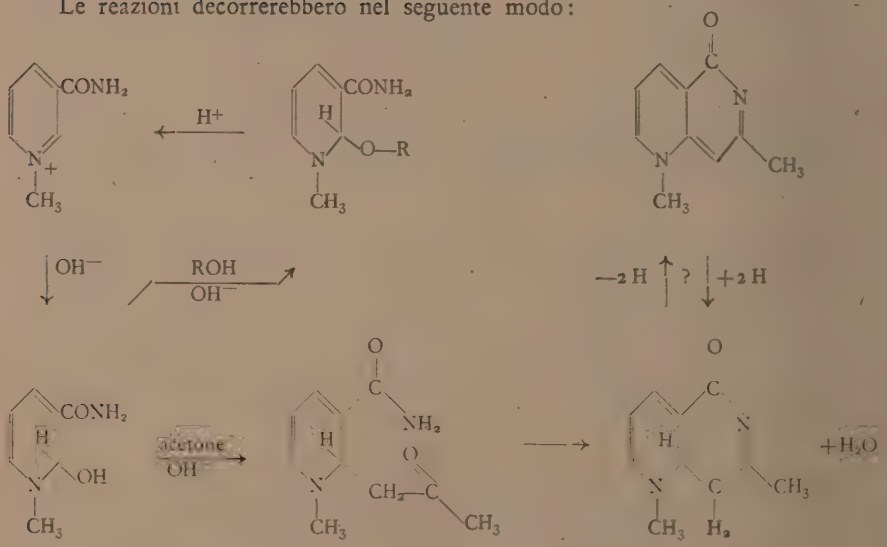
Le reazioni potrebbero decorrere nel seguente modo:



Più recentemente Huff [4] ha dimostrato che l'N_1–metilnicotinamide condensata in ambiente alcalino con acetone dà origine ad un composto, ancora più fluorescente dell'F_2, che sarebbe:



Le reazioni decorrerebbero nel seguente modo:



La reazione del butanolo alcalino e quella di condensazione acetonica sembrerebbero, secondo tali schemi, entrambe legate alla presenza nell'anello piridi-

(3) V. A. Najjar e Scott, «Bull. John Hopkins Osp.», *74*, 378 (1944).
(4) «J. Biol. Chem.», *167*, 151 (1947).

nico dell'N quaternario; infatti soltanto con tale forma si può ammettere la necessaria formazione del carbinolo che, secondo gli schemi riportati, appare indispensabile per la sintesi dei due composti fluorescenti.

Composti biologici, finora sicuramente individuati tra i prodotti metabolici, contenenti N piridinico in tale forma sono il DPN e il TPN ossidati e la N_1–metilnicotinamide. Mentre per quest'ultima è bene accertata la sua capacità di dare entrambe le reazioni, sia pure con differente intensità [5], vi è invece discordanza per quanto riguarda il comportamento dei piridinnucleotidi, che, secondo Najjar [1], darebbero anche la reazioni butanolica, mentre Levitas e collaboratori [6] lo escludono decisamente, tanto da proporre per il differenziamento dei PN dalla N_1–metilnicotinamide nei tessuti l'impiego contemporaneo delle due tecniche.

Abbiamo eseguito i seguenti tre gruppi di esperienze:

a) comportamento della reazione di condensazione acetonica e di condensazione butanolica in soluzioni pure con aggiunta di dosi variabili di N_1–metilnicotinamide oppure di DPN.

b) comportamento delle due reazioni negli estratti di fegato di ratti trattati con nicotinamide oppure con N_1–metilnicotinamide, condizioni sperimentali che portano all'accumulo nel fegato di un composto dosabile con la reazione acetonica [7], [8], che precedenti ricerche suggeriscono di individuare nei piridinnucleotidi nel primo caso e nella N_1–metilnicotinamide nel secondo [8];

c) comportamento della reazione butanolica, nel fegato di ratto trattato con N_1–metilnicotinamide, prima e dopo trattamento ossidativo cerico di Robinson [9], che trasforma le diidroforme nelle corrispondenti forme ossidate.

La prima serie di ricerche ha dato risultati perfettamente concordanti con quelli di Levitas e collaboratori [6]: infatti tanto il DPN quanto la N_1–metilnicotinamide dànno la reazione acetonica, mentre la reazione butanolica è data solamente dalla N_1–metilnicotinamide. Sperimentando su basi equimolecolari di DPN e di N_1 metilnicotinamide la florescenza del composto acotonico del DPN è risultata circa doppia di quella ottenuta con N_1–metilnicotinamide, risultato concordante oltre che con Levitas anche con recentissime analoghe conclusioni di Komberg [10]. Ammettendo quindi che la formazione dei composti fluorescenti avvenga secondo gli schemi riportati, le suddette esperienze dimostrano che la sostituzione del gruppo CH_3 legato all'N piridinico con la catena che su tale N è legata nel DPN permette ugualmente la formazione del composto di condensazione butanolica.

(5) J. W. HUFF e W. A. PERLZWEIG, « J. Biol. Chem. », *167*, 157 (1947).

(6) N. LEVITAS, J. ROBINSON, F. ROSEN, J. W. HUFF, W. A. PERLZWEIG, « J. Biol. Chem. », *167*, 169 (1947).

(7) A. BONSIGNORE e L. BEVILACQUA, « Boll. Soc. It. Biol. Sperim. », *23*, 1216 (1947).

(8) A. BONSIGNORE e C. RICCI, « Boll. Soc. It. Biol. Sperim. », *24*, 510 (1948).

(9) J. ROBINSON, N. LEVITAS, F. ROSEN, W. A. PERLZWEIG, « J. Biol. Chem. », *170*, 653 (1947).

(10) A. KOMBERG e O. LINDBERG, « J. Biol. Chem. », *176*, 665 (1948).

TABELLA I.

Valori di fluorescenza ottenuti condensando con acetone o con butanolo estratti di fegato di ratti trattati per via parenterale con nicotinamide (100 mgr. per 100 gr di peso) o con dosi equivalenti di N_1-metilnicotinamide.

Trattamento	Estratto di fegato corrispondente a mgr.	Fluorescenza (% filtro Jena BB_4)	
		Condensazione acetonica	Condensazione butanolica
Nicotinamide da 1^h	22	13	2
» » 3^h	15	5,5	0
» » $3^h\ 30'$	19	13	0
» » $4^h\ 30'$	12	17	1
» » $4^h\ 30'$	17	15	1
» » $5^h\ 30'$	21	36	1,5
» » 7^h	12	14	0
» » 7^h	12	10,5	1
» » 7^h	20	23,5	0
» » 8^h	25	36	1
» » 9^h	15	24	2
» » 12^h	22	45,5	0
» » $14^h\ 30'$	14	21	0,5
N_1-metilnic. » 1^h	23	58	23
» » 1^h	23	48	19
» » 1^h	23	60	26

Nella seconda serie di ricerche, i cui risultati sono riportati nella tabella I, si dimostra chiaramente che la reazione butanolica non è aumentata nel fegato di ratto trattato con nicotinamide, mentre lo è invece la reazione acetonica e che tanto la reazione acetonica quanto la butanolica sono fortemente aumentate nel fegato di ratto trattato con N_1-metilnicotinamide.

Questo risultato concorda con quanto ottenuto con altre tecniche, e che cioè il trattamento con dosi equivalenti di nicotinamide o di N_1-metilnicotinamide porta all'accumulo nel fegato di ratto di piridinnucleotidi o di N_1-metilnicotinamide secondo curve distinte e caratteristiche [11].

Dal terzo gruppo di ricerche, riportate nella tabella II, risulta che il trattamento cerico ossidativo non porta variazioni alla fluorescenza ottenuta con la reazione butanolica, ciò che fa concludere che la N_1-metilnicotinamide non ha possibilità di trasformarsi nel fegato di ratto nella corrispondente diidroforma.

(11) In corso di stampa.

TABELLA II.

Comportamento della reazione butanolica, da parte della N_1-metilnicotinamide accumulata nel fegato, prima e dopo ossidazione cerica. Animali trattati con N_1-metilnicotinamide (100 mgr. per 100 gr. di peso) da un'ora.

N. esperimento	Fegato mgr.	Valori di fluorescenza (% filtro Jena BB_4)	
		prima della ossidazione	dopo la ossidazione
1	10	17	17
2	23	49	49
3	23	23	25

Per quanto riguarda i particolari di tecnica e le condizioni sperimentali da noi scelte, rimandiamo alle altre Note pubblicate sul « Bollettino della Società Italiana di Biologia Sperimentale ».

Chimica biologica. — *Ricerche sulla natura del composto dosabile come* N_1*-metilnicotinamide nel fegato di ratto trattato con nicotinamide* (*). Nota di ARTURO BONSIGNORE e CARLO RICCI, presentata (**) dal Corrisp. U. LOMBROSO.

Nel 1947 osservammo che l'incubazione aerobica di fettine e poltiglie di fegato di ratto portava alla rapida scomparsa del composto dosabile con la tecnica di Huff e Perlzweig [1] che mette in evidenza composti piridinici ad N quaternario quali i piridin nucleotidi ossidati e l'N_1-metilnicotinamide. Tale demolizione non era inibita da KCN, As_2O_3, NaF, acido malonico e florizina [2]. In seguito a tale risultato, che si verificava anche quando il composto nel fegato era notevolmente aumentato per effetto del trattamento con una forte dose di nicotinamide, sospettammo che il composto accumulato nel fegato non fosse N_1-metilnicotinamide quantunque l'eliminazione urinaria di quest'ultima fosse cospicua in tali condizioni sperimentali. Infatti l'unica reazione conosciuta di demolizione del N_1-metilnicotinamide è la sua trasformazione nell'α piridone corrispondente, operata dall'enzima di Knox e completamente inibita dai cianuri [3].

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Biologica dell'Università di Genova.
(**) Nella seduta del 12 marzo 1949.
(1) « J. Biol. Chem. », *167*, 157 (1947).
(2) A. BONSIGNORE, C. RICCI, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », *23*, 1220 (1947).
(3) « J. Biol. Chem. », 163, 699 (1946).

Successive ricerche hanno confermato che effettivamente non si trattava di N_1–metilnicotinamide e hanno suggerito di identificare il composto con i piridin nucleotidi (4).

TABELLA.

Effetto inibitore della nicotinamide sulla demolizione del composto dosabile come N_1-metilnicotinamide in omogeneizzati di fegato di ratto (omogeneizzato = 2 : 100 - incubazione 1 ora a 38° C – gas aria – volume finale cc 10).

Valori espressi in γ di N_1–metilnicotinamide per g di fegato.

N.	Mezzo	Inizio	Dopo un'ora	Demolizione %
1	H_2O	53	0	100
2	»	64	0	100
3	»	320	0	100
4	»	386	0	100
5	Nicotinamide 0,164 M	494	400	19
6	»	587	456	23
7	»	339	245	23
8	Nicotinamide 0,328 M	68	68	0
9	»	60	60	0
10	»	472	472	0
11	»	541	541	0
12	»	563	556	2

Le esperienze 1–2–8–9 sono eseguite su fegato di ratti normali; le altre con fegato di ratti trattati da vario periodo di tempo con 100 mg per 100 g di peso di nicotinamide.

Le presenti esperienze (vedi tabella), eseguite su omogeneizzati di fegato nei quali la demolizione del composto è rapidissima, dimostrano chiaramente che la nicotinamide inibisce e, in concentrazione opportuna, blocca completamente la demolizione del composto.

Tenendo presente quanto è noto circa l'azione inibitrice della nicotinamide sulla DPN^{asi} e TPN^{asi} (5), i nostri risultati ci dànno un'ulteriore prova che l'aumento epatico del composto dosabile con la tecnica di Huff e Perlzweig è attribuibile ai piridin nucleotidi.

(4) A. BONSIGNORE, C. RICCI, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », *24*, 171 e 510 (1948).
(5) P. J. G. MANN, J. H. QUASTEL, « Biochem. J. », *35*, 502 (1941).

Botanica. — *L'Ecologia dell'Abete bianco appenninico.* – I. *Morfologia e biologia.* Nota di ANDREA GIACOBBE, presentata (*) dal Socio G. NEGRI.

Fin dal 1928 e successivamente nel 1930 (1), segnalando taluni particolari aspetti della vita dell'Abete bianco nel nostro paese, affacciammo l'opinione che l'Abete appenninico dovesse considerarsi come un'entità più o meno distinta dal tipo, la quale segnerebbe il termine di transizione fra l'*Abies alba* dell'Europa Centrale, specie mesofila, ombrivaga e microtermica, e le diverse specie del Mediterraneo sue vicarianti, a tendenze xerofile e più o meno lucivaghe.

Questo concetto fu autorevolmente ammesso da Chiarugi (2) e da Negri (3), i quali hanno convenuto che l'Abete appenninico appare come una razza geografica e biologica. Le nostre successive ricerche effettuate in questi ultimi venti anni, nel corso di numerosissime visite a quasi tutte le abetine appenniniche di origine tanto naturale che culturale, e gli studi comparsi frattanto sull'argomento, ci consentono ulteriori osservazioni e conferme che, in attesa di essere riunite in un lavoro organico aggiornato, ci servono frattanto, con alcune note preliminari, per una messa a punto dei diversi aspetti che presenta l'ecologia dell'Abete sull'Appennino.

Un importante carattere morfologico particolare, che abbiamo notato nell'Appennino meridionale, è dato dall'assenza più o meno completa delle tasche resinifere sulla corteccia degli abeti giovani.

Nel Mezzogiorno abbiamo osservato pure una frequente riduzione di lunghezza degli aghi, e spesso la perdita più o meno marcata della loro disposizione distica sul ramoscello – fatti osservati pure da Banti (1939) a Cortino nell'Abruzzo –, e l'estremità degli aghi sui rami sterili tondeggiata od ottusa invece che bifida; inoltre una certa irregolarità, tuttavia non molto diffusa, nella disposizione geometrica dei verticilli dei rami.

Possiamo confermare per tutto l'Appennino una forte produzione di rami, i quali poi persistono a lungo sui fusti, anche dopo morti e anche in bosco folto.

(*) Nella seduta del 12 marzo 1949.

(1) A. GIACOBBE, *Sull'ecologia dell'Abete bianco di Camaldoli*, « Arch. Botan. », p. 165 (1928); e GIACOBBE, *Studi sull'Abete rosso e sull'Abete bianco in Italia*, 1930, cap. X; cfr. anche GIACOBBE, *Sull'alternanza e sulla distribuzione delle formazioni arboree in Carnia*, « Arch. Botan. », p. 246 (1926).

(2) A. CHIARUGI, *La vegetazione dell'Appennino nei suoi aspetti d'ambiente e di storia del popolamento montano*, « SIPS », p. 31 (1939).

(3) G. NEGRI, *Residui di un'abetina originaria a M. Amiata: Il Pigelletto*, in « Studi Etruschi », pp. 394, 397 e 418 (1944).

Delle abetine di Corsica aveva notato qualcosa di simile Rikli (1903): fogliame più breve e più denso, e ramificazione densa e serrata.

I fusti si presentano per lo più con statura ridotta, tozzi e assai rastremati: caratteri che ci sembra si manifestino già in Abruzzo, e vadano accentuandosi verso sud. Nei Pirenei Orientali, Gaussen (1944) ha trovato una pubescenza biancastra sui rametti, mentre nelle abetine dei Vosgi questa pubescenza è nera. L'intera pianta presenta anzitempo i segni di precoce vecchiezza: licheni e muschi pendenti dai rami, cima stroncata o appiattita, frequente marciume del pedale. Questo carattere, già manifesto in Toscana, si accentua visibilmente in Calabria.

Il potere germinativo del seme scende, dapertutto sull'Appennino, a un livello bassissimo nelle annate e nei luoghi dove l'estate decorre molto secca (Mezzogiorno); ha riferito Gavioli (1934) che in Lucania la fruttificazione è scarsissima. Assai importante è la segnalazione di Chiarugi (1936) circa le differenze strutturali trovate fra il polline fossile dell'Abete toscano, che si avvicina al tipo di polline dell'*Abies cephalonica*, e quello dell'Abete tipico centro-europeo.

Più notevoli ci sembrano le precisazioni che possiamo fornire su taluni caratteri biologici, e anzitutto su quello importantissimo dell'eliofilia. Sul bisogno di luce che i giovani Abeti presentano nell'Appennino in misura ben maggiore che nell'Europa centrale, e che segnalammo per la prima volta nel 1928, siamo in grado di dare una conferma definitiva per la intera Penisola. Il fatto è inequivocabilmente deducibile dall'assenza di novellame all'ombra del bosco, e dalla sua presenza solo lungo gli orli, nelle chiarie e negli spazi vuoti: perfettamente l'opposto di quanto si osserva nelle Alpi e nell'Europa centrale, dove è caratteristica dell'Abete bianco la forte sciafilia.

Conferme di questo fatto – importantissimo per l'ecologia della specie, e per le derivanti applicazioni di Silvicultura – sono state date da Guinier (1934) per l'Appennino meridionale, da Banti (1935, 1939, 1942) per il Teramano e il Molise, da Carullo (1940) per il Gariglione nella Sila Piccola, da Pizzigallo (1941) per Serra S. Bruno nel Catanzarese. Analoghe conferme sono pubblicate anche per le Abetine della Francia sud-orientale che risentono del clima mediterraneo: per la regione dell'Aude nei Pirenei Orientali da Lapie (1928), Tessier (1929 e 1935), De Falvelly (1933), De Coincy (1934), Gaussen (1931 e 1944) anche per i Pirenei catalani; Rol (1937), Hess (1935); per il Roussillon da Gaussen (1934); per le Alte Alpi da Cousin (1939).

In passato esprimemmo già l'opinione che l'abetina di Camaldoli (Casentino) dovesse assegnarsi, almeno per gran parte, al piano submontano. Senza esaurire qui la questione dell'altimetria dell'Abete appenninico, ripresa da Zangheri nel 1942 e poi da Negri nel 1944, siamo però in grado di portare oggi nuovi elementi di studio per tutto l'Appennino.

Fiori (1908) aveva dato come limite inferiore generale dell'Abete bianco sulle Alpi la quota media di m. 800, limite indicato anche da Mader (1895) per i Pirenei Orientali dove, alla confluenza del Rébenty con l'Aude, l'Abete scende nella lecceta a m. 500 (De Falvelly, 1933) e a 450 a monte di Quillan (Gaussen).

Pure da Gaussen (1934) sappiamo che nel Roussillon la grande abetina di Prats de Mollo giaceva nel piano della lecceta, che oggi l'ha sostituita interamente.

Nell'Appennino ligure l'Abete può scendere a m. 325 (Sendtener in Solla, 1875); l'abetina « Pian del Gallo » in valle Bormida sta fra 500 e 800 m. (Voce, 1934). In Corsica si trova anche a 900 m. nella Foresta di Aitone (Briquet 1910), ma in certi luoghi vive insieme al Pino marittimo e all'*Eucalyptus* (Roy 1934), e presso Bastelica a 600 m. (Roy in Rol, 1937).

Per la Toscana, già Caruel (1871) indicava l'Abete anche della regione submontana, benchè meno frequente. Numerose sono le stazioni basse, naturali o culturali, a noi note: così l'abetina del Pigelleto sul M. Amiata sta, da antichissima data, fra 750 e 800 m.; da M. Senario, da Vallombrosa e nel Casentino l'Abete si diffonde naturalmente nei sottostanti boschi cedui fino a 700 e anche fino a 600 m.; a Pratolino presso Firenze si coltiva la magnifica abetina Demidoff, con esemplari colossali, a 450–500 m.; si trova a Scanzano fino a 450 (Solla, 1893) e a Cortona a m. 250 (Solla, 1892); si coltiva a Bilancino nel Mugello a m. 270; nasce a 220 m. a Poggio al Colle nella Fattoria Bagnani (Incisa Valdarno); forma boschetti rigogliosi a m. 170 presso Valpromaro di Camajore; si trova nel castagneto della Marnia a 150 m. nel Valdarno Super. (Montelucci, 1943); forma bosco bellissimo nella Fattoria Orsetti lungo il ruscello Marmino alle falde dei M. Pisani fra i Lauri e i Lecci a m. 150–180; forma la magnifica abetina di Varramista, nata naturalmente da piante coltivate, presso Marti (Pisa) a m. 60. Infine, un gruppo di 25–30 Abeti di 65–75 anni vive prosperosamente al livello del mare nella pineta litoranea di Migliarino Pisano, su suolo con falda idrica a breve profondità.

Nel Molise le abetine naturali di Monte Castelbarone e di Collemeluccio hanno il loro odierno limite inferiore rispettivamente a m. 1.000 e 850, ma dovevano in un recente passato scendere più in basso. Sul Gargano l'Abete si riproduce naturalmente nelle chiarie della faggeta anche a m. 750. Gavioli informa (1947) che sul Pollino l'Abete occupa « la regione submontana–montana »; informa pure (1934) che nel Foy di Ruoti comincia a trovarsi a 800 m.

In Calabria l'Abete s'incontra già a 900 m. presso Mendicino, a 850 presso Serra S. Bruno e Brognaturo, a 800 presso Fagnano. Strobl aveva indicato a m. 1100 il limite inferiore della nota stazione sulle Madonie dell'Abete siciliano.

Abbiamo fondati motivi per credere che in molti altri luoghi sull'Appennino numerose stazioni di bassa quota (nei Castagneti, nei Lecceti ecc.) sono state distrutte perchè sostituite dai coltivi.

I casi sopra riportati indicano senz'altro come l'Abete bianco, definito autorevolmente dal Mattfeld (1926) « elemento *montano* centro-europeo », scende spesso lungo l'Appennino nell'Orizzonte submontano del *Quercetum*. Più che dalle quote altimetriche, questo può essere chiaramente confermato dal tipo di flora accompagnatrice: è una dimostrazione alla quale dobbiamo per brevità rinunziare. Non possiamo peraltro esimerci perlomeno dal ricordare che parecchie delle stazioni basse meridionali – e alcune di quelle toscane – sono toccate, sulle pendici rivolte a sud, da non pochi elementi della Macchia mediterranea (*Erica*

arborea, Calycotome spinosa, Spartium junceum, Cistus salvifolius, C. incanus, Quercus Ilex, ecc.).

L'acquisizione di un temperamento più o meno eliofilo, che significa possibilità di vivere sotto l'azione diretta dei raggi solari, fuori dell'ambiente umido del bosco, e la discesa, in atto o tendenziale, dall'Orizzonte montano del *Fagetum* nell'Orizzonte submontano del *Quercetum* [4], meno elevato e perciò ordinariamente meno piovoso, meno brumoso e meno freddo, sono in complesso manifestazioni ormai accertate della biologia dell'Abete bianco sull'Appennino le quali devono interpretarsi come l'espressione di un particolare carattere di termo–xerofilia che l'Abete acquista penetrando dal centro dell'Europa nel bacino mediterraneo, e che lo collega ecologicamente agli altri Abeti mediterranei.

Questo carattere biologico, insieme con le modificazioni morfologiche sopra ricordate (più manifeste nel Mezzogiorno), ci permettono di considerare ormai definitivamente l'Abete appenninico come una razza biologica distinta, ammessa, come si è già detto, da Negri e da Chiarugi, che possiamo ormai indicare come *Abies alba* Mill. var. *apennina*.

Probabilmente questa razza appenninica deve considerarsi estesa ai contigui territori della Francia mediterranea, poichè concordano pienamente con la nostra prima Memoria del 1928 le segnalazioni pubblicate, posteriormente a questa data, da Botanici e Forestali francesi: Guinier ha parlato di razze fisiologiche di Abete bianco nelle Alpi Meridionali francesi e nell'Appennino Meridionale, che si discostano dal tipo « per accentuate differenze sopratutto in quanto concerne la resistenza ai freddi e il bisogno di luce » [5]; Rol ritiene che l'Abete dei Pirenei costituisca « una razza fisiologica lucivaga » [6]; Cousin ha espresso la stessa opinione per le Alte Alpi: « razza fisiologica di Abete bianco adattata al clima meridionale, nettamente più xerofila del tipo, e che non teme la luce » [7]; infine Chevalier ha avvertito che nelle medie montagne delle Alpi Marittime vive « una razza particolare di Abete bianco semieliofila e passabilmente xerofila » [8].

(4) A. Chiarugi (op. cit.), ritiene che l'Abete appenninico si trovi intercalato fra il *Quercetum* e il *Fagetum*, ma secondo le nostre ricerche di un ventennio, l'Abete può – s'intende, in condizioni favorevoli – penetrare assai nello spessore altimetrico del *Quercetum*.

(5) P. Guinier, *Préface* in A. Barbey, *Une relique de la Sapinière méditerranéenne. Le Mont Babor*, p. x (1934).

(6) R. Rol, *Contribution à l'étude de la répartition du Sapin (Abies alba)*. « Ann. Ecole Nation. des Eaux et Forêts », p. 256 (1937).

(7) Cousin, *Les Sapinières des Hautes Alpes*, « Revue des Eaux et Forêts », p. 224 (1939).

(8) Chevalier, *Etudes des facteurs permanents de l'incendie de forêts dans les Alpes Maritimes*, « Revue des Eaux et Forêts », p. 498 (1947).

Botanica. — *Il significato del tappeto delle antere al suo primo differenziarsi: Osservazioni in « Idesia polycarpa » Maxim* (*). Nota di ROBERTO CORTI, presentata (**) dal Socio G. NEGRI.

In una precedente Nota (1) ho esposto il procedimento della sterilizzazione del sesso ♀ nella pianta ♂ di *Idesia polycarpa* Maxim., albero dioico della famiglia delle *Flacourtiaceae* (2). In questa Nota intendo svolgere alcune considerazioni fondate sullo studio del procedimento di sterilizzazione del sesso ♂ nella pianta ♀.

Lo sviluppo del fiore ♀ di *Idesia polycarpa* è esattamente lo stesso di quello del fiore ♂ fino al momento in cui ci si avvicina al termine delle divisioni di moltiplicazione del tessuto sporigeno delle antere: dovrebbero poi intervenire nelle stesse cellule le divisioni meiotiche, ma nella pianta ♀ le antere non sono mai capaci di superare la soglia della meiosi e degenerano tutte, senza alcuna eccezione nei numerosissimi fiori dell'albero che ho avuto a disposizione.

Per comprendere bene le modalità della degenerazione delle antere nel fiore femminile è necessario tratteggiare prima il loro comportamento nella pianta ♂, dove esse seguono lo sviluppo normale.

Al termine dello stadio ermafrodita (comune tanto alla pianta ♂ quanto alla pianta ♀) gli stami constano di una grossa antera e di un corto filamento, della lunghezza su per giù dell'antera stessa. La parete dell'antera è composta di uno strato epidermico, allo stato meristematico, con caratteri che poco lo distinguono dagli strati sottostanti, meccanico e transitorio, anch'essi allo stato embrionale. Anche il tappeto non ha ancora acquistato caratteristiche differenziali sue proprie, mentre al di dentro di esso le cellule archisporiali, presso al termine delle loro divisioni di moltiplicazione, spiccano per la densità del loro citoplasma. Queste cellule archisporiali sono distribuite in masse, a seconda di come ha proceduto la loro moltiplicazione dagli elementi iniziali, e al confine con il tappeto hanno un andamento piuttosto irregolare, determinando qua e là delle insenature in cui si addentrano le cellule del tappeto, unite alle cellule archisporiali più periferiche da lamelle mediane, ancora chiaramente evidenti (cfr. fig. 1). Ad un certo momento le cellule archisporiali subiscono un vistoso accrescimento in volume, il loro citoplasma si fa più chiaro, meno denso, il loro nucleo diviene vescicoloso, ed in esso sono visibili i primissimi movimenti della profase eterotipica. Le cellule del tappeto subiscono una pressione dal dilatarsi del tessuto archisporiale ed in

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Botanico della Università di Firenze.

(**) Nella seduta del 12 marzo 1949.

(1) R. CORTI, *Sul valore dello strato epidermico che tappezza la faccia ventrale del carpello delle Angiosperme. Osservazioni in « Idesia polycarpa » Maxim.* « Rendiconti della Accademia Nazionale dei Lincei », Classe Scienze fis., mat. e nat., vol. VI, pp. 135-139 (1949).

(2) Vedi anche: R. CORTI, *Sul dioicismo di « Idesia polycarpa » Maxim.* « Nuovo Giornale Botanico Italiano », n. s., vol. LV, 1948 (in corso di pubblicazione).

un primo momento ci appaiono appiattite in senso radiale (fig. 2). Solo in seguito, al termine della divisione omeotipica e quando si individualizzano le 4 microspore in ciascuna cellula madre del polline, le cellule del tappeto si espandono molto in senso radiale e si protendono nella cavità dell'antera, acquistando quelle caratteristiche che ne distinguono lo stadio secernente durante la maturazione dei granelli pollinici (fig. 3).

Lo sviluppo delle antere nel fiore ♀ procede normalmente fino al termine delle divisioni di moltiplicazione delle cellule archisporiali: fino a questo momento non si potrebbe distinguere un'antera del fiore ♀ da una del fiore ♂ (fig. 1). Prima però che le cellule madri del polline subiscano le trasformazioni preliminari alla meiosi – che abbiamo descritto nel fiore ♂ – interviene nel fiore ♀ la loro degenerazione secondo le seguenti tappe:

1° Le prime a degenerare sono le cellule del tappeto, che si trasformano in piastrelle necrotiche, fortemente avide di colore (fig. 4). Uno spazio vuoto viene a crearsi fra le cellule archisporiali, ancora di aspetto normale, e le cellule dello strato transitorio, anch'esse di aspetto normale, come le cellule dello strato meccanico e le cellule epidermiche.

2° Parenchimatizzazione e poi rapida degenerazione delle cellule archisporiali (figg. 5 e 6), mentre anche le cellule degli strati meccanico e transitorio degenerano. Le cellule epidermiche si differenziano rapidamente (fig. 5), e così pure quelle del connettivo e del filamento. Lo stame si trasforma in staminodio, che non è altro che uno stame in miniatura, in cui il tessuto fertile è sostituito da un ammasso di materiale necrotico (figg. 6 e 7).

Il meccanismo di sterilizzazione del sesso ♀ nella pianta ♂ e del sesso ♂ nella pianta ♀ di *Idesia* rivela un procedimento delicato, che colpisce specificatamente, uccidendo per primo un dato tessuto; mi sembra quindi ovvio che se ne debba dedurre che quel tessuto deve avere una importanza di primo ordine nell'organizzazione dell'organo in questione in quel dato stadio del suo sviluppo. Non si può nascondere una certa meraviglia nel constatare che la degenerazione colpisce con tanta precisione nell'antera lo strato del tappeto in uno stadio precoce, in cui si poteva pensare che non avesse nessuna particolare funzione, abituati come siamo a considerare la funzione del tappeto esclusivamente in rapporto alla maturazione dei granelli pollinici. Eppure la degenerazione delle cellule del tappeto è la prima a manifestarsi ed è del tutto specifica, tanto da seguire le cellule fino nel loro insinuarsi nelle insenature fra le masse delle cellule archisporiali. Non è possibile sbagliarsi, dicendo che la degenerazione segue l'andamento delle cellule del tappeto, che è quanto mai irregolare, prima che le cellule madri entrino in sinapsi. Dobbiamo quindi concluderne che lo strato del tappeto, prima della nota funzione, connessa alle caratteristiche sue proprie, deve avere una funzione essenziale da cui dipende il destino del tessuto sporigeno.

Questo mio reperto non rimane isolato nella letteratura. È questo un momento in cui si assiste ad un pullulare di ricerche sul fotoperiodismo e sull'influenza che la luce ha nel condizionare o meno il passaggio dalla fase vegetativa alla fase riproduttiva in una data specie, e nel normale andamento della fase riproduttiva, una volta iniziata.

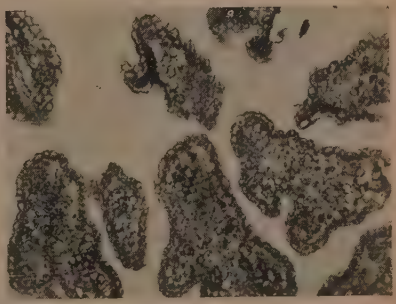
1

2

3

4

5



6

7

Fig. 1. – *Idesia polycarpa* Maxim. Pianta ♀: sez. longit. di antera al termine dello stadio ♀ (× 250).
Fig. 2. – Pianta ♂: sez. longit. di antera con c. m. del polline all'inizio della profase eterotipica (× 250).
Fig. 3. – Pianta ♂: sez. trasv. di antera alla fine della microsporogenesi (× 250).
Fig. 4. – Pianta ♀: sez. longit. di antera all'inizio dello stadio ♀, con tappeto degenerato (× 250).
Fig. 5. – Pianta ♀: sez. longit. di antera con c. m. del polline parenchimatizzate (× 250).
Fig. 6. – Pianta ♀: sezione di un gruppo di stami in vario grado di degenerazione del tessuto fertile (× 97).
Fig. 7. – Pianta ♀: porzione di ovario e antera in sezione, con tessuto fertile degenerato (× 97).

Le esperienze condotte da Madsen (1947)[3] su *Cosmos sulphureus* Cav. var. *Klondike*, pianta a giorno corto, hanno mostrato che per ottenere il passaggio dalla fase vegetativa alla fase riproduttiva è necessario l'accorciamento del giorno. Le esperienze cominciarono nello stato di Florida (Talahassee) il 31 luglio 1946 con la germinazione dei semi. Le piantine si trovarono in condizioni di esperimento al 21 settembre, ciascuna con 5 paia di foglie. Un lotto tenuto in condizioni naturali, cioè con naturale lunghezza del giorno, fiorì abbondantemente, e così pure un altro che fu sottoposto a periodi di 8 ore di luce alternati con 16 ore di oscurità. Tre lotti che furono sottoposti a giornate rispettivamente di 14, 19 e 24 ore di luce non fiorirono affatto. Altri lotti ebbero rispettivamente dei fotoperiodi di 8 ore per 6, 7, 8, 10 e 14 giorni; in seguito ciascun lotto, diviso in tre lotti secondari, ricevette dopo il trattamento a giorno corto un trattamento a giorno lungo, rispettivamente di 14, 19 e 24 ore. Le piante di questi ultimi 6 lotti mostrarono, con il loro comportamento, di aver ricevuto dal trattamento preliminare a giorno corto un impulso a fiorire, tanto da produrre dei bocci; però, per il successivo trattamento, mostrarono la tendenza a ritornare allo stato vegetativo, trasformandosi in « fiori vegetativi » o in strutture intermedie fra fiori normali e germogli vegetativi.

Si ebbero così bocci con degenerazione degli organi sessuali e specialmente delle antere a diversi gradi di sviluppo, a seconda della lunghezza del periodo fotoinduttivo (a giorno corto) ed a seconda dello stadio in cui venivano a trovarsi, al momento dell'inversione del trattamento, i diversi fiori di uno stesso capolino e di una stessa pianta.

Madsen ha condotto su di essi uno studio microscopico, dal quale emerge che i primi cambiamenti degenerativi, che appaiono nelle antere che vanno incontro alla sterilizzazione, interessano il tappeto e cominciano nello stadio di moltiplicazione delle cellule archisporiali. Via via che procede la degenerazione delle cellule del tappeto, il loro citoplasma diviene cromofilo, e le cellule divengono di forma ovale o più frequentemente rimangono strette, schiacciate, o divengono angolose nel loro contorno. In coincidenza con questo comportamento del tappeto, si hanno due tipi di reazioni degenerative delle cellule sporigene. Nei casi in cui i bocci fiorali sono stati estremamente colpiti nel loro carattere riproduttivo, le cellule archisporiali non iniziano le profasi ed il loro citoplasma diviene vacuolizzato, con un nucleo fortemente contratto; nei casi invece in cui i bocci fiorali sembrano essere meno lesi nelle loro possibilità riproduttive, il citoplasma delle cellule archisporiali può talora apparire normale e la profase iniziarsi regolarmente: ma la degenerazione compare allo stadio binucleare e i cromosomi possono vedersi navigare nel citoplasma colorato di nero delle cellule madri, oppure altre anormalità possono riscontrarsi, come perdita di cromosomi ecc. Quando il fiore mostra di essere stato colpito soltanto poco nella sua facoltà riproduttiva, non si riscontra perdita di cromosomi, nè disturbi della meiosi, bensì degenerazione nelle tetradi di microspore, ed anche questa è messa dall'A. sempre

(3) G. C. MADSEN, *Influence of photoperiod on microsporogenesis in Cosmos sulphureus Cav. var. Klondike.* « Botanical Gazette », vol. 109, pp. 120–132 (1947).

in relazione con lo stato della degenerazione delle cellule del tappeto, che quando è abbastanza forte, non consente che molte microspore si sviluppino interamente, quando invece la degenerazione del tappeto è minore, la parete delle microspore può anche cominciare ad ispessirsi e le spore divenire angolose. L'A. mette chiaramente in rilievo che la degenerazione del tessuto sporigeno è ad ogni stadio dello sviluppo assolutamente preceduta e accompagnata da un marcato deterioramento delle cellule del tappeto, e solo occasionalmente ha trovato fatti disturbi della meiosi in tutte le cellule del tappeto mostravano soltanto gli stadi iniziali della degenerazione citoplasmatica.

Ho riportato con una certa estensione i risultati sperimentali di Mulkern, perchè questi, anzi, in parte da me ottenuti a Roma, mi permettono di avanzare l'ipotesi che il tappeto abbia una funzione veramente essenziale per l'organizzazione del tessuto sporigeno. Ammesso questo, appare logico che in Zostera marina, pianta dioica, la sterilizzazione del sesso β possa attuarsi colpendo specificamente il tappeto con la naturale conseguenza della degenerazione delle cellule madri del polline.

La degenerazione del tappeto avviene in modi precoci ed il quadro di Zostera è esattamente simile a quello descritto da Mulkern per Lilium, nel suo più adatto materiale sperimentale, ma non per tanto da essere ripetuti a simiari negazioni.

La funzione del tappeto non può quindi più ritenersi limitata alla maturazione delle microspore specialmente durante il periodo dell'ispessimento della loro membrana, ove dal loro trasformarsi in granelli pollinici, esse cessano assai presto del tempo ed è una funzione assai importante, perchè connessa coll'integrità del tappeto ci appare il passaggio degli stami dalla vita vegetativa alla vita riproduttiva e poi il regolare andamento della meiosi.

Gli studiosi del fotoperiodismo parlano di uno stimolo o ormone che si muoverebbe dalle foglie per passare alle gemme, e genericamente si ammette che debba trattarsi di sostanze di natura proteica; però l'esistenza di queste sostanze specifiche non è certo indiscutibile (cfr. Loeb, 1924)[1]. In tal caso il tappeto come strato limitante l'archisporio β, potrebbe rappresentare il tessuto di origine (o di ultima trasformazione?) e quindi il distributore della sostanza in questione nell'interno sac tappo anzi di arrivare alla destinazione definitiva.

Comunque la sua importanza per gli scambi nutritivi tra tessuto archesporiale e ambiente per la sua stessa posizione di strato limitante, e l'abbondanza in cui rimane l'archisporio quando il tappeto è degenerato (fig. 4) è un fatto evidente, che si impone anche ad una superficiale osservazione.

[1] Per la bibliografia del fotoperiodismo cfr. Loeb, Experimental Physiology. Chapter entitled Internal Secretions and Correlation. Columbia University Press, e Nuovo Giornale Botanico Italiano, n. s., vol. LIV, pp. 145-171 (1924).

Zoologia. — *La diafisi e l'estremità distale del femore di «Streptocara crassicauda»* (*). Nota II di SERGIO BEER e ALFREDO SACCHETTI, presentata (**) dal Socio S. SERGI.

In una precedente Nota (1) e sono esaminati l'orientamento fisiologico del femore di *Streptocara crassicauda* Pallas (forma maggiore) ed è stata descritta la struttura trabecolare dell'estremità prossimale in rapporto alla morfologia esterna. L'orientamento assunto per tutto il femore è basato sul piano comune d'appoggio del condilo e della testa, come è rappresentato nelle figg. 1 e 2 della Nota citata.

Per analizzare più a fondo, in relazione al suddetto orientamento, le condizioni fisiologiche della diafisi in rapporto alle estremità e ai piani meccanici d'orientamento precedenti, si sono studiate – come già per il femore umano (2) – delle sezioni trasversali dell'osso in posizione ortogonale sulla trochlea e condilo-tibia. Tali sezioni corrispondono ai livelli seguenti:

un livello in corrispondenza del punto intermedio (intercondiloideo) sul margine inferiore del piano popliteo (linea diafiso-epifisaria): questo livello è stato omesso nello studio del femore femm. data il suo minore interesse agli effetti proposti;

un livello in corrispondenza del punto centrale sulla formazione del piccolo trocantere;

quattro livelli intermedi ai precedenti equidistanti fra loro lungo il corpo della diafisi;

un livello prossimale a metà altezza sulla faccia laterale del grande trocantere, misurata al punto più alto del suo margine superiore e a quello più basso segnato dall'andamento della cresta del medio gluteo;

un livello laterale intermedio fra quello passante per il punto mediale intercondiloideo e il punto d'appoggio condiloideo.

Per la nomenclatura ne sono risultati i seguenti sette livelli successivi della testa ai condili:

1. Livello mammillo-anteriore;
2. Livello mammillo-posteriore;
3. Livello diafisario superiore;
4. Livello diafisario medio-superiore;
5. Livello diafisario medio-inferiore;

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di zoologia dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta del 12 febbraio 1949.

(1) S. BEER e A. SACCHETTI, Forma trabecolare del femore di «Streptocara crassicauda». «Rend. Acc. Lincei», ser. VIII, vol. IV, fasc. 1 (1948).

(2) A. SACCHETTI, L'orientamento fisiologico del femore umano nella sua normale ortostatica, «Atti Acc. Lincei», ser. VIII, vol. I, fasc. 2 (1946); A. SACCHETTI, Ricerche sulla struttura trabecolare e sull'orientamento del femore umano, «Atti Acc. Lincei», ser. VIII, vol. II, fasc. 4 (1947).

6. *Livello diafisario inferiore*;
8. *Livello condiloideo* (3).

I contorni delle singole sezioni corrispondenti ai suddetti livelli, proiettati ortogonalmente sulla traccia dei piani d'orientamento sagittale e frontale, sono riprodotti nelle figg. 1 e 2. È possibile il confronto con le corrispondenti sezioni del femore umano, raffigurate nelle tav. XXXIII e XXXIV della Memoria citata a nota 2.

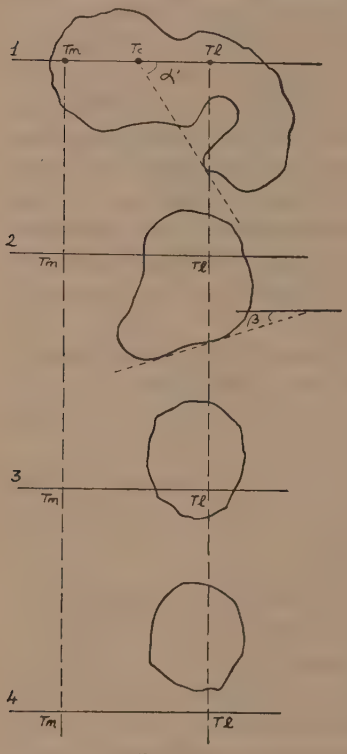


Fig. 1.

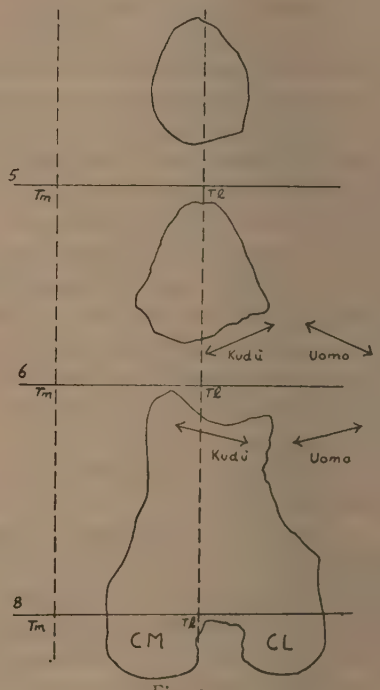


Fig. 2.

Nella sezione macrotrocanterica (livello 1) si osserva la profondità della fossa macrotrocanterica che, come si è detto nella precedente Nota, separa completamente fra loro i sistemi trabecolari cefalico e macrotrocanterico. L'angolo indicato con α' è determinato dall'incontro del piano frontale con la linea passante per la proiezione del centro meccanico interno della testa (Tc) e tangente posteriormente al contorno del grande trocantere.

Nella sezione microtrocanterica (livello 2) è misurabile l'angolo di torsione β all'incrocio del piano frontale con la tangente postero–laterale alla sezione.

Delle sezioni diafisarie 3, 4, 5, 6 è interessante rilevare la reciproca posizione topografica di lateralità rispetto ai piani sagittali. Esse infatti sono sempre pressocchè dimezzate dal piano sagittale passante per il punto estremo laterale della superficie di articolazione cefalica (Tl). Ciò rivela la quasi verticalità d'orien-

(3) Come è stato detto, il livello 7 (*popliteo inferiore*) non è stato considerato.

– Estremità distale di un femore sinistro visto medialmente.

– Sezione sagittale attraverso il condilo mediale di un femore sinistro (porzione residuata medialmente).

– Estremità distale di un femore sinistro visto distalmente, la figura a sinistra rappresenta la superficie articolare, la figura a destra la sezione trasversale del medesimo condotta a metà altezza dei condili.

– Estremità distale di un femore sinistro visto posteriormente, la figura a sinistra rappresenta la superficie esterna dell'osso, la figura a destra la sezione frontale del medesimo condotta su un piano intermedio fra condili e troclea come è indicato da una delle linee che attraversano frontalmente la figura di sinistra in *C*.

N. B. – La riduzione delle figure è a 3/5 del naturale. Per la spiegazione dei piani d'orientamento cfr. la precedente Nota di S. Beer e A. Sacchetti su *S strepsiceros*.

tamento della diafisi rispetto ai piani sagittali e questa è in rapporto con le peculiari condizioni statiche di tutto l'osso, come è già stato messo in evidenza nella precedente Nota. Nel kudù infatti la testa del femore si proietta interamente sul condilo mediale, mentre nell'uomo tale proiezione cade lateralmente, con conseguente spostamento delle linee di resistenza alla pressione del peso del corpo. Pertanto tutta la morfologia dell'osso è adattata alle sue peculiari esigenze meccaniche. In particolare nella sezione 6 è da notare la sagoma subtriangolare del contorno con un vertice rivolto anteriormente e bisecato dal piano sagittale di *Tl*; inoltre il segmento laterale del margine posteriore è quasi rettilineo e obliquo lateralmente, mentre l'inverso accade nel femore umano, sempre in rapporto alle già menzionate opposte condizioni meccaniche. Tale diversità di comportamento fra *Strepsiceros* e uomo è pure rilevabile dall'ultima sezione nell'andamento del margine anteriore della troclea. L'enorme sviluppo antero–posteriore di questa è evidentemente in relazione con le permanenti condizioni di obliquità antero–posteriore dell'arto, la statica e il peso corporeo dell'animale.

Questi dati descrittivi consentiranno una più precisa comparazione con altri vertebrati.

La lunghezza totale dell'esemplare di femore illustrato è di 322 mm. dalla testa ai condili (nella normale posizione usata in antropometria da Broca). L'altezza diafisaria, misurata secondo la distanza t_2–t_7 fra il livello microtrocanterico e il livello popliteo inferiore, è di mm. 222.

TABELLA I.

Valori centesimali degli angoli di torsione.

Angolo	*S. strepsiceros*	Uomo (secondo A. SACCHETTI)		
		Romani	Sardi	Fuegini
α'	63°	42°	43°,6	57°,7
β	20°	7°,3	10°,7	7°.3

TABELLA II.

Promerie tangenziali anteriori.

Livello	*S. strepsiceros*	Uomo (valori medi secondo A. SACCHETTI)		
		Romani	Sardi	Fuegini
f_2	+ 13	+ 10.0	+ 9,0	+ 1,5
f_3	+ 26	+ 19,8	+ 19,1	+ 10,3
f_4	+ 38	+ 26,3	+ 28,4	+ 20,4
f_5	+ 49	+ 28,6	+ 33,2	+ 26,8
f_6	+ 53	+ 31.3	+ 35,2	+ 30.3

TABELLA III.

Promerie tangenziali posteriori.

Livello	*S. strepsiceros*	Uomo (valori medi secondo A. SACCHETTI)		
		Romani	Sardi	Fuegini
$_2f$	— 30	— 24,3	— 25,7	— 33,5
$_3f$	— 8	— 6,8	— 6,0	— 15,3
$_4f$	+ 6	+ 0.4	+ 1,8	— 4,0
$_5f$	+ 12	+ 3,3	+ 6,9	+ 2,8
$_6f$	+ 12	+ 4,3	+ 9.4	+ 5,5

TABELLA IV.

Aree delle sezioni diafisarie (in mm².).

Sezione	*S. strepsiceros*	Uomo (medie secondo A. SACCHETTI)			
		Romani	Sardi	Fuegini	Uomo medio
a_2	1227	1139,6	995,9	990,9	1042,1
a_3	758	528,0	460,9	438,0	489,7
a_4	716	441,0	383,4	354,7	393,0
a_5	760	440,8	397,8	373,0	403,9
a_6	1017	639,4	522,8	558,8	573,7

TABELLA V.

Indici analitici di robustezza.

Livello	*S. strepsiceros*	Uomo (medie secondo A. SACCHETTI)			
		Romani	Sardi	Fuegini	Uomo medio
a'_2	5,53	3,58	3,23	3,36	3,39
a'_3	3,41	1,67	1,47	1,47	1,52
a'_4	3,23	1,38	1,25	1,20	1,26
a'_5	3,42	1,38	1,27	1,24	1,29
a'_6	4,58	2,03	1,68	1,90	1,89

TABELLA VI.

Indici sintetici di robustezza.

Livelli	*S. strepsiceros*	Uomo (medie secondo A. SACCHETTI)			
		Romani	Sardi	Fuegini	Uomo medio
$A'_{3,4}$	6,64	3,04	2,69	2,67	2,80
$A'_{5,6}$	8,00	3,40	2,96	3,14	3,17
$A'_{3,6}$	14,64	6,44	5,65	5,81	5,97
$A'_{2,6}$	20,17	10,04	8,85	9,14	9,34

Gli altri dati metrici, confrontati coi corrispondenti valori medi del femore umano in tre differenti gruppi e cioè di romani, sardi e fuegini (secondo Sacchetti), sono riportati nelle tabelle da I a VI. Essenzialmente si constata che:

1° l'angolo α' di torsione macrotrocanterica è in *Strepsiceros strepsiceros* sensibilmente maggiore rispetto all'uomo;

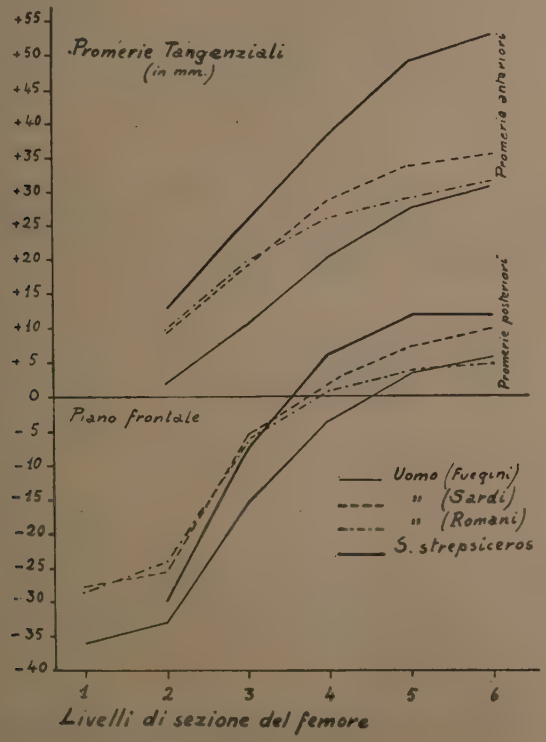


Fig. 3.

2° anche l'angolo β di torsione macrotrocanterica è maggiore in *Strepsiceros*, il che rivela un'accentuata rotazione postero-laterale del piccolo trocantere, in evidente connessione con i muscoli che vi prendono attacco, con la stazione normale dell'arto e con la verticalità della diafisi;

3° le promerie anteriori e posteriori di *Strepsiceros*, come risulta anche dalla fig. 3, indicano un mancato spostamento in avanti della diafisi nel suo tratto distale: tale comportamento è particolarmente saliente per le promerie anteriori, in conseguenza dell'ampiezza antero-posteriore della troclea;

4° le aree delle sezioni diafisarie del femore di *Strepsiceros* superano alquanto quelle delle corrispondenti sezioni del femore umano. Le medesime, rapportate alla lunghezza diafisaria, costituiscono per ciascun livello gli indici analitici di robustezza della tabella V: i loro valori sono molto superiori in *Strepsiceros* che nell'uomo, in relazione con la mole dell'animale e con le sue peculiarità statico-motorie. Le stesse considerazioni si possono trarre dalla tabella VI, ove sono sommati gli indici analitici di differenti livelli.

Per quanto concerne la trabecolatura dell'estremo distale, raffigurata nella tavola, si può notare ch'essa risponde tanto alla relativa piccolezza dei condili quanto alla notevole espansione antero-posteriore della troclea. Il significato funzionale di questa struttura rimane dimostrato quando si tenga presente l'osservazione affacciata nella precedente comunicazione (ved. Nota I) circa il rapporto fra la grandezza dei condili e la grandezza della testa. Per la terminologia dei fasci trabecolari e per ulteriori confronti con l'uomo, ci si può riferire alle numerose illustrazioni contenute nella Memoria citata a nota 2.

Zoologia. — *Identificazione del « Triton intermedium » G. Costa, 1871, col « Triturus italicus » (Peracca), 1898* (*). Nota di MARIO GALGANO, presentata (**) dal Socio N. BECCARI.

Sebbene nella sua « Fauna Salentina ossia enumerazione di tutti gli animali che trovansi nelle diverse contrade della provincia di Terra d'Otranto e nelle acque de' due mari che la bagnano contenente la descrizione de' nuovi o poco esattamente conosciuti », pubblicata a Lecce nel 1871 dalla Tip. Edit. Salentina, il dott. Giuseppe Costa, per dirla con lui, talfiata protesti d'esser lungi dal credere adeguata la possa degli omeri e delle gambe sue e si rimetta al purgato giudizio de' dotti, io ritengo – per quanto non mi senta un dotto dal giudizio purgato - ch'Egli vi abbia descritta per primo (cfr. pp. 80-82 e p. 146), battezzandola con l'insipido nome di *Triton intermedium*, quella specie che ventisette anni dopo il Peracca (1898) meglio descrisse e denominò *Molge italica*.

La descrizione lasciataci da G. Costa (1871, pp. 80-82), finora sfuggita all'attenzione degli erpetologi, mi sembra per altro sufficiente a non lasciare

(*) Ricerche eseguite nell'Istituto di Anatomia Comparata dell'Università di Firenze.
(**) Nella seduta del 12 marzo 1949.

dubbi in proposito. Credo opportuno, data la rarità del testo, di trascriverne almeno la diagnosi in latino.

« 2. Tritone intermedio. *Tritone* (sic!) *intermedium* G. Costa. Salamandre intermédiaire, fr. Volg. Lucerteddra d'acqua [1].

« *Triton epidermide loevi, superne pallide fusco-virescenti, nigro maculato, subtus pallide flavo-roseo, nigro punctato praeter infera capitis parte, sic etiam crista caudae inferiore, femoribusque. Artubus anterioribus quadridigitatis, posterioribus digitis quinque praeditis.* G. Costa ».

Gli animali descritti furono trovati dall'A. in marzo dentro una fossa artificiale a 5 Km. circa da Campi (presso Lecce), verso il suo S. S. O., e che « forma quasi il confine fra l'agro di Campi e quello di Salice » (di qui, forse, il nome d'intermedio).

L'A. esclude che i suoi esemplari appartengano al Tritone punteggiato, e nota che i loro caratteri distintivi non corrispondono a quelli dai classificatori assegnati ad alcuna delle specie da lui conosciute di Tritoni.

Il seguente confronto fra i dati fornitici da G. Costa e quelli pubblicati dal Peracca è molto significativo, per la somiglianza che emerge dalle due descrizioni.

1. DATI RILEVATI DALLA DESCRIZIONE DEL « TRITON INTERMEDIUM » DI G. COSTA:

A) Lunghezza totale dei più grandi individui catturati non oltre i 7 cm.

B) Pelle levigata.

C) Mancanza di righe nere pel capo, a differenza del Tritone punteggiato.

D) *Superne pallide fusco-virescenti, nigro maculato.*

Parte superiore del corpo di un bruno chiaro verdastro, con delle piccole macchie quasi rotonde, di un bruno più fosco; le laterali della schiena sono oblunghe trasversalmente; colorito che si estende nei lati della coda, su le gambe e fin su le dita.

E) *Subtus pallide flavo-roseo, nigro punctato praeter infera capitis parte, sic etiam crista caudae inferiore, femoribusque.* Inferiormente di un giallo arancino pallido con numerosi e minuti punti neri; sotto il capo però non vedesi punteggiatura alcuna.

F) La cresta superiore della coda partecipa del colorito della pelle superiore; la inferiore è pallida senza macchie.

2. DATI RILEVATI DALLA DESCRIZIONE DELLA « MOLGE ITALICA » DI PERACCA:

A) Lunghezza totale negli esemplari di Potenza: ♂ mm. 61; ♀ mm. 74; negli es. di Lecce: ♂ mm. 46, ♀ mm. 50.

B) La pelle, negli individui in livrea di nozze, è più o meno liscia.

C) Sul capo non si osservano macchie [2].

D) Nel ♂ in amore la superficie superiore del capo e del dorso, tra i due spigoli cutanei laterali, e della coda, è di un bruno-verdastro-terroso ora assai

(1) Nell'indice alfabetico l'A. scrive, a p. 146: «Lucerta d'acqua, *Triton intermedium*, *m.*, p. 80».

(2) Dalle mie osservazioni risulta che il capo può presentare dei punti, dei piccoli tratti, o delle macchiette di forma irregolare, di un bruno scuro.

scuro, ora chiarissimo; ... il dorso è ora immacolato ora più o meno coperto da punti di un bruno scuro intenso disposti irregolarmente ... Sui lati della coda ... delle macchie piccole tondeggianti od irregolari bruno verdastre scure o grigio plumbee ... La faccia superiore delle estremità è di color bruno verdastro come il dorso, punteggiata di bruno scuro ... Le dita sono anellate di nero in modo più o meno evidente. – Nella ♀ ... le parti superiori sono di un bruno olivastro ora scuro, ora chiaro, ora minutamente punteggiato di grigio plumbeo. Sul dorso, lungo lo spigolo cutaneo dorso laterale, si notano macchie e punti neri in serie lineari irregolari, che talora confluiscono formando una linea festonata ... La coda, dello stesso colore delle parti superiori, presenta dei grossi punti o macchie nere ... Il margine inferiore della coda, immacolato, è di color giallo ocraceo.

E) La gola è interamente di un colore giallo ocraceo intenso, più o meno scuro, immacolato o con scarsi punti nerastri sui lati e sulla piega golare; il ventre è di un giallo d'uovo, talora leggermente ocraceo, molto più chiaro della gola, con grossi punti neri ora numerosi e disposti irregolarmente su tutta la superficie, ora disposti sui lati in due linee assai regolari.

F) Nei ♂♂ la metà inferiore della coda nella parte basale e tutto il margine inferiore della coda è di un color bianco giallognolo ... sul margine inferiore della coda nella metà basale si osservano delle grandi macchie rotonde di un nero più o meno intenso. – Nelle ♀♀ il margine inferiore della coda, immacolato, è di un color giallo ocraceo. – Cfr. alla lettera *D*) per la parte superiore della coda.

La descrizione data da G. Costa mi fa escludere senz'altro che possa trattarsi di esemplari immaturi di Tritone crestato. Qualche incertezza potrebbe invece sussistere nei riguardi delle ♀♀ di *Triturus vulgaris meridionalis* (Boul.); ma queste hanno di regola le parti superiori d'un bruno spesso tendente al rossiccio e la gola macchiata, mentre il ventre è spesso segnato di giallo aranciato o di giallo pallido soltanto sulla linea mediana. Inoltre i due sessi del *T. vulg. meridionalis* presentano una cresta dorsale, che G. Costa non ricorda nei suoi esemplari, ed è appunto assente nella *Molge italica*.

Infine, è noto che il *Triturus vulgaris meridionalis* (Boul.) manca nelle Puglie, in Basilicata e in Calabria [3]. Nelle Puglie, dove il Costa ha trovato la nuova specie, esiste solo un altro Tritone, il *Triturus cristatus carnifex* (Laur.), che l'A. (1871, p. 80) conosceva. Per controllo, mi sono servito, fra l'altro, anche dei tipi di *Molge italica* (1 ♂ e 1 ♀ del marzo 1898: M. 3570, Coll. 363 (1898); donati dallo stesso Peracca, ed esistenti nella Collezione dei Vertebrati Italiani del Museo di Storia Naturale di Firenze) provenienti da S. Cataldo presso Lecce, cioè da una località non tanto distante da quella in cui G. Costa ha trovato i primi esemplari della specie in questione. Attualmente sto cercando di rintracciare i tipi del Tritone intermedio; ma ancora non vi sono riuscito, e temo di fallire nell'impresa.

(3) Una ♀ di Serra S. Bruno (Calabria), che esiste nella Collezione dei Vertebrati Italiani (M. 1977. Coll. 249. 1884) del Museo di Storia Naturale di Firenze, ed è classificata come *Triton taeniatus* (Schneid.), appartiene invece indubbiamente al *Triturus italicus* (Peracca).

D'altra parte la denominazione di *Triton intermedium* G. Costa, 1871, è nata morta, in quanto che è omonima di quella assegnata nel 1829 dal de Serres (*Geogn. terr. tert.*, p. 118) a un Gasteropodo [4].

Ritengo pertanto che il *Triturus italicus* (Peracca), 1898, in Mertens e Müller, « Abh. senck. naturf. Ges. », *41*, p. 12 (1928) abbia i seguenti sinonimi:

Tritone (sic!) *intermedium* G. Costa, Fauna salentina, p. 80 (1871).

Triton taeniatus partim (esemplari di Palizzi) Giglioli, *Elenco Mamm: Uccelli e Rett.*, p. 15 (1880).

Triton vulgaris subsp. *meridionalis* partim (esemplare di Campobasso) Camerano, *Monogr. Anf. Urod. Ital.*, p. 37 (1884).

Molge italica Peracca, « Boll. Mus. Zool. Anat. Comp.». Torino, 13, n. 317, p. 1 (1898); *Idem*, « Proc. Zool. Soc. London », p. 482 (1898).

Triton italicus Schreiber, *Herp. europ.* (2), p. 70 (1912).

Fisiologia. — *Azione della tiroxina sulla paralisi motoria da tiamina* [*]. Nota di ANTONINO ALIBRANDI, presentata [**] dal Socio C. CIACCIO.

In precedenti ricerche [1] ho messo in evidenza come la tiamina sia capace, a dosi superiori ad un grammo pro Kg., di produrre in alcune specie di batraci anuri, tra cui il *Discoglossus pictus*, una paralisi motoria che, una volta instaurata, presenta i caratteri esteriori della paralisi prodotta dalla classica azione del curaro.

Indotto da varie considerazioni e sopratutto dalle ricerche di Rossi [2] che hanno messo in evidenza per effetto della tiroxina una notevole diminuzione del contenuto di tiamina in organi che generalmente ne contengono un tasso fisiologico assai elevato, decisi di osservare se il preventivo trattamento con tiroxina si dimostrasse capace di opporsi alla suddetta azione paralizzante della tiamina. Cominciai pertanto coll'istituire le seguenti esperienze.

In una dozzina di esemplari di *Discoglossus pictus*, di peso compreso tra i 12 ed i 18 grammi, iniettai (nel sacco l. d.) il contenuto di una fiala di « Thyroxin » Roche del commercio. Ognuna di queste fiale contiene un mg di tiroxina disciolta in acqua mercé l'aggiunta di una piccola quantità di alcool etilico e di idrato sodico. A scopo di controllo, un eguale numero di animali provenienti dal medesimo lotto dei precedenti ed aventi pesi presso a poco corrispondenti, venne trattato con una eguale quantità del solo veicolo idroalcolico preparato secondo precise indicazioni gentilmente fornite dalla Casa Roche.

(4) Nata morta è pure da considerarsi la denominazione di *Triton intermedius* applicata nel 1931 all'ibrido fra *Tr. cristatus* e *Tr. vulgaris* da SZELIGA-MIERZEYEWSKI e ULASIEWICZ (« Trav. Soc. Sci. Vilno », *6*, pp. 17-23).

(*) Dall'Istituto di Chimica biologica della Università di Roma e dall'Istituto di Fisiologia Umana della Università di Messina.

(**) Nella seduta del 12 febbraio 1949.

(1) A. ALIBRANDI, Questi « Rendiconti », vol. VI, fasc. 2, p. 245 (1949).

(2) C. A. ROSSI, « Boll. Soc. it. Biol. sper. », *23*, 541 (1947).

Nei due gruppi così trattati veniva, a distanza di qualche minuto, iniettato cloridrato di tiamina Roche in soluzione acquosa in ragione di mg. 1,7 per grammo di peso.

In tutti gli animali di controllo trattati con tiamina comparve una paralisi motoria completa che in nessuno di essi durò meno di un'ora.

Gli animali pretrattati con tiroxina invece, pur presentando tremori muscolari, conservarono tutti una buona attività locomotrice.

L'iniezione del solo veicolo summenzionato, non seguìta dalla iniezione di tiamina, non produsse in altri sei esemplari di *Discoglossus pictus* alcun effetto degno di rilievo.

L'azione antagonista dimostrata in queste semplici esperienze dalla tiroxina nei riguardi dell'azione paralizzante della tiamina, se è effettivamente in rapporto col fenomeno messo in evidenza dal Rossi (loc. cit.), potrebbe costituire un chiaro esempio di devitaminizzazione sperimentale basato sulla neutralizzazione di un tipico effetto tossico da ipervitaminosi.

Fisiologia. — *Effetti dell'acetilcolina sulla durata dell'apnea volontaria* (*). Nota di ANTONINO ALIBRANDI e GIUSEPPE ALIBRANDI, presentata (**) dal Socio C. CIACCIO.

In precedenti ricerche eseguite in questo Istituto (1) fu studiato l'effetto della prostigmina, della eserina e della tiamina sulla durata dell'apnea volontaria. Per le prime due sostanze l'effetto positivo da esse esplicato sulla durata di questo fenomeno venne esclusivamente riferito al potenziamento dell'azione dell'acetilcolina, giungendo alla conclusione che la liberazione di questa sostanza a livello della zona sensitivo-motrice della corteccia cerebrale possa avere importanza per i fenomeni di inibizione centrale così come indubbiamente avviene per i fenomeni di eccitazione.

Ci sembrò pertanto opportuno continuare le suddette ricerche e provare direttamente l'azione dell'acetilcolina sulla durata dell'apnea volontaria.

Usando la medesima tecnica descritta nel precedente lavoro, una volta determinata la normale durata dell'apnea volontaria mediante giornaliere sedute, si cominciò a provare l'azione del cloruro di acetilcolina (Roche) il quale, alla dose di 100 mg disciolti in 2 ml di acqua distillata, veniva iniettato sotto la cute della faccia esterna delle cosce (2).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Umana della Università di Messina.

(**) Nella seduta del 12 marzo 1949.

(1) G. ALIBRANDI, «Arch. di Fisiol.», *45*, 203 (1946).

(2) Le presenti esperienze sono state eseguite sul medesimo soggetto adoperato nel lavoro su citato. Tanto la dose di acetilcolina quanto la via di somministrazione di questa (scelte in base a note considerazioni che possono trovarsi riassunte nel lavoro di VILLARET, JUSTIN-BESANÇON e CACHERA; *Recherches expérimentales sur quelques esters de la choline*. Parigi 1934) ci garantivano dal diretto effetto depressore sulla respirazione che la colina e alcuni suoi composti esercitano allorchè sono rapidamente immessi in circolo in dosi elevate. L'iniezione di acetilcolina

In un periodo di 32 giorni vennero così eseguite complessivamente 5 iniezioni di acetilcolina ad intervalli non eguali (ma comunque mai inferiori a cinque giorni); durante questi intervalli veniva talvolta a scopo di controllo eseguita l'iniezione di sostanze indifferenti disciolte nella medesima quantità di acqua distillata (glucoso, cloruro di sodio ecc.); al fine di evitare eventuali effetti suggestivi il soggetto veniva lasciato nella assoluta ignoranza della sostanza iniettatagli.

Fig. 1.

Il decorso generale della esperienza ed i suoi risultati sono riportati nel grafico della fig. 1. La linea spezzata riunisce in esso i punti indicanti il più alto valore della durata dell'apnea nelle 12 determinazioni giornaliere di essa.

Nessuna influenza sensibile sulla durata dell'apnea esercitò né il numero delle prove eseguite nè la iniezione delle sostanze indifferenti suaccennate, mentre invece l'acetilcolina costantemente fece aumentare la durata dell'apnea, che in condizioni normali non aveva mai superato i 43 secondi, fino a 98–108 secondi.

Le presenti ricerche ci pare pertanto che possano costituire una valida conferma della ipotesi precedentemente formulata.

– come pure quella eventuale delle sostanze controllo – veniva eseguita subito dopo la prima determinazione della durata dell'apnea; le altre successive 11 determinazioni venivano eseguite ad intervalli di 7 minuti.

Biologia. — *Azioni femminizzanti e mascolinizzanti del desossicorticosterone sulle gonadi di girini di «Rana dalmatina»* (*). Nota di ENRICO VANNINI, presentata (**) dal Corrisp. U. D'ANCONA.

Fin ad oggi sono state scarsamente studiate le azioni del desossicorticosterone sullo sviluppo e il differenziamento delle gonadi.

Il Padoa (1) per primo dimostrò, su girini di *Rana esculenta*, che questo ormone della corteccia surrenale ha in comune con altri ormoni steroidi (testosterone, estradiolo, progesterone) la proprietà di deviare sperimentalmente il differenziamento sessuale. In particolare, egli vide che l'acetato di desossicorticosterone ha un effetto femminizzante sugli abbozzi delle gonadi, simile a quello dell'estradiolo usato in basse dosi; hanno invece effetto mascolinizzante l'estradiolo in dosi elevate, il progesterone ed il testosterone.

Subito dopo (2) io rilevai, su *Rana dalmatina* Bp. (sin. *R. agilis* Thom.), che le gonadi dei girini trattati con acetato di desossicorticosterone sono ovaie che diversificano da quelle normali di controllo, perchè appaiono fin dall'inizio quasi del tutto prive di tessuto midollare e sono perciò praticamente formate dalla sola porzione corticale. Poichè il tessuto midollare (*medulla*) costituisce il territorio potenzialmente testicolare dell'abbozzo della gonade, mentre il tessuto corticale (*cortex*) ne rappresenta la porzione potenzialmente ovarica (Witschi), prospettai che il desossicorticosterone esplichi il proprio effetto femminizzante con un'*azione midollo-inibitrice*, opposta a quella cortico-stimolatrice esercitata dall'estradiolo usato in basse dosi (3).

Recentemente il Padoa (4) ha messo in dubbio l'attività midollo-inibitrice da me notata per il desossicorticosterone, perchè in girini di *Rana esculenta* ha rilevato che sia le ovaie ottenute con desossicorticosterone quanto quelle ottenute con estradiolo sono provviste di un abbondante tessuto midollare. Inoltre il Witschi (5), nella relazione da lui tenuta a Parigi in occasione del XIII Congresso interna-

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia e Anatomia comparata dell'Università di Padova, con un sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Ringrazio la casa Ciba, che mi ha fornito in generoso omaggio l'ormone di sua produzione.

(**) Nella seduta del 12 marzo 1949.

(1) E. PADOA, *Il differenziamento del sesso invertito mediante la somministrazione di ormoni sessuali e corticosurrenali. Ricerche con diidrofollicolina, progesterone e acetato di desossicorticosterone, in «Rana esculenta»*. « Pubbl. Staz. Zool. Napoli », vol. 19, p. 185 (1943).

(2) E. VANNINI, *Sviluppo di gonadi prive di tessuto midollare in girini di rana trattati con ormone cortico-surrenale sintetico.* « Atti Ist. Veneto Sc. Lett. Arti », vol. 103, p. 535 (1944).

(3) E. VANNINI, *Azioni del desossicorticosterone e del progesterone sul differenziamento delle gonadi nei girini di rana.* « Boll. Soc. Ital. Biol. Sperim. », vol. 20, p. 718 (1945).

(4) E. PADOA, *Instabilità della femminizzazione indotta dagli ormoni sterolici nei genotipi maschili di «Rana esculenta»*. « Atti Accad. Fisiocritici Siena », vol. 16 (1947).

(5) E. WITSCHI, *Physical and chemical agents of experimental sex determination in lower Vertebrates.* (In stampa).

zionale di Zoologia (1948), pure citando le ricerche precedenti, non sembra ben convinto delle attività femminizzante e medullo-inibitrice del desossicorticosterone, perchè classifica l'ormone della corteccia surrenale fra le sostanze ad azione mascolinizzante; tale convinzione si basa sul fatto che, in girini di *Rana sylvatica*, egli ha ottenuto con desossicorticosterone la mascolinizzazione delle gonadi.

Sperimentando su giovani embrioni di pollo [6], ho tuttavia potuto confermare, anche su questo materiale, che l'acetato di desossicorticosterone mostra un'intensa azione inibitrice sullo sviluppo del tessuto midollare delle gonadi. Le osservazioni sull'embrione di pollo, condotte con metodica quantitativa, mi hanno però dimostrato che, accanto a questa intensa attività medullo-inibitrice, l'acetato di desossicorticosterone esplica pure una più blanda *azione cortico-inibitrice*, che sui girini di rana non avevo rilevata.

Questi reperti nel pollo, insieme alle obiezioni del Padoa e del Witschi, mi hanno convinto dell'opportunità di riprendere lo studio da me iniziato sui girini di *Rana dalmatina*, onde poter definire con maggiore sicurezza le attività del desossicorticosterone, adoperando un materiale più abbondante e elaborando criteri di studio più precisi.

Il materiale preso qui in considerazione è rappresentato dal medesimo allevamento di girini (allevamento del 1942) che ho già descritto nel mio lavoro del 1944, e da altri due allevamenti, effettuati nel 1946 e nel 1947, che non avevo ancora esaminati. Ciascun allevamento constava di due gruppi (perfettamente paralleli) di girini, di cui uno è stato lasciato sviluppare in condizioni normali a scopo di controllo, mentre l'altro è stato sottoposto all'azione dell'ormone a cominciare dall'età di 10-15 giorni dalla nascita. Da ogni gruppo è stato periodicamente prelevato un certo numero di esemplari, in modo tale da esaurire ciascun allevamento verso l'epoca della metamorfosi, e da avere a disposizione, per l'esame istologico delle gonadi, serie complete di girini in diverso stadio di sviluppo.

Una novità, rispetto alle ricerche precedenti, consiste nel fatto che all'esame istologico delle fette seriali delle gonadi ho associato un completo conteggio sia delle cellule germinali contenute nel territorio corticale, che delle cellule somatiche del tessuto midollare. Ho ricavato così valori numerici indicanti il grado di sviluppo raggiunto da queste due regioni delle gonadi e, confrontando questi valori negli esemplari di controllo e ormonizzati, ho potuto obiettivamente valutare l'influenza esercitata dal desossicorticosterone.

È necessario precisare che la *Rana dalmatina* da me usata appartiene ad una razza sessualmente indifferenziata, con punto di viraggio successivo alla metamorfosi, e che perciò i girini normali di controllo mostrano gonadi di aspetto costantemente femminile. È chiaro che questa condizione, particolarmente adatta nello studio delle azioni mascolinizzanti [7], non lo è altrettanto in quello delle

(6) E. VANNINI, *Effetti dell'acetato di desossicorticosterone sullo sviluppo delle gonadi nell'embrione di pollo.* « Boll. Soc. Ital. Biol. Sperim. », vol. 23, p. 240 (1947); E. VANNINI, *Primi risultati sull'azione dell'acetato di desossicorticosterone sullo sviluppo delle gonadi nell'embrione di pollo.* (In stampa).

(7) E. VANNINI, *Confronto fra le azioni mascolinizzanti del progesterone e del testosterone sulle gonadi di girini di « Rana agilis ».* « Arch. Zool. Ital. », vol. 33, p. 333 (1948).

azioni femminizzanti, quando l'esame microscopico venga effettuato con criteri esclusivamente qualitativi. Poichè però le presenti ricerche furono svolte con tecnica quantitativa, mi è risultato ugualmente vantaggioso l'uso di questa razza indifferenziata, che mi ha permesso di confrontare i risultati dei conteggi su di una sola categoria di individui con gonadi di aspetto femminile, anzichè su due categorie una provvista di ovaie ed una di testicoli, e di giungere più facilmente a conclusioni circa l'azione esercitata dall'ormone sullo sviluppo dei territori corticale e midollare delle gonadi.

Nei due primi cicli sperimentali, i girini del gruppo ormonizzato sono stati trattati con acetato di desossicorticosterone sciolto in olio di sesamo (Cortiron Schering nel 1942, Percorten Ciba nel 1946), che veniva aggiunto periodicamente all'acqua degli allevamenti in dosi tali da raggiungere una concentrazione costante di 2 mg di ormone per litro nel 1942, e di 1 mg per litro nel 1946. Nel terzo ciclo sperimentale (1947) i girini del gruppo ormonizzato sono stati trattati con desossicorticosterone non esterificato della casa Ciba, sciolto in alcool etilico ed aggiunto all'acqua dell'allevamento alla dose di mg 0,4 di ormone per litro. I risultati dei trattamenti, nei tre cicli sperimentali, hanno mostrato talune differenze, che si possono considerare in graduale seriazione descrivendo successivamente i reperti del 1942, del 1947 e del 1946.

Nei tre gruppi di controllo del 1942, del 1947 e del 1946, le gonadi si sono tutte differenziate in senso femminile, sotto forma di ovaie che presentano dapprima una cortex provvista di ovogoni e una medulla compatta priva di elementi germinali, più tardi invece una cortex ricca di ovociti in profase e una medulla scavata centralmente.

Nei girini ormonizzati del 1942 le gonadi si sono pure costantemente differenziate in senso ovarico, ma sono sempre apparse quasi del tutto prive di tessuto midollare, e perciò fin dall'inizio provviste di un'ampia cavità centrale nella sede che da esso dovrebbe essere occupata; gli ovociti profasici sono comparsi nel territorio corticale delle ovaie alla medesima data che nei girini di controllo. Nei girini ormonizzati del 1947 la deficienza del tessuto midollare è meno completa, sebbene appaia evidente anche con un sommario esame microscopico, mentre nel territorio corticale l'ovogenesi risulta chiaramente inibita rispetto agli esemplari di controllo, perchè gli ovociti si differenziano in numero estremamente scarso, praticamente trascurabile, e con notevole ritardo; anche in questo caso tutte le gonadi ormonizzate mostrano aspetto femminile, ma nell'ultimissimo periodo dell'esperimento la migrazione di alcune cellule germinali dalla cortex in seno al tessuto midollare segna l'inizio di una parziale mascolinizzazione, limitata a brevi tratti di queste ovaie ad ovogenesi inibita. Nei girini ormonizzati del 1946 in un primo periodo l'azione ormonica appare simile a quella descritta per il 1947, perchè le gonadi sono ovaie con un tessuto midollare molto scarso e con una cortex provvista solamente di ovogoni; più tardi però tali cellule germinali cominciano a migrare entro lo scarso tessuto midollare, moltiplicandovisi sotto forma di spermatogoni, e si ha in tal modo una costante mascolinizzazione terminale delle ovaie, che si trasformano in testicoli quasi completi con solo scarsi residui del territorio corticale.

Maggiori chiarimenti sugli effetti dell'ormone si ricavano dai risultati dei conteggi cellulari, che verranno esposti con dettaglio nel lavoro definitivo in corso di pubblicazione [8], ma che qui sono stati brevemente riassunti nei tre grafici allegati, di cui ciascuno si riferisce ad un distinto allevamento. In tali grafici, ricavati dalle medie dei conteggi effettuati sulla gonade sinistra nei girini delle singole età, l'asse delle ascisse corrisponde alla durata dell'allevamento espressa in giorni, mentre l'asse delle ordinate corrisponde al numero delle cellule contate. I cerchi neri rappresentano i conteggi degli elementi germinali contenuti nel territorio corticale delle gonadi; le croci indicano invece i conteggi delle cellule somatiche costituenti il tessuto midollare. Le curve a tratto continuo corrispondono ai girini di controllo, quelle a tratto interrotto ai girini ormonizzati. Le brevi linee verticali, che intersecano talune curve, indicano lo stadio di sviluppo in corrispondenza del quale, nel rispettivo gruppo di girini, sono comparsi gli ovociti nel territorio corticale (*ov.*) o si è manifestata una mascolinizzazione delle ovaie (♂).

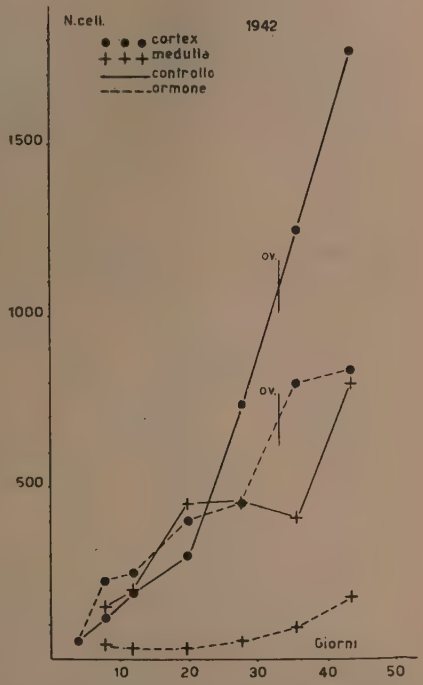


Fig. 1. – Allevamento del 1942. Diagramma riassuntivo dei conteggi cellulari nelle gonadi dei girini normali e ormonizzati; per ulteriori spiegazioni vedi il testo.

Esaminando il grafico del 1942 (fig. 1), si rileva che in questo allevamento la differenza principale fra le gonadi dei girini di controllo e ormonizzati consiste nel fatto che in questi ultimi il tessuto midollare è costituito da un numero di cellule estremamente più scarso; la quantità di tali cellule midollari cresce però gradualmente in entrambi i gruppi di girini. Le cellule germinali contenute nel territorio corticale inizialmente sono un po' più numerose nei girini ormonizzati che in quelli di controllo; più tardi invece la situazione si capovolge, e si riscontra una quantità di elementi germinali nettamente più elevata nei girini di controllo. La riduzione numerica degli elementi germinali, in conseguenza del trattamento ormonico, non è però così pronunciata come quella riguardante il tessuto midollare. Sebbene gli ovociti compaiano alla stessa data nel territorio corticale sia dei girini ormonizzati che di quelli di controllo, i miei conteggi han dimostrato che nei primi essi sono meno numerosi.

(8) E. VANNINI, *Azioni del desossicorticosterone sullo sviluppo delle gonadi in girini di « Rana dalmatina »*. (In stampa).

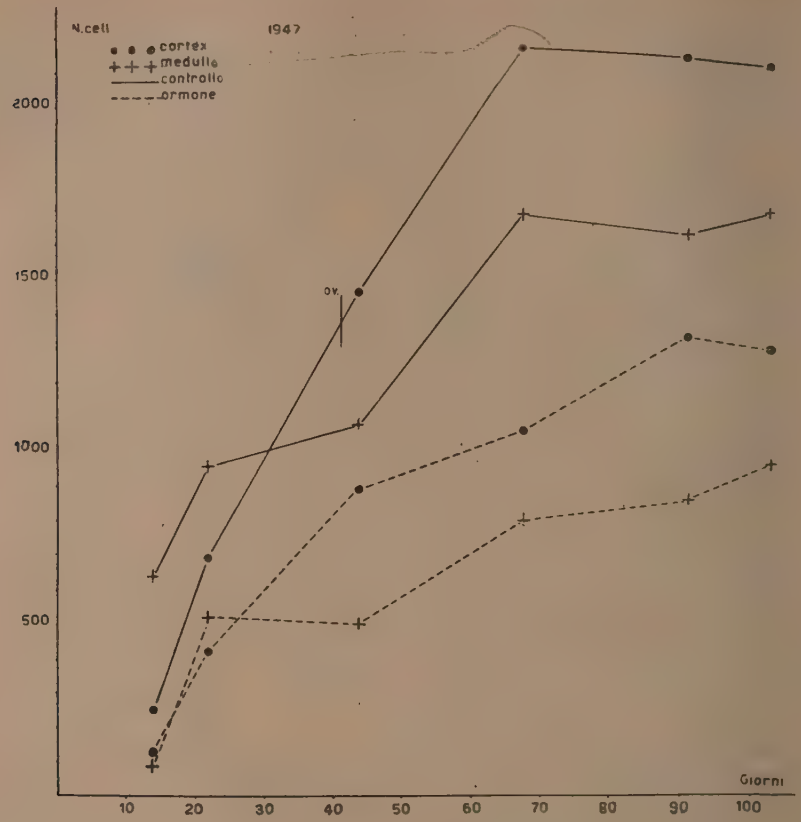


Fig. 2. – Allevamento del 1947. Diagramma come nella figura precedente.

Anche nell'allevamento del 1947 (fig. 2) le gonadi dei girini ormonizzati presentano costantemente una quantità di cellule del tessuto midollare nettamente minore che nei girini di controllo, sebbene in questo caso tale scarsità del tessuto midollare sia meno forte che nel 1942. Le cellule germinali femminili della cortex appaiono sempre, fin dall'inizio, meno numerose nei girini ormonizzati in confronto ai coetanei girini di controllo, ed inoltre, come abbiamo già accennato, gli ovociti si differenziano in numero elevato solamente nelle gonadi del gruppo di controllo, mentre invece in quelle del gruppo ormonizzato compaiono solo sporadicamente, in quantità del tutto trascurabile. Come nel precedente allevamento, l'inibizione dello sviluppo del tessuto midollare è tuttavia più intensa che quella del tessuto corticale.

Dal grafico del 1947, risulta inoltre che nei girini di controllo le cellule germinali della cortex si moltiplicano intensamente solo in un primo periodo dell'allevamento, mentre più tardi, poco dopo la comparsa dei primi ovociti, si stabilizzano ad un numero costante; lo stesso fatto si verifica, alle stesse date, per le cellule del tessuto midollare. Tale comportamento era teoricamente preve-

dibile, perchè le cellule germinali femminili si riproducono mitoticamente solo allo stato di ovogoni, e non a quello di ovociti in maturazione, e perchè la comparsa degli ovociti nella cortex coincide sempre con un arresto dello sviluppo del tessuto midollare, che finisce con lo scavarsi centralmente; nei girini del 1942 tale comportamento non si era reso evidente, probabilmente perchè l'allevamento si era protratto per un tempo troppo limitato. È interessante rilevare che nei girini ormonizzati del 1947 l'assenza pressochè completa degli ovociti si associa ad un mancato arresto della progressiva moltiplicazione numerica sia degli elementi germinali nella cortex che delle cellule del tessuto midollare. Nei conteggi, per semplicità, non ho tenuto conto degli sporadici elementi germinali che alla fine del trattamento, nei girini ormonizzati, sono migrati dalla cortex nel tessuto midollare.

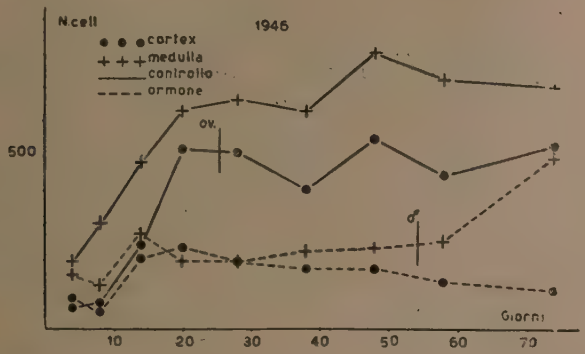


Fig. 3. – Allevamento del 1946. Diagramma come nelle figure precedenti.

Più complicata è l'analisi del risultato dei conteggi nell'allevamento del 1946 (fig. 3). Anche qui, nei girini del gruppo ormonizzato, si rileva inizialmente una netta inibizione dello sviluppo del tessuto midollare, che si accompagna ad un'inibizione meno intensa della moltiplicazione degli elementi germinali localizzati nel territorio corticale delle gonadi. Gli ovociti si sviluppano soltanto nella cortex dei girini di controllo, e la loro comparsa coincide con un rallentamento od un arresto moltiplicativo sia delle cellule germinali corticali che delle cellule del tessuto midollare.

Fino a questo punto, i risultati sono perciò del tutto simili a quelli dell'allevamento precedente. Ma, a partire dal ventottesimo giorno di trattamento, nelle gonadi dei girini ormonizzati inizia una sensibile migrazione di elementi germinali dalla cortex in seno al tessuto midollare e, poichè tali cellule non sono state computate nel diagramma, ne risulta una progressiva diminuzione del numero degli elementi germinali contenuti nel territorio corticale delle gonadi. Questa continua migrazione di elementi germinali, che nella nuova sede assumono il valore di spermatogoni, si accompagna ad un progressivo aumento numerico delle cellule somatiche del tessuto midollare, che si dispongono attorno agli spermatogoni sotto forma di cellule avvolgenti; tale incremento numerico delle cel-

lule del tessuto midollare è particolarmente evidente nell'ultimo stadio di sviluppo esaminato. A partire dal cinquantottesimo giorno di trattamento, le gonadi dei girini ormonizzati hanno assunto l'aspetto complessivo di testicoli, con solo scarsi residui del territorio corticale.

Gli attuali reperti si prestano a numerose considerazioni, sulle quali mi intratterrò nel lavoro definitivo. Qui mi limito a rilevare che essi allargano le nostre conoscenze sulle attività sperimentali del desossicorticosterone, perchè dimostrano che tale ormone non è soltanto dotato di un'azione medullo–inibitrice (come io stesso avevo inizialmente prospettato), ma anche di un'attività cortico-inibitrice, meno intensa, ma tuttavia ben riconoscibile. Essi dimostrano inoltre che solo in certi casi l'attività del desossicorticosterone conduce allo sviluppo di ovaie praticamente prive di tessuto midollare; spesso invece un tessuto midollare è chiaramente presente nell'interno delle ovaie, e soltanto un conteggio cellulare ci dimostra con certezza la sua minore abbondanza rispetto ai girini di controllo. La descritta complessità delle azioni del desossicorticosterone spiega infine i disaccordi finora esistenti fra i ricercatori, perchè infatti, come abbiamo constatato, gli effetti terminali non consistono sempre in una femminizzazione delle gonadi, ma talvolta in una mascolinizzazione.

Le discordanze rilevabili fra i tre gruppi sperimentali attualmente esaminati possono in parte spiegarsi con il differente dosaggio dell'ormone. Credo però che in gran parte essi dipendano dalla diversa intensità e velocità di accrescimento e di sviluppo delle gonadi, che è riscontrabile anche nei gruppi di controllo dei tre allevamenti, probabilmente in dipendenza di condizioni ambientali un po' dissimili. È probabile che l'efficacia delle azioni medullo–inibitrice e cortico–inibitrice del desossicorticosterone sia un po' variabile a seconda dell'intensità dello sviluppo normale dei due territori delle gonadi, e che in tal modo, di volta in volta, si raggiungano effetti terminali differenti. In particolare, è ammissibile che una definitiva azione femminizzante si ottenga solamente quando l'inibizione corticale non raggiunge un'intensità così elevata, da impedire la differenziazione degli ovociti; se viceversa le cellule germinali della cortex non riescono ad oltrepassare lo stadio di ovogoni, le ovaie inibite possono infine mascolinizzarsi, per migrazione degli ovogoni nel tessuto midollare.

Non è da escludere che, anche a parità di dosaggio dell'ormone, i risultati sperimentali sul differenziamento sessuale possan variare in specie di *Rana* differenti, caratterizzate da un diverso ritmo di sviluppo dei territori corticale e midollare delle gonadi.

Biologia. — *La morfologia dell'ipofisi del Tritone crestato* (*). Nota di VALDO MAZZI e MARCO PIERI, presentata (**) dal Socio N. BECCARI.

In due lavori che vedranno fra breve la luce saranno particolareggiatamente descritti i caratteri strutturali dell'ipofisi del Tritone crestato e le loro variazioni stagionali in rapporto al ciclo sessuale e a particolari condizioni sperimentali. Una precisa conoscenza della morfologia della ghiandola è però necessaria premessa alle indagini di indole cito-funzionale. Abbiamo quindi ritenuto opportuno di dedicare in un primo tempo la nostra attenzione a questo problema morfologico, che d'altra parte ha ricevuto finora scarsa attenzione, almeno per quanto concerne gli Urodeli.

La particolare struttura dell'ipofisi degli anfibi richiede, per la comprensione della sua morfologia, oltre all'esame a fresco della forma esterna, anche quello di sezioni seriate della ghiandola, preferibilmente orientate secondo i tre piani fondamentali. Questi metodi sono stati infatti di regola seguiti da tutti gli AA. che hanno illustrata la pituitaria degli Urodeli. Solamente Roofe (1937) [1], per quanto è a nostra conoscenza, ha eseguita una ricostruzione plastica della ghiandola e dell'ipotalamo (*Amblystoma tigrinum*).

Ritenendo che la costruzione di un modello sia la via migliore per ottenere un quadro soddisfacente dei rapporti tra infundibolo ed ipofisi e di quelli tra le varie parti della ghiandola, abbiamo seguito tale procedimento anche nel nostro caso.

È stata a questo scopo utilizzata una serie completa di sezioni sagittali di 10 μ di una ipofisi fissata in liquido di Stieve, incluso in paraffina e colloidina e colorata col 1° metodo di Galgano, che permette una precisa differenziazione delle tre parti principali di cui la ghiandola si compone.

Non rientrando nei fini della presente ricerca lo studio del comportamento dell'infundibolo, all'infuori dei suoi rapporti con la ghiandola, nè la morfologia generale della regione ipotalamica (per cui cfr. Kappers, Huber e Crosby (1936) [2] e Beccari (1943) [3]) quest'ultima non è stata compresa nella ricostruzione. Di conseguenza non trovano posto nel modello le parti tuberali, per la cui descrizione ci fondiamo sui reperti microscopici.

Per ogni sezione abbiamo disegnato, ad un ingrandimento di 100 diametri, su carta assorbente liscia (spessa circa 870-885 μ) i contorni della ghiandola, i confini tra le sue diverse parti, il limite interno dell'infundibolo ed un breve tratto dell'ependima che si proietta cranialmente al margine anteriore della parte distale, congiungendosi coi lobi posteriori dell'ipotalamo.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata dell'Università di Firenze.

(**) Nella seduta del 12 marzo 1949.

(1) « J. Morphol. », *61*, 485 (1937).

(2) A. C. KAPPERS, C. G. HUBBER and E. C. CROSBY, *The comparative anatomy of the nervous system of Vertebrates including man*. The Mcmillan Co., New York (1945).

(3) N. BECCARI, *Neurologia comparata*. S. E. S., Firenze (1943).

L'ipofisi del Tritone crestato consta, come di regola in tutti i Vertebrati dall'unione di due abbozzi, l'uno nervoso, che si origina dalla punta caudale dell'infundibolo (un processo dell'ipotalamo che si spinge in direzione spinale al disotto del mesencefalo), l'altro epiteliale, che trae origine da una evaginazione del tetto della cavità buccale (tasca di Ratke).

Dall'abbozzo di origine nervosa si differenzia la parte o lobo nervoso (o posteriore) o neuroipofisi; da quello epiteliale (o adenoipofisi), invece quattro parti o lobi distinti: le due parti tuberali, la intermedia e la distale (o anteriore, o buccale, o preipofisi).

Come conseguenza delle condizioni dinamiche dello sviluppo l'ipofisi viene ad essere proiettata, insieme all'infundibolo (di cui la parte in contatto con

Fig. 1. – Modello di ipofisi di Tritone crestato.

A, Vista dal fianco sinistro. *B*, Vista dalla faccia dorsale. 1. Bordo ependimale. 2. Parte nervosa. 3. P. intermedia. 4. P. distale.

l'adenoipofisi si differenzia dorsalmente nella parte nervosa), alquanto caudalmente, al disotto del mesencefalo.

L'ipofisi viene ad essere allogata in una piccola depressione dell'osso parasfenoide (o parabasale). Essa è avvolta da ogni lato dalla pia-aracnoide (leptomeninge di Herrick (1935)[4] in *Amblystoma*), che si fonde dorso cranialmente con l'analoga membrana che circonda ed involge il sovrastante mesencefalo, ed appare in alcuni casi notevolmente inspessita e ricca di vasi. La ipofisi è rivestita, soltanto in corrispondenza della sua faccia ventrale dalla « dura » o pachimeninge di Herrick. Questa membrana si comporta analogamente a quanto ha descritto Herrick in *Amblystoma*; è sottile a livello dell'ipofisi e si confonde, caudalmente ad essa, colla leptomeninge mesencefalica.

All'esame a fresco la ghiandola si presenta come una masserella subrotonda fortemente appiattita in senso dorso ventrale. La superficie ventrale è convessa

(4) « J. Comp. Neur. », *61*, 297 (1935).

ed i margini posteriore, anteriore e laterali piuttosto acuti seguono i contorni indicati alla fig. 2, *A*.

Nella fig. 2, *C* il complesso ipofisi-infundibolo (visto craniodorsalmente) è notevolmente ruotato di modo che è possibile osservare il primo tratto della superficie interna dell'infundibolo.

L'esame della ghiandola presentata di tre quarti (fig. 1, *A*; 2, *B*) permette di riconoscere le terminazioni laterali delle parti nervosa e intermedia che formano

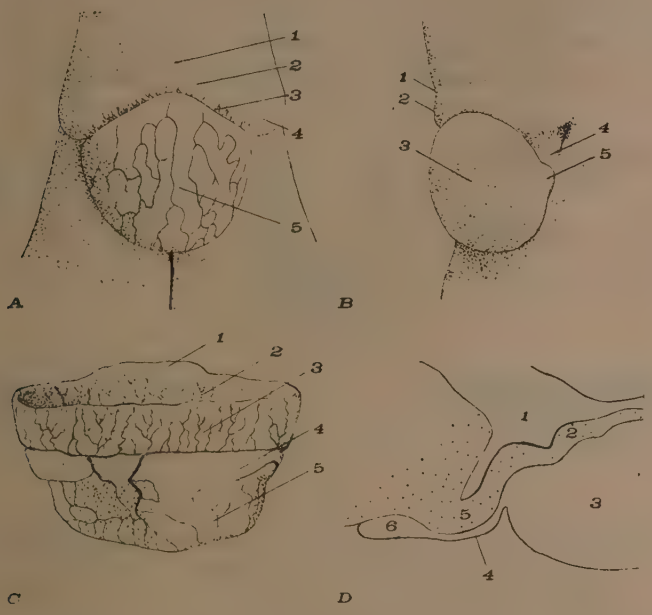


Fig. 2. - *A*. Ipofisi *in sito* vista dalla faccia ventrale.
1. Solco preinfundibolare. 2. Cercine ependimale. 3. Linea di inserzione della parte distale sull'infundibolo. 4. Lobi posteriori dell'ipotalamo. 5. Parte distale.

B. Ipofisi *in sito* vista di tre quarti.
1 e 2. Come nella precedente figura. 3. P. distale. 4. P. nervosa. 5. P. intermedia.

C. Ipofisi isolata vista antero-dorsalmente.
1. Bordo ependimale. 2. Cavo infundibolare. 3. P. nervosa. 4. P. intermedia. 5. P. distale.

D. Schema dei rapporti fra lobo tuberale e parte distale.
1. Infundibolo. 2. Ependima. 3. P. distale. 4. Ponte cellulare. 5. Cercine ependimale. 6. P. tuberale.

colle loro superfici dorsali come due cercini paralleli che lateralmente girano in senso ventrale prolungandosi per breve tratto sui lati della ghiandola.

Non rientra nei limiti che ci siamo prefissi un esame particolareggiato della vascolarizzazione i cui caratteri principali risultano del resto ben evidenti dalla fig. 2 *A*, *C*. Si noti la diversità dell'andamento generale dei vasi superficiali sulla parte nervosa ed in quella distale, e l'assenza di una vascolarizzazione propria nella parte intermedia.

Infundibolo. – È una cavità grossolanamente a forma di imbuto, in diretta comunicazione con il terzo ventricolo. La sua parete dorsale è coperta dal sottile tetto ependimale dell'ipotalamo, che caudalmente si inspessisce nella parte nervosa. Le sue pareti laterali, a livello dell'ipofisi, sono egualmente formate dalle ali della parte nervosa che si incurvano in direzione ventrale, trasformandosi insensibilmente nel pavimento infundibolare che nel tratto latero-mediale e più strettamente mediale viene a ricoprire la espansione o suola craniale della parte distale (fig. 3). Nella parte extra ipofisaria il pavimento infundibolare è formato dai lobi posteriori della parte ventrale dell'ipotalamo; è collegato con il pavimento infundibulare ipofisario a mezzo di una striscia ependimale, che viene a formare un cercine superficiale, che protude ed anche si ribatte sulla superficie ventrale

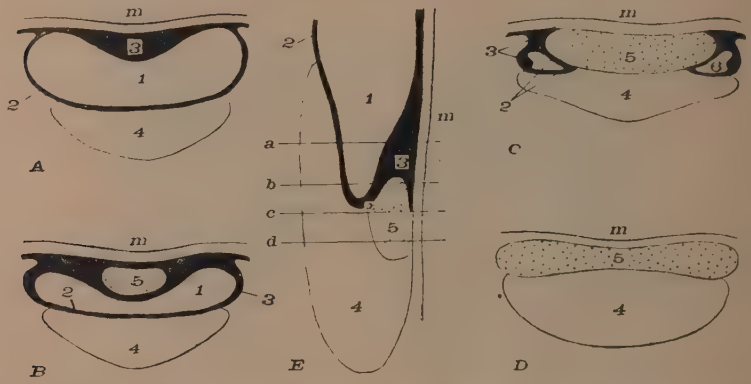


Fig. 3. – Rappresentazione schematica dei rapporti fra parte distale, intermedia e posteriore. *A, B, C, D.* Sezioni trasverse. *E.* Sezione sagittale mediana. 1. Infundibolo. 2. Ependima. 3. P. nervosa. 4. P. distale. 5. P. intermedia. 6. Ciechi infundibolari. *M.* Faccia ventrale del mesencefalo.

ipotalamica (fig. 2, *A* e *B*, 2; *D*, 5) originando così un lieve solco visibile all'esterno (fig. 2, *A* e *B*, 1).

La cavità infundibolare, di regola sviluppata prevalentemente in senso trasversale, si biforca posteriormente dando luogo a due ciechi più o meno simmetrici ed alquanto laterali, che si insinuano fra parte distale e parte intermedia, essendo di lato delimitati dall'espansioni laterali della parte nervosa (fig. 3, *C*, 6). Ricordiamo come eccezionalmente si possano riscontrare ulteriori ramificazioni secondarie dei ciechi infundibolari.

Parte nervosa. – (Fig. 1, *A* e *B*, 2; Fig. 2, *B*, 4; *C*, 3; Fig. 3, 3). Ha la forma di una lamina inspessita (specie medialmente) e rastremantesi cranialmente e lateralmente. Essa confina posteriormente con la parte intermedia; con la parte distale soltanto per il ristretto margine latero-ventrale (vedi fig. 1). Il punto segnato con *x* nella sezione sagittale alla fig. 3 rappresenta la traccia della linea lungo la quale i tre lobi reciprocamente si incontrano.

Parte intermedia. – (Fig. 1, *A* e *B*, 3; fig. 2, *B*, 5; *C*, 4; fig. 3, 5). Ha la forma di una lamina applicata sulla superficie dorsale e craniale della parte distale,

che si ribatte latero ventralmente formando una sporgenza di dimensioni variabili che si proietta oltre il contorno della parte distale (v. fig. 1, *A*, 3; fig. 2, *B*, 5).

Essa confina ventralmente e caudalmente colla parte distale; cranialmente colla parte nervosa. I rapporti con quest'ultima parte sono alquanto variabili e si dànno casi, come quello rappresentato nella fig. 3, in cui la parte intermedia si proietta con una espansione mediale nella parte nervosa, da cui viene incappucciata. Del tutto lateralmente la parte intermedia si sovrappone per breve tratto all'ala laterale della parte nervosa (fig. 1, *A*).

Parte distale. – (Fig. 1, *A* e *B*, 4; Fig. 2, *A* e *C*, 5; *B* e *D*, 3; Fig 3, 4). I rapporti di questa parte, che in sostanza determina l'aspetto esterno della ghiandola, risultano dalle precedenti descrizioni e dall'esame delle figure. In relazione alla osservazione di Roofe circa la possibilità di riconoscere nella parte distale zone cellulari caratteristiche e fisse, ricordiamo come anche per altre specie di anfibi sia stata proposta da vari AA. una distinzione del genere. Quest'argomento sarà discusso ulteriormente in altra sede.

Parti tuberali. – (Fig. 2, *D*, 6). Sono rappresentate da due masserelle distaccate dal corpo dell'ipofisi ed alloggiate in due leggere depressioni simmetriche, sui lobi inferiori ipotalamici. Nella nostra specie risultano collegati alla parte distale da un esile ponte cellulare (v. fig. 2, *D*, 4).

DISCUSSIONE. – In linea generale la morfologia dell'ipofisi di *Triturus cristatus carnifex* concorda con quella illustrata, sia pur sommariamente, in altre specie del genere *Triturus* (Meyer, 1939 [5], *T. vulgaris*; Klose, 1941 [6], *T. cristatus* e *vulgaris*; Copeland, 1943 [7], Kent, 1945 [8], *T. viridescens*; Tuchmann-Duplessis, 1945 [9], *Molge palmatus*, *cristatus* ed *alpestris*).

Un punto di contrasto che si rileva scorrendo la bibliografia concerne la opportunità di distinguere il lobo intermedio da quello distale. Così Aplington (1942) [10], in *Necturus maculosus*, descrive un « basophilic bed » omologo alla parte intermedia, collegato alla parte distale attraverso una zona di transizione, che possiede caratteristiche istologiche proprie delle due parti. Anche Kent (1945) non distingue una parte intermedia in *Triturus viridescens* ma solo una « zona basofila » della adenoipofisi, sebbene abbia osservato in diversi casi una vera separazione a mezzo di fibre connettivali o di un solco esterno. Nella nostra specie l'esame a fresco della ghiandola (v. fig. 2) e l'esame di sezioni colorate ci hanno convinti della opportunità di mantenere la divisione classica.

Diversi AA. annettono una certa importanza alla posizione relativa delle parti tuberali rispetto al corpo della ghiandola e soprattutto alla esistenza o meno di un ponte cellulare che connette dette parti alla parte distale, ritenendo che ciò sia un segno morfologico del grado di evoluzione filogenetica.

(5) « Arch. Entw. mek. », *139*, 309 (1939).
(6) « Zeitschr. f. Wissensch. Zool. », *155*, 48 (1941).
(7) « J. Morph. », *72*, 379 (1943).
(8) « J. Tenn. Acc. Science », *20*, 139 (1945).
(9) « Thèse de Paris », Hermann (1945).
(10) « Am. J. Anat. », *70*, 201 (1942).

Infatti mentre in certi Urodeli (*Hynobius nebulosus*, *Onychodactylus japonicus*, Sumi 1924,[11]: *Triturus viridescens*, Kent 1945 [8], Copeland 1943 [7],; *Amblystoma*, *Spelerpes*, *Amphiuma*, Atwell 1921 [12]; *Necturus*, Atwell 1921 [12], Charipper 1931 [13]; *Proteus anguinus*, Stendell 1913 [14]) le parti tuberali risultano sempre unite alla parte distale, in altri (*Dyemictilus pyrrhogaster*, *Megalobatrachus maximus*, Sumi 1926 [15]; *Triton vulgaris*, Meyer 1939 [5]) esse si isolano più o meno tardivamente nel corso dello sviluppo (occasionalmente possono rimanere unite con un esile filo cellulare), avvicinandosi quindi alle condizioni normali degli Anuri.

Come già si disse, il Tritone crestato sembra appartenere al primo gruppo.

Citologia. — *Altre osservazioni sul comportamento del nucleo durante le prime fasi dello sviluppo embrionale degli Anfibi* (*). Nota di Giuseppe Colombo, presentata (**) dal Corrisp. U. D'Ancona.

Su uova di Anfibi la differente colorabilità di fronte alla reazione di Feulgen durante i primi stadi di sviluppo di *Discoglossus pictus* è stata studiata per la prima volta da Hibbard (1928) [1]. Voss (1933) [2] ha successivamente esaminato colla reazione di Feulgen il comportamento nucleare di embrioni di *Bufo* e di Axolotl dallo stadio di morula precoce a quello di bottone codale: i nuclei dànno una reazione nucleale debole durante la segmentazione, allo stadio di blastula avanzata la reazione diventa nettamente positiva aumentando col procedere dello sviluppo in modo generale in tutto l'embrione, ma con una distribuzione topografica diversa in correlazione allo smaltimento del vitello cosicchè essa risulta di intensità maggiore nell'ectoderma, media nel mesoderma, minore nell'entoderma. Voss mette in evidenza la relazione esistente tra la sintesi dell'acido timonucleico e lo smaltimento del vitello, i processi di induzione e di differenziazione e gli scambi metabolici.

Con analisi chimiche quantitative e con determinazioni istochimiche appropriate Brachet [3] ha studiato il metabolismo della sostanza nucleare durante lo

(11) « Fol. Anat. Jap. », *2*, 83 (1924).
(12) « Anat. Rec. », *22*, 373 (1921).
(13) « Anat. Rec. », *49*, 345 (1931).
(14) « Arch. Mikr. Anat. », *82*, 289 (1913).
(15) « Fol. Anat. Jap. », *4*, 271 (1926).
(*) Ricerche eseguite nell' Istituto di Zoologia dell'Università di Padova.
(**) Nella seduta del 12 marzo (1949).

(1) H. Hibbard, *Contribution à l'étude de l'ovogènese, de la fecondation et de l'histogenèse chez « Discoglossus pictus » O.* « Arch. de Biol. », vol. 38, p. 251 (1928).

(2) H. Voss, *Der histochemische Nachweis einer Nukleinsauresynthese in der Frühentwicklung der Amphibien nebst Bemerkungen ueber die Bedeutung des Dotters als Quelle induzierender Substanzen.* « Zeitschr. Mikrosk. Anat. Forschung. », vol. 34, p. 282 (1933).

(3) J. Brachet, *The metabolism of nucleic acids during embryonic development.* « Cold Spring Harbor Symposia of Quant. Biol. », vol. 12, p. 18 (1947): *Le rôle et la localisation des acides nucleiques au cours du developpement embryonnaire.* « C. R. Soc. Biol. », vol. 142, p. 1241 (1948).

sviluppo embrionale. Dai lavori di Brachet si possono trarre le seguenti conclusioni: durante la segmentazione si ha sintesi di acido timonucleico nucleare da acido ribonucleico citoplasmatico: allo stadio di gastrula il metabolismo nucleare (parallelamente a quello generale) prende un'altra via, contemporaneamente alla comparsa del nucleolo e probabilmente delle parti eterocromatiche. L'acido ribonucleico citoplasmatico avrebbe una funzione importante nei processi di induzione e di differenziazione organogenetica; la funzionalità cellulare completa, quale la differenziazione istogenetica e la sintesi proteica specifica, nella esplicazione delle forme, si avrebbe colla completa differenziazione nucleare.

Dal punto di vista citologico questo modo di vedere concorda quasi interamente con le concezioni di Caspersson e della sua scuola [4-5] sulla funzione dell'eterocromatina e del nucleolo nella formazione delle proteine nucleari e citoplasmatiche.

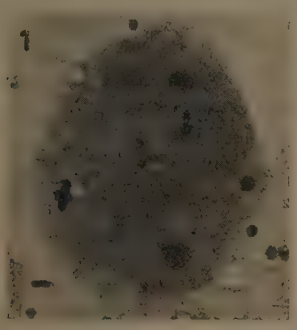


Fig. 1. – Nucleo ectodermico di neurula di Axolotl colorato colla miscela Unna–Pappenheim. Ingr. 1720 ×

Fig. 2. – Nucleo ectodermico di neurula di Axolotl colorato colla miscela Unna–Pappenheim dopo trattamento con ribonucleasi. Ingr. 1720 ×

In una Nota precedente [6] io mi sono occupato delle modificazioni dei nuclei a riposo durante le prime fasi dello sviluppo embrionale di *Rana esculenta*: durante la segmentazione i nuclei si trasformano da nuclei a cromatina diffusa Feulgen–negativi a nuclei a struttura cromonemica con cromonemi via via più spessi che dànno una reazione nucleale progressivamente più netta. Ho anche osservato una differenza topografica nella grandezza e nella struttura nucleare

(4) T. CASPERSSON, und B. THORELL, *Der endozellulare Eiweiss-und Nucleinsäurestoffwechsel in embryonalem Gewebe.* «Cromosoma», vol. 2, p. 132 (1941).

(5) B. THORELL, *The relation of nucleic acids to the formation and differentiation of cellular proteins.* «Cold Spring Harbor Symposia of Quant. Biol.», vol. 12; p. 247 (1947).

(6) G. COLOMBO, *Il comportamento del nucleo durante le prime fasi dello sviluppo embrionale in «Rana esculenta».* «Rend. Accademia dei Lincei», vol. VI, p. 120 (1949).

nelle diverse regioni e foglietti; non mi sono occupato che incidentalmente dei costituenti specifici dei nuclei, gli acidi nucleinici.

In questa Nota vengono riportate alcune osservazioni sulla distribuzione degli acidi nucleici nel nucleo di embrioni di *Rana esculenta* e di Axolot in stadi ravvi-

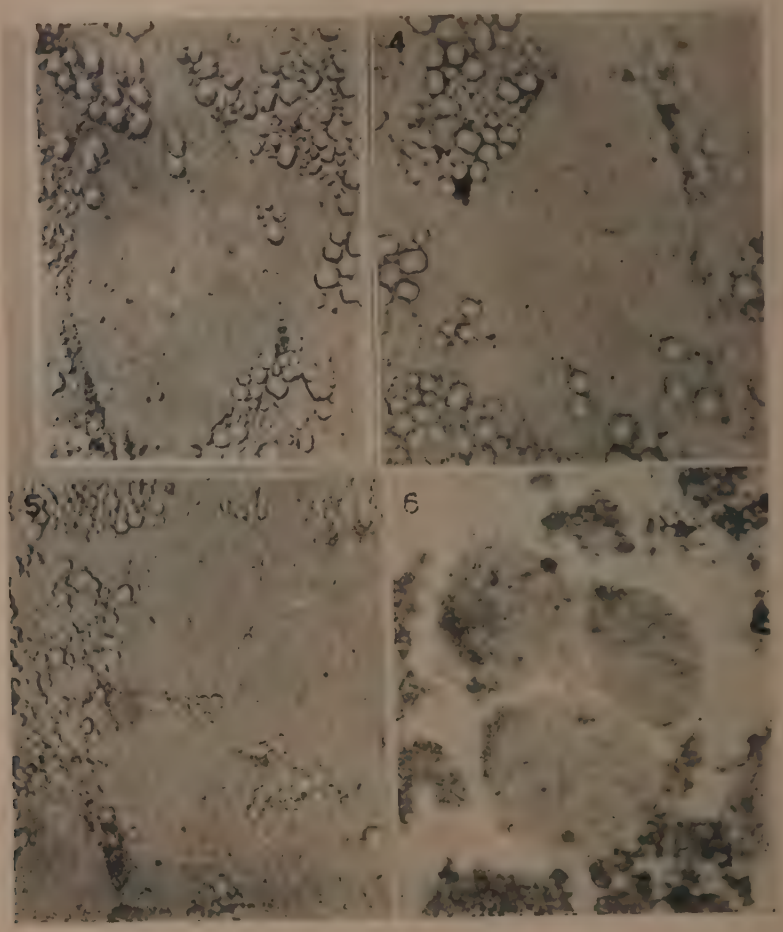


Fig. 3. – Nucleo del polo animale di blastula di Axolotl fotografato a fresco a luce normale. Ingr. 560 ×

Fig. 4. – Nucleo del polo animale di blastula di Axolotl (lo stesso della fig. 3) fotografato a fresco a luce U. V. Ingr. 560 ×

Fig. 5. – Nuclei di ectoderma neurale di neurula di Axolotl fotografati a fresco a luce normale. Ingr. 560 ×

Fig. 6. – Nuclei di ectoderma neurale di neurula di Axolotl (gli stessi della fig. 5) fotografati a fresco a luce U. V. Ingr. 560 × (*).

(*) Nelle fotografie a fresco le differenze di forma degli stessi nuclei sono dovute ad una diversa pressione del coprioggetto sul portaoggetto.

cinati di sviluppo in base a preparati microscopici per schiacciamento colorati con la reazione di Feulgen, colla miscela verde di metile–pironina di Unna–Pappenheim con e senza trattamento con ribonucleasi (metodo di Brachet) e dopo esame a fresco di nuclei a luce normale ed a luce U. V. con l'apparato di Köhler.

Fino allo stadio di blastula nei nuclei, accanto ad una struttura a cromatina diffusa od a cromonemi sottili e ad una colorazione nucleale debole, colla colorazione Unna–Pappenheim si osserva una debole intensità di colorazione e la mancanza dei nucleoli. Questi compaiono, assieme ad una colorazione più intensa allo stadio di gastrula iniziale, non però contemporaneamente nei nuclei di tutte le cellule ma prima in quelle ectodermiche, quindi in quelle mesodermiche appena si differenzia questo foglietto, e molto tardi in quelle entodermiche. Probabilmente nei primi stadi l'acido ribonucleico nel nucleo è diffuso poichè i nuclei colla miscela verde di metile–pironina assumono una colorazione blu–viola, mentre dopo trattamento con ribonucleasi appaiono nettamente verdi. I nuclei in cui vi sono i nucleoli invece mostrano una colorazione verdastra anche prima del trattamento colla ribonucleasi (figg. 1–2). La quantità totale in nucleoproteidi è diversa nei vari stadi: con esame a luce U. V. su schermo fluorescente si osserva infatti un assorbimento crescente col progredire dello sviluppo. Fino allo stadio di blastula su schermo fluorescente non è possibile vedere alcuna differenza tra esame a luce normale e esame a luce U. V. Colla fotografia invece è possibile mettere in evidenza un lieve assorbimento, specialmente nei nuclei dell'emisfero animale (figg. 3 e 4); negli stadi più avanzati l'assorbimento è ancora maggiore, specialmente nelle cellule più differenziate. In queste è possibile vedere, nei preparati a fresco a luce U. V., una struttura che si potrebbe dire cromonemica che si differenzia nettamente da quella dei nuclei ai primi stadi (figg. 5–6).

Le presenti osservazioni concordano con i dati dei succitati autori; a complemento delle mie precedenti ricerche precisano che nei nuclei cosidetti a cromatina diffusa, che si osservano durante la segmentazione, i nucleoproteidi sono nel nucleo in concentrazione minore che nei nuclei a struttura cromonemica. La struttura cromonemica dei preparati fissati risulta corrispondere ad una struttura a piccole masse allungate rilevabili con l'esame a fresco a luce U. V. Struttura reticolare con esame a fresco con luce U. V. di uova di *Arbacia* mature ed in segmentazione, è stata trovata da Harvey e Lavin (1944) [7], mentre con luce visibile i nuclei appaiono anisti.

(7) E. B. HARVEY and G. I. LAVIN, *The cromatin in the living Arbacia punctulata egg and the cytoplasm of centrifuged egg as photographed by ultra-violet light.* « Biol. Bull. », vol. 86, p. 163 (1944).

Endocrinologia. — *Sul potere glicoregolatore dell'* « *Insulina nativa* » *estratta dal pancreas di uccelli granivori*. Nota di Stefano Bocchiotti, Alberto Muratorio e Ottavio Rossi, presentata (*) dal corrisp. U. Lombroso.

È noto che negli uccelli l'estirpazione del pancreas non provoca di per sè sola l'insorgere del diabete, anche quando l'animale (anitra) sopravvive lungo tempo (alcuni mesi) a questa operazione. (Sprague e Ivy) (1) (Morando) (2).

Anche se nell'animale compaiono subito delle manifestazioni caratteristiche del tubo digerente (stearrea, amillorrea), tuttavia il Ricambio Intermedio Glucidico non appare alterato, come dimostra il fatto che dopo somministrazione di glucosio il Quoziente Respiratorio si avvicina alla unità. Questi risultati non armonizzano con la constatazione che, dal punto di vista strutturale, il pancreas di uccelli presenta un eccezionale sviluppo del tessuto insulare al quale si suole attribuire la funzione endocrina glicoregolatrice.

Seitz e Ivy avevano però osservato che estirpando oltre il pancreas anche il duodeno si otteneva glicosuria ed iperglicemia (operazione che essi avevano eseguito con l'intento di garantirsi al meglio della totale estirpazione del pancreas (3). Questo risultato è stato però interpretato altrimenti dalla nostra Scuola, e precisamente nel senso che con la estirpazione del duodeno si sottraeva un organo capace di vicariare con la sua azione quella esercitata altrimenti dal pancreas.

Che l'intestino ed in particolare il duodeno intervenissero nel regolare il Metabolismo Intermedio Glucidico (M. I. G.) era già stato prospettato dal Lombroso in un gruppo di ricerche svolte nel 1916 e nel 1924. Egli notò, fra l'altro, che l'effetto ipoglicemico del perfusato di intestino è molto più evidente se l'intestino proviene da un cane spancreato da più giorni; quasi che per la mancanza del fattore pancreatico glicoregolatore del M. I. G., si esaltasse quello ad azione simile esplicato dall'intestino (4) (5).

Gli effetti ipoglicemizzanti antidiabetici dovuti all'intestino vennero in seguito ampiamente confermati da La Barre e Coll. che usarono, invece di perfusati di organo come il Lombroso, estratti di duodeno che battezzarono col nome di « incretina ». Tale incretina somministrata sia per os che per via parenterale, provoca ipoglicemia sia nei cani normali che spancreati (6).

(*) Nella seduta del 12 marzo 1949.

(1) Sprague e Ivy, « Am. J. Physiol. », *115*, 387 (1937).
(2) Morando, « Arch. Fisiol. », *38*, 343 (1939).
(3) Seitz e Ivy, « Am. J. Physiol. », *93*, 686 (1933).
(4) U. Lombroso, « Rend. Acc. Lincei », *25*, 41, 83, 737, 802 (1916).
(5) U. Lombroso, « Arch. Int. de Physiol. », *23*, 313 (1924).
(6) La Barre, *La secretine*, Masson ed., 1936.

In seguito il De Barbieri convalidò, ampliandole e perfezionandole, le ricerche dei citati AA., giungendo pure con l'increto duodenale (Duocrina) ad applicazioni pratiche [7] [8].

In seguito uno di noi (Bocchiotti) mise in evidenza come l'azione dell'incretina preparata con duodeno di uccelli granivori sia di molto superiore, in attività ipoglicemizzante, a quella ottenuta con duodeno di mammiferi [9].

Il complesso di questi dati ora riferiti suggeriva indagini atte a controllare l'attività insulinica del pancreas di uccelli, in quanto se da un lato era da attendersi un contenuto elevato di essa in armonia alla struttura morfologica di questi pancreas, dall'altro lato la mancanza di diabete in seguito alla estirpazione faceva sorgere il dubbio di uno scarso contenuto di questo ormone. Però questa ultima ipotesi era *a priori* resa meno attendibile per il fatto che gli uccelli granivori sono pochissimo sensibili all'azione dell'insulina: un colombo può resistere alla iniezione di 100–200 unità di insulina (Lilly) senza presentare disturbi apprezzabili e con scarse variazioni della glicemia [10].

Il metodo di preparazione degli estratti insulinici da noi usati, che appartiene alle classiche tecniche di estrazione con alcool acidulo, è descritto da Boivin e Coll. [11] e permette di esperimentare, anche quando, come era il nostro caso, si aveva a disposizione piccole quantità di pancreas.

Abbiamo apportato alla tecnica suggerita dal Boivin lievi modificazioni che ci hanno permesso di ottenere un estratto più attivo.

Riassumiamo brevemente le operazioni svolte da noi per estrarre la cosiddetta «insulina nativa»:

40° gr. di pancreas in 100 cc di alcool a 95°, con aggiunta di cc 0,3 di HCl al 26 °/₀ vengono omogeneizzati e tenuti in agitazione per circa un'ora. Si filtra e si ottiene un liquido paglierino, che si concentra a bagno maria a non oltre 30–35° fino a 10 cc; si aggiungono poi gr. 4 di solfato d'ammonio agitando fino a completa soluzione. Si pone in luogo freddo (5° C.) per 24 ore e si ottiene in tal modo un precipitato che contiene l'insulina: si centrifuga ed il sedimento si scioglie in 10 cc di alcool a 70°; l'insulina passa in soluzione; si filtra in filtro bagnato con alcool a 70°. Al liquido si aggiunge ancora alcool concentrato in modo che la concentrazione alcoolica totale risalga a 95°. Si pone in ghiacciaia e dopo un giorno si ottiene un lieve precipitato contenente l'insulina. Si centrifuga ed il sedimento si discioglie in 100 cc di Acido solforico N/100 aggiungendo una goccia di fenolo al 5 °/₀. Si avranno 100 cc di soluzione di insulina proveniente da 40 gr. di pancreas.

Gli effetti sono stati provati su conigli la cui glicemia fu determinata col metodo di Hagedorn–Jensen e col metodo di Folin Wu applicato al fotometro Evelyn.

Negli animali si iniettavano 2 cc oppure 3 cc per Kg. della soluzione; tale volume corrispondeva (valore medio) ad 1 gr. di pancreas fresco.

(7) De Barbieri, «Rass. Clin. Terap.», *36*, fasc. I (1937).
(8) De Barbieri, «Rass. Clin. Terap.», *38*, 115 (1939).
(9) Bocchiotti, e Collaboratori, «Rend. Acc. Lincei», II, fasc. IV (1947).
(10) Martini Ardy e Castagneto, «S. I. B. S.», *23*, 136 (1947).
(11) Boivin Oddo et Chosson, «C. R. Soc. Biol.», *90*, 853 (1924).

I numeri riportati nelle tabelle esprimono il per mille di glucosio nel sangue.

TABELLA I.

Conigli trattati con estratti di pancreas di vitello.

N.	Peso	cc/kg	Inizio	Dopo 1 h	2 h	3 h	4 h	5 h	6 h
1	1,750	2	1,25	0,86	0,54	0,80	1,02		1,11
2	1,950	2	1,07	0,63	0,71	1,01	1,03		1,05
3	1,550	2	0,98	0,51	0,59	0,87	0,91	1,08	
4	1,900	2	0,99	0,49	0,72	0,89	1,03	1,02	
5	1,600	2	1,12	0,67	0,60	0,90	1,07	1,03	1,09
6	2,250	2	1,15	0,62	0,70	0,89		1,01	1,05
7	2,300	2	1,27	0,61	1,01	1,03	1,10		1,15
8	2,150	2	1,07	0,59	0,73	0,87	1,01		1,09

TABELLA II.

Conigli trattati con estratti di pancreas di uccelli granivori.

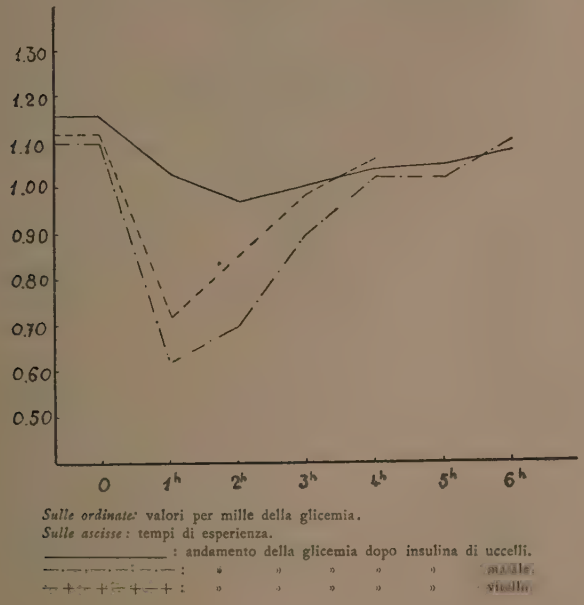
N.	Peso	cc/kg	Inizio	Dopo 1 h	2 h	3 h	4 h	5 h	6 h
1	1,650	2	1,19	1,08	0,93	1,02	1,09		1,12
2	1,850	2	1,21	0,99	0,97	1,03	1,07		1,13
3	1,650	2	1,15	1,06	1,01	1,11	1,09		1,14
4	2,050	2	1,02	0,98	0,91	1,02	0,99	1,12	
5	2,000	3	1,29	1,07	1,01	1,05		1,08	
6	2,350	2	1,25	1,02	1,05	1,08	1,10		1,15
7	2,350	3	1,17	0,99	1,00	1,07	1,09	1,06	1,09
8	2,400	3	1,07	0,95	1,01	1,03	1,03	1,06	
9	1,760	3	1,10	1,01	1,03	0,99	0,98		1,05
10	1,600	3	1,22	1,09	1,01	1,07	1,05	1,01	1,02
11	1,650	3	1,10	0,94	1,01			1,06	
12	1,800	3	1,17	0,93	1,06	1,05		1,06	
13	1,150	3	1,26	1,21	0,97	1,03			1,10
14	1,750	3	1,15	1,05	0,86	0,98			1,10
15	1,700	3	1,12	1,06	0,91	0,97			1,06

Tabella III.

Conigli trattati con estratti di pancreas di maiale.

N.	Peso	cc/kg	Inizio	Dopo 1 h	2 h	3 h	4 h	5 h	6 h
1	2,100	2	1,09	0,71	0,96	0,99	1,05		
2	1,900	2	1,14	0,70	0,83	0,91	1,11		
3	2,100	2	1,15	0,76	0,79	0,93	1,01		1,10
4	2,750	2	1,12	0,72	0,89	1,01	1,06		1,09

Diagramma dei valori medi delle tabelle precedenti.



Sulle ordinate: valori per mille della glicemia.
Sulle ascisse: tempi di esperienza.
———— : andamento della glicemia dopo insulina di uccelli.
—·—·—·— : » » » » » maiale.
+—+—+—+—+ : » » » » » vitelli.

Conclusioni. – Dalle presenti ricerche risulta:

a) che l'iniezione endoperitoneale di liquido preparato da pancreas di maiali adulti e di vitelli giovani in conigli produce una notevole diminuzione del tasso glicemico, più evidente usando pancreas di vitello (diminuzione del 45 °/₀);

b) che l'iniezione di liquido ottenuto da pancreas di uccelli granivori preparati colle stesse modalità ed esperimentati nelle stesse condizioni dei precedenti, provoca negli animali trattati una glicemia molto minore (del 15 °/₀).

Ci appare quindi probabile che, se l'estirpazione del pancreas negli uccelli granivori non provoca rilevabili alterazioni del M. I. G., ciò si debba a che tale organo non elabora un'insulina molto attiva. Infatti nelle esperienze eseguite usando pancreas di vitello l'effetto ipoglicemizzante appare circa tre volte più efficace, che non usando estratti di pancreas di uccelli granivori.

Antropologia. — *Sulle variazioni della statura e del peso nell'accrescimento.* Nota di VENERANDO CORRENTI, presentata (*) dal Socio S. SERGI.

I fenomeni dell'accrescimento umano ed i metodi per la loro valutazione hanno destato sempre l'interesse degli studiosi per l'importanza che l'accrescimento ha dai vari punti di vista antropologico, clinico, igienico, sociale.

Per tali ragioni credo opportuno di presentare qui i risultati di una mia elaborazione su rilievi antropometrici raccolti dal Servizio Scolastico dell'Ufficio di Igiene (1) del Comune di Roma, che provvede con tanta cura al controllo ed al miglioramento delle condizioni igienico-sanitarie nelle scuole di Roma.

L'accrescimento è stato oggetto di relazione da parte del prof. De Toni, al XIX Congresso di Pedriatria tenutosi a Stresa nell'ottobre 1948. Il relatore, considerati i metodi che studiano l'accrescimento somatico, ha ricordato particolarmente: Jackson e Kelly, Bayer e Gray ed infine il Wetzel che « partendo da principî matematici sui quali dobbiamo sorvolare, ha disegnato un grafico – conosciuto col nome di "griglia" di Wetzel – allo scopo di ottenere unicamente dalla statura e dal peso, presi contemporaneamente, indicazioni su due differenti attributi del soggetto in esame: le caratteristiche della sua conformazione fisica e la velocità o livello del suo sviluppo somatico ».

Dei lavori su indicati ho potuto consultare soltanto, fino a questo momento, quello di Bayer e Gray (« Am. Journ. Dis. Childr. », 50, 1408 (1935)) e quello in cui il Wetzel presenta la « Baby Grid » (« Journ. of Pediatr. », 29, 439 (1946) senza dare però alcuna indicazione sulla tecnica seguìta per costruirla.

Com'è noto, in ogni valutazione auxologica, il problema centrale è il concetto di normale che « è quanto di più difficile possa stabilirsi » (Pende) essendo « il concetto di "valore normale" artificioso ed astratto » (De Toni).

Tenendo conto di tale osservazione, vediamo come si potrebbe rispondere, applicando i metodi statistici, ai tre seguenti quesiti:

1°) un soggetto, maschio o femmina, di cui si conoscano l'età (compresa tra quelle prese in esame), la statura ed il peso, può essere considerato normale, per tali caratteri, oppur no?

2°) conoscendo il peso e la statura del soggetto, quale età può essergli attribuita, in base alla sua statura ed al suo peso? In altre parole, se chiamiamo età pondo-staturale quella che gli si può attribuire in base alla sua statura ed al suo peso e la confrontiamo con l'età cronologica, vi è oppur no, corrispondenza tra queste due età?

(*) Nella seduta del 12 marzo 1949.

(1) Direttore dell'Uff. di Igiene del Comune di Roma: prof. S. CRAMAROSSA. Capo divisione Servizio Scolastico dell'Uff. di Igiene: dr. I. SERAFINI.

3°) un soggetto di cui siano note la statura e l'età, quale peso, in media, dovrebbe avere? In altre parole, si può considerare proporzionato, per statura e peso, oppur no?

L'indagine – che sarebbe stato desiderabile compiere su una serie ancor più numerosa – riguarda 4278 soggetti (2214 maschi e 2064 femmine) misurati negli anni 1940–42–43 ed è stata svolta nel modo seguente:

L'età dei soggetti era stata, nei rilievi, computata in anni compiuti e pertanto i dati relativi a ciascuna età vengono riferiti, in questa elaborazione, allo scadere del primo semestre e cioè a 5 anni e 6 mesi, a 6 anni e 6 mesi, ecc.

Suddivisi in classi, per ogni età dei due sessi, i valori della statura (indicata con il simbolo s) e quelli del peso (indicato con il simbolo p), si sono calcolate le medie (Ms e Mp), i sigma (σ_s e σ_p) o scostamenti quadratici medii ed r (o coefficiente di correlazione), secondo le formule riportate in Koller [2] ed in Barbensi [3].

Ottenuti così gli elementi necessari riferiti ad ogni età dei due sessi, si è proceduto alla perequazione grafica di ciascuna serie di dati corrispondenti alle rispettive età, perequazione che ha portato ai seguenti valori dei quali, per brevità, non si considerano, in questa Nota, gli errori probabili.

MASCHI						FEMMINE					
Età anni	M_s cm.	M_p kgr.	σ_s	σ_p	r	Età anni	M_s cm.	M_p kgr.	σ_s	σ_p	r
5 1/2	105,5	18,000	5,5	2		5 1/2	105	17,700	5,10	2	
6 1/2	111	20,000	5,6	2,25		6 1/2	110,5	19,700	5,35	2,25	
7 1/2	116,3	22,100	5,7	2,50		7 1/2	115,8	21,800	5,60	2,50	
8 1/2	121,4	24.300	5,8	2,75		8 1/2	120,9	24,000	5,85	2,75	
9 1/2	126,3	26,600	5,9	3	+ 0,747	9 1/2	125,8	26,300	6,10	3	+ 0,775
10 1/2	131	29,000	6	3,25		10 1/2	130,5	28,700	6,35	3,25	
11 1/2	135,5	31,500	6,1	3,50		11 1/2	135	31,200	6,60	3,60	
12 1/2	139,8	34,150	6,2	3,75		12 1/2	139,3	33,800	6,85	4,05	
13 1/2	143,9	37,000	6,3	4		13 1/2	143,4	36,500	7,10	4,60	

Nella tabella si è riportato, per ogni sesso, un unico valore di r perchè i valori di esso, relativi alle singole età, sono risultati molto vicini tra loro.

Ora, per rispondere al 1° quesito e cioè se un soggetto – maschio o femmina – di cui si conoscano l'età, la statura ed il peso, è normale oppur no, bisogna premettere le seguenti considerazioni.

(2) S. KOLLER, *Metodi statistici generali per il biologo*. Redi, 1947.
(3) G. BARBENSI, *Elementi di metodologia biometrica*. Niccolai, Firenze, 1940.

È noto che i valori della statura e del peso, studiati contemporaneamente in un gruppo di individui, si distribuiscono secondo la legge di Bravais, rappresentata dalla seguente espressione:

$$(1) \qquad z = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma_s \cdot \sigma_p \cdot \sqrt{1 - r^2}} \, e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(s - M_s)^2}{\sigma_s^2} - \frac{2r \cdot (s - M_s) \cdot (p - M_p)}{\sigma_s \cdot \sigma_p} + \frac{(p - M_p)^2}{\sigma_p^2}\right]}$$

dove z è proporzionale al numero dei soggetti aventi la statura s ed il peso p.

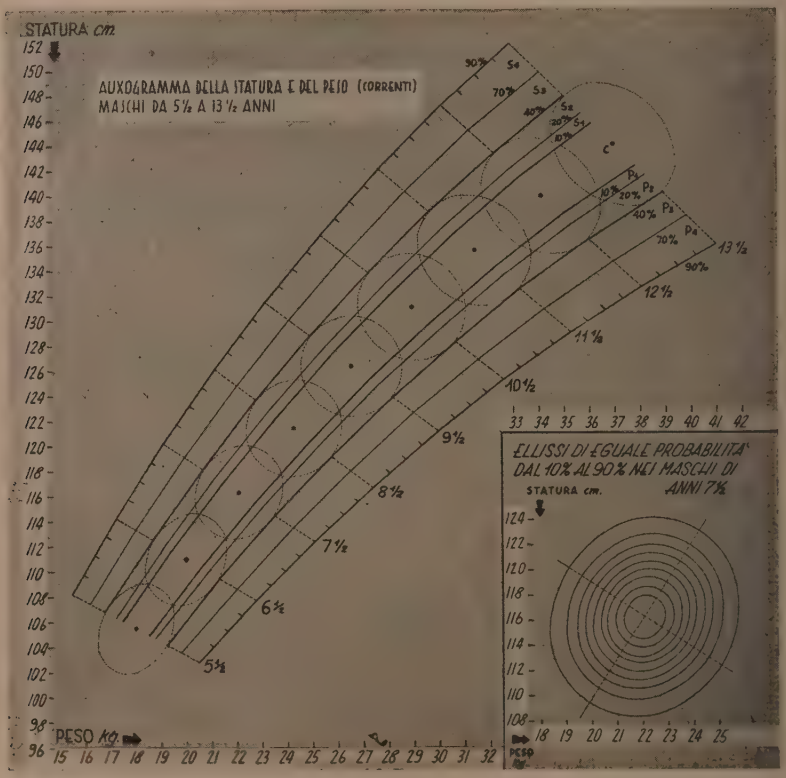


Fig. 1 (vedere spiegazione nel testo).

Questa distribuzione è stata riscontrata sui dati di Davenport e Love [4] e risulta ora confermata perchè anche i dati della mia indagine effettivamente si distribuiscono, con approssimazione, secondo la legge di Bravais.

Pertanto il massimo numero dei soggetti (cioè il caso più probabile) avrà la statura (s) ed il peso (p) eguali rispettivamente alla statura media ed al peso statura e peso si scostano dai valori medi, il numero dei soggetti che hanno

(4) Ch. B. Davenport and A. G. Love, « Army Anthropology », Washington, 1921.

medio di quell'età; per essi, cioè, sarà: $s = M_s$; $p = M_p$; a mano a mano che contemporaneamente quelle misure sarà sempre minore, cioè sarà sempre meno probabile che un soggetto abbia quelle misure.

Ora, il soggetto è tanto più normale quanto più grande è il valore della (1), cioè quanto più piccolo è, in valore assoluto, il suo esponente o quanto più piccolo è il valore della seguente espressione:

$$(2) \qquad \frac{(s - M_s)^2}{\sigma_s^2} - \frac{\sigma_p}{\sigma_s} r \frac{(s - M_s)\cdot(p - M_p)}{\sigma_s \cdot \sigma_p} + \frac{(p - M_p)^2}{\sigma_p^2} .$$

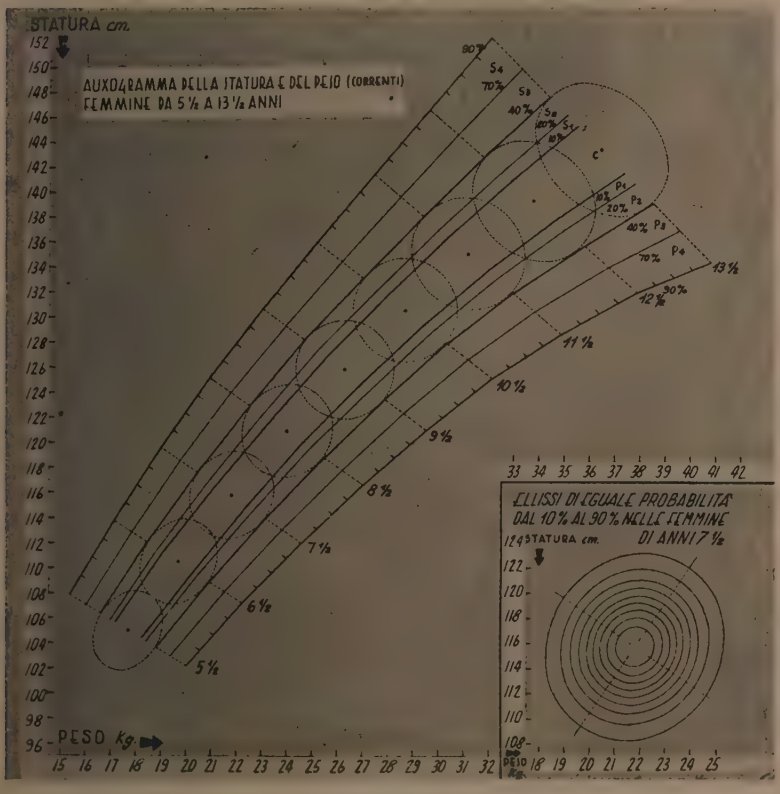


Fig. 2 (vedere spiegazione nel testo).

Questa affermazione ha bisogno di essere precisata con l'equazione che permette di calcolare determinate ellissi di eguale probabilità, cioè determinate sezioni orizzontali dello stereogramma con il quale si può rappresentare la distribuzione correlata dei fenomeni presi in esame. L'equazione è:

$$(3) \qquad \frac{(s - M_s)^2}{\sigma_s^2} - \frac{2\,r\,(s - M_s)\cdot(p - M_p)}{\sigma_s \cdot \sigma_p} + \frac{(p - M_p)^2}{\sigma_p^2} = K$$

dove K è un opportuno valore dipendente dalle percentuali di probabilità fissate.

Nella seguente tabella sono riportati, per i due sessi e per tutte le età prese in esame, i valori di K per le ellissi di eguale probabilità dal 10 % al 90 % (5).

Percentuali di probabilità	Valori di K per le ellissi di eguale probabilità		
		Maschi	Femmine
10 %	$0{,}10 \cdot 2\ (1 - r^2)$	$K = 0{,}0884$	$K = 0{,}07988$
20 %	$0{,}22 \cdot 2\ (1 - r^2)$	$K = 0{,}19448$	$K = 0{,}17573$
30 %	$0{,}36 \cdot 2\ (1 - r^2)$	$K = 0{,}31824$	$K = 0{,}28756$
40 %	$0{,}51 \cdot 2\ (1 - r^2)$	$K = 0{,}45084$	$K = 0{,}40738$
50 %	$0{,}69 \cdot 2\ (1 - r^2)$	$K = 0{,}59996$	$K = 0{,}55117$
60 %	$0{,}92 \cdot 2\ (1 - r^2)$	$K = 0{,}81328$	$K = 0{,}73489$
70 %	$1{,}2 \cdot 2\ (1 - r^2)$	$K = 1{,}0608$	$K = 0{,}95856$
80 %	$1{,}6 \cdot 2\ (1 - r^2)$	$K = 1{,}4144$	$K = 1{,}27808$
90 %	$2{,}3 \cdot 2\ (1 - r^2)$	$K = 2{,}0332$	$K = 1{,}83724$

Riassumendo, il soggetto in esame è normale solo se il valore ottenuto dallo sviluppo della (3) è inferiore al valore del K che, per l'età del soggetto, corrisponde al per cento stabilito quale limite della normalità, e, più precisamente, se – per esempio – si fosse stabilita per la normalità in senso stretto l'ellissi del 40 %, lo sviluppo della (3) per il soggetto considerato dovrebbe essere inferiore al valore di 0,45084 per i maschi e di 0,40738 per le femmine.

Per rispondere al secondo quesito, se cioè, conoscendo la statura ed il peso di un soggetto, si può stabilire l'età che può essergli attribuita, basta calcolare la (2) per le successive età prese in esame. L'età da attribuire al soggetto dato è quella in cui il valore ottenuto dal calcolo della (2) è il più piccolo tra quelli ottenuti dallo sviluppo della stessa espressione per le altre età. In altre parole, l'età attribuita con tale metodo è quella età in cui è massima, per il soggetto considerato, la probabilità di avere quella statura e quel peso che effettivamente ha. Con una interpolazione tale dato può essere calcolato più esattamente.

Chiamando tale età « età pondo–staturale » e confrontandola con l'età cronologica del soggetto, a seconda che questa sia inferiore o superiore, si potrà dire – sempre bene inteso rispetto ai caratteri statura e peso - che il soggetto è precoce o tardivo.

Per rispondere, infine, al terzo quesito, cioè: dato un soggetto di statura ed età note, stabilire quale dovrebbe essere in media il suo peso, bisogna tener conto del coefficiente di correlazione tra statura e peso e delle rette di regressione (una per ogni età) ciascuna delle quali dà, in corrispondenza di ogni statura dei soggetti

(5) Vedere ad esempio: G. Castelnuovo, *Calcolo delle probabilità*, vol. II, cap. XII, Zanichelli, Bologna, 1928.

di quell'età, il valore che dovrebbe avere il peso. Il quesito è stato risolto con l'equazione seguente che va calcolata per ciascuna delle età prese in esame:

$$(4) \qquad p - M_p = r \cdot \frac{\sigma_p}{\sigma_s} \cdot (s - M_s).$$

Allo scopo di rendere più comoda e rapida la valutazione dell'accrescimento staturale e ponderale, e sopratutto di poterlo seguire nel tempo tenendo conto dell'individualità del soggetto, ho costruito un diagramma auxologico che propongo di chiamare « auxogramma » della statura e del peso (v. figg. 1 e 2).

In esso sono stati riuniti – rispettivamente per i maschi e per le femmine e per ciascuna delle età considerate – le ellissi corrispondenti al 40 %, le perpendicolari incontranti le rette di regressione in corrispondenza della media ed i valori relativi alle ellissi corrispondenti al 10, 20, 40, 70, 90 %.

Congiungendo, per le successive età, i valori corrispondenti alla stessa percentuale di probabilità, si sono ottenute curve che delimitano 9 regioni: una centrale (C), corrispondente all'ellissi del 10 %, 4 laterali di sinistra (S_1, S_2, S_3, S_4) e 4 laterali di destra (P_1, P_2, P_3, P_4), nelle quali può essere collocato il 90 % dei valori della statura e del peso che si riscontrano nelle età prese in esame. Pertanto, le 9 regioni dell'auxogramma selezionano automaticamente il 90 % dei soggetti considerati distribuendoli a seconda del tipo di rapporto esistente tra la loro statura ed il loro peso. Le rette tratteggiate rappresentano, come ho detto, le perpendicolari incontranti le rette di regressione in corrispondenza delle medie. Due rette tratteggiate contigue delimitano uno spazio corrispondente all'intervallo di un anno.

I valori da me ottenuti – che, lo ripeto, avrei desiderato di trarre da una serie ancor più numerosa di soggetti – valgono per i soggetti omogenei con le collettività considerate. Con questa riserva, il grafico costruito permette di stabilire con buona approssimazione e massima obiettività il grado di accrescimento somatico raggiunto dal singolo bambino (età pondo–staturale), di fornire indicazioni sulla proporzione tra la sua statura ed il suo peso e di registrare e valutare l'individualità delle varie fasi del fenomeno auxologico periodicamente controllato.

Inoltre, se opportunamente ingrandito, il grafico può fornire indicazioni anche per valutazioni di collettività. Le annesse tabelle, compilate calcolando le relative espressioni, riportano (per ciascuna età dai 5 ai 13 anni compiuti e rispettivamente per i maschi e per le femmine) i pesi che, in media, corrispondono ai valori della statura compresi tra $\pm$ 2 sigma dalla media di ciascuna età.

Le possibilità di applicazione dell'auxogramma saranno prossimamente oggetto di un più esteso e completo lavoro.

Tabella dei valori dei pesi correlati con i valori di statura compresi tra $\pm 2\sigma$ *dalla media di ciascuna età dai 5 ai 13 anni compiuti – MASCHI*

ETÀ	a. 5 1/2	a. 6 1/2	a. 7 1/2	a. 8 1/2	a. 9 1/2	a. 10 1/2	a. 11 1/2	a. 12 1/2	a. 13 1/2
MEDIA PESO . . .	**18,000**	**20,000**	**22,100**	**24,300**	**26,600**	**29,000**	**31,500**	**34,150**	**37,000**
STATURA —2σ	94,5	99,8	104,9	109,8	114,5	119	123,3	127,4	131,3
STATURA —1σ	100 –	105,4	110,6	115,6	120,4	125	129,4	133,6	137,6
STATURA Media	**105,5**	**111** –	**116,3**	**121,4**	**126,3**	**131**	**135,5**	**139,8**	**143,9**
STATURA +1σ	111 –	116,6	122 –	127,2	132,2	137	141,6	146 –	150,2
STATURA +2σ	116,5	122,2	127,7	133 –	138,1	143	147,7	152,2	156,5

Statura	Peso (*)	Peso	Peso	Peso	Peso	Peso	Peso	Peso	Peso
94	14,884								
95	15,155								
96	15,426								
97	15,697								
98	15,968								
99	16,239	16,400							
100	16,510	16,700							
101	16,781	17,000							
102	17,052	17,300							
103	17,323	17,600							
104	17,594	17,900							
105	**17,865**	18,200	18,405						
106	**18,136**	18,500	18,732						
107	18,407	18,800	19,059						
108	18,678	19,100	19,386						
109	18,949	19,400	19,713						
110	19,220	19,700	20,040	20,265					
111	19,491	**20,000**	20,367	20,619					
112	19,762	20,300	20,694	20,973					
113	20,033	20,600	21,021	21,327					
114	20,304	20,900	21,348	21,681	21,939				
115	20,575	21,200	21,675	22,035	22,318				
116	20,846	21,500	**22,002**	22,389	22,697				
117		21,800	**22,329**	22,743	23,076				
118		22,100	22,656	23,097	23,455				
119		22,400	22,983	23,451	23,834	24,152			
120		22,700	23,310	23,805	24,213	24,556			
121		23,000	23,637	**24,159**	24,592	24,960			
122		23,300	23,964	**24,513**	24,971	25,364			
123		23,600	24,291	24,867	25,350	25,768	26,150		
124			24,618	25,221	25,729	26,172	26,578		
125			24,945	25,575	26,108	26,576	27,006		
126			25,272	25,929	**26,487**	26,980	27,434		
127			25,599	26,283	**26,866**	27,384	27,862	28,378	
128			25,926	26,637	27,245	27,788	28,290	28,829	
129				26,991	27,624	28,192	28,718	29,280	
130				27,345	28,003	28,596	29,146	29,731	
131				27,699	28,382	**29,000**	29,574	30,182	30,883
132				28,053	28,761	29,404	30,002	30,633	31,357
133				28,407	29,140	29,808	30,430	31,084	31,831
134					29,519	30,212	30,858	31,535	32,305
135					29,898	30,616	**31,286**	31,986	32,779
136					30,277	31,020	**31,714**	32,437	33,253
137					30,656	31,424	32,142	32,888	33,727
138					31,035	31,828	32,570	33,339	34,201
139						32,232	32,998	**33,790**	34,675
140						32,636	33,426	**34,241**	35,149
141						33,040	33,854	34,692	35,623
142						33,444	34,282	35,143	36,097
143						33,848	34,710	35,594	**36,571**
144							35,138	36,045	**37,045**
145							35,566	36,496	37,519
146							35,994	36,947	37,993
147							36,422	37,398	38,467
148							36,850	37,849	38,941
149								38,300	39,415
150								38,751	39,889
151								39,202	40,363
152								39,653	40,837
153									41,311
154									41,785
155									42,259
156									42,733
157									43,207

(*) I valori in grassetto si identificano o sono i più prossimi al peso medio della rispettiva età.

Tabella dei valori dei pesi correlati con i valori di statura compresi tra $\pm 2\sigma$ *dalla media di ciascuna età dai 5 ai 13 anni compiuti – FEMMINE*

ETÀ		a. 5 1/2	a. 6 1/2	a. 7 1/2	a. 8 1/2	a. 9 1/2	a. 10 1/2	a. 11 1/2	a. 12 1/2	a. 13 1/2
MEDIA PESO		**17,700**	**19,700**	**21,800**	**24,000**	**26,300**	**28,700**	**31,200**	**33,800**	**36,500**
STATURA	-2σ	94,80	99,80	104,60	109,20	113,60	117,80	121,80	125,60	129,20
	-1σ	99,90	105,15	110,20	115,05	119,70	124,15	128,40	132,45	136,30
	Media	**105 —**	**110,50**	**115,80**	**120,90**	**125,80**	**130,50**	**135 —**	**139,30**	**143,40**
	$+1\sigma$	110,10	115,85	121,40	126,75	131,90	136,85	141,60	146,15	150,50
	$+2\sigma$	115,20	121,20	127 —	132,60	138 —	143,20	148,20	153 —	157,60

Statura	Peso (*)	Peso	Peso	Peso	Peso	Peso	Peso	Peso	Peso
94	14,367								
95	14,670								
96	14,973								
97	15,276								
98	15,579								
99	15,882	15,963							
100	16,185	16,288							
101	16,488	16,613							
102	16,791	16,938							
103	17,094	17,263							
104	17,397	17,588	17,729						
105	**17,700**	17,913	18,074						
106	18,003	18,238	18,419						
107	18,306	18,563	18,764						
108	18,609	18,888	19,109						
109	18,912	19,213	19,454	19,669					
110	19,215	**19,538**	19,799	20,033					
111	19,518	**19,863**	20,144	20,397					
112	19,821	20,188	20,489	20,761					
113	20,124	20,513	20,834	21,125	21,436				
114	20,427	20,838	21,179	21,489	21,816				
115	20,730	21,163	**21,524**	21,853	22,196				
116	21,033	21,488	**21,869**	22,217	22,576				
117		21,813	22,214	22,581	22,956				
118		22,138	22,559	22,945	23,336	23,750			
119		22,463	22,904	23,309	23,716	24,146			
120		22,788	23,249	**23,673**	24,096	24,542			
121		23,113	23,594	**24,037**	24,476	24,938			
122		23,438	23,939	24,401	24,856	25,334	25,714		
123			24,284	24,765	25,236	25,730	26,136		
124			24,629	25,129	25,616	26,126	26,558		
125			24,974	25,493	**25,996**	26,522	26,980	27,251	
126			25,319	25,857	**26,376**	26,918	27,402	27,709	
127			25,664	26,221	26,756	27,314	27,824	28,167	
128				26,585	27,136	27,710	28,246	28,625	
129				26,949	27,516	28,106	28,668	29,083	29,286
130				27,313	27,896	**28,502**	29,090	29,541	29,787
131				27,677	28,276	**28,898**	29,512	29,999	30,288
132				28,041	28,656	29,294	29,934	30,457	30,789
133				28,405	29,036	29,690	30,356	30,915	31,290
134					29,416	30,086	30,778	31,373	31,791
135					29,796	30,482	**31,200**	31,831	32,292
136					30,176	30,878	31,622	32,289	32,793
137					30,556	31,274	32,044	32,747	33,294
138					30,936	31,670	32,466	33,205	33,795
139						32,066	32,888	**33,663**	34,296
140						32,462	33,310	**34,121**	34,797
141						32,858	33,732	34,579	35,298
142						33,254	34,154	35,037	35,799
143						33,650	34,576	35,495	**36,300**
144							34,998	35,953	**36,801**
145							35,420	36,411	37,302
146							35,842	36,869	37,803
147							36,264	37,327	38,304
148							36,686	37,785	38,805
149								38,243	39,306
150								38,701	39,807
151								39,159	40,308
152								39,617	40,809
153								40,075	41,310
154									41,811
155									42,312
156									42,813
157									43,314
158									43,815

(*) I valori in grassetto si identificano o sono i più prossimi al peso medio della rispettiva età.

COMMEMORAZIONI

Commemorazione del Corrispondente Carlo Perrier

letta (*) dal Socio Ugo Panichi

Or fa quasi un anno che Carlo Perrier, nostro Socio Corrispondente, a pochi giorni di distanza dalla nomina ad Accademico Nazionale, fu improvvisamente strappato alla sua fervida attività.

Non era nell'ordine delle cose che toccasse a me vecchio commemorare il caro Collega, che era ancora vegeto e con fervore giovanile era intento a svolgere un elevato programma scientifico, allorchè una fine prematura troncò le sue e le nostre speranze.

Ma per l'amicizia che a lui mi legava, trovo conforto a parlare dell'amico perduto; ed è bello che l'esimio mineralogo, il quale ebbe insieme mentalità di fisico, di chimico, di matematico, e dedicò tutto sé stesso alle ricerche con nobile e sincera passione, venga commemorato in quest'Aula che accoglie tutte le scienze e suggestivamente esprime l'austerità e la dignità dell'alta cultura.

Ricordo le nostre frequenti conversazioni scientifiche e l'affinità di vedute che ci univa in riguardo allo sviluppo della Mineralogia ed alla sua elevazione sopra una solida base fisico-chimico-matematica. L'opera del Perrier è tutta corrispondente a questo concetto.

Egli esordì come chimico, dopo la laurea in chimica da lui conseguita nel 1908 a Torino, dove era nato. Dopo la laurea rimase ancora due anni col prof. Fileti; e poi andò a Zurigo per due semestri, seguendo i corsi di chimico-fisica ed elettro-chimica col prof. Baur e di analisi dei gas col prof. Treadwel. Nel 1912 andò a Napoli assistente del prof. Piutti, finchè nel 1914 tornò a Torino, e nell'Istituto del prof. Zambonini si dedicò decisamente alla Mineralogia; vi rimase assistente fino al 1921, allorchè vinse il posto di Direttore del laboratorio chimico petrografico dell'Ufficio Geologico, e, nello stesso anno, conseguì la libera docenza in Mineralogia.

Già nelle ricerche eseguite dopo la laurea (sulle reazioni fotochimiche e su certe isomerie fisiche) si rivelano tenacia di intento e competenza sperimentale. Sotto la guida di Zambonini studiò goniometricamente cristalli di gesso e di zolfo e di vari composti chimici. Eseguì pure ricerche chimiche sull'idrozincite e sulla rosasite, di cui trovò la vera natura chimica; il che poi lo condusse a

(*) Nella seduta del 12 marzo 1949.

scoprire presenza di zinco in malachite pura. In seguito ad accurato studio del minerale di Caprera che Lovisato definì tantalite, egli trovò che era ilmenite.

Uno studio di Perrier e Moschetti su alcuni tetracianonicheloati ed i corrispondenti tetracianopalladoati, contribuì ad affermare l'appartenenza di Ni e Pd allo stesso gruppo isomorfogeno.

Andato il Perrier a Roma all'Ufficio Geologico, vi restò alcuni anni; e qui, dedicandosi a ricerche nel campo petrografico, ebbe l'idea di utilizzare nelle determinazioni ottiche il piatto di Fedorow, che non era ancora stato usato in Italia. In una Nota del 1925 ai Lincei egli propose un metodo di determinazione degli indici di rifrazione mediante il detto piatto; in una serie di osservazioni in conferma delle formule di Nikitin per la determinazione delle birifrangenze, potè stabilire i limiti di applicabilità di quelle formule e al tempo stesso scoprire l'influenza che lievi birifrangenze nei vetri emisferici di Fedorow potevano apportare nella misura delle birifrangenze. Tali contributi alla conoscenza del metodo cosidetto universale, dimostrano il rigore e l'acume delle ricerche del Perrier.

Di quelli stessi anni sono le Note sull'eclogite di Voltaggio, su antimonite e bismutinite, sulla presenza nei granati di Mn e Ti trivalenti (presenza che trova giustificabile per il Ti, non per Mn); constatò presenza di oro ed argento in certe arenarie di Sassoferrato; descrisse un metodo nefelometrico per determinare in rocce e minerali piccole quantità di fluoro, usando precipitato di acetato–fluoruro di lantanio peptonizzato mediante silice.

Dopo questi anni passati a Roma, nel 1927, in seguito a concorso, passò a dirigere l'Istituto di Mineralogia dell'Università di Messina e nel 1929 quello dell'Università di Palermo. Dopo circa dieci anni fu chiamato alla Cattedra di Mineralogia di Genova.

In un lavoro pubblicato nel 1931 il nostro Perrier con determinazioni mediante il piatto di Fedorow riuscì a stabilire nette differenze fra i cristalli microscopici delle emoglobine di uomo e di neonato.

Intanto le sue ricerche si rivolgevano principalmente al campo chimico–fisico, che egli prediligeva. In un eccellente lavoro, che è ancora d'indole petrografica in quanto studia il plagioclasio di una plumosite di Val Sabbiola, egli, dopo una accurata analisi chimica del plagioclasio (che risultò notevolmente acido) e numerose determinazioni ottiche, le quali risultarono non corrispondenti alla acidità, si riferì alla teoria delle deformazioni joniche: dopo una esposizione generale delle deformazioni e polarizzazioni anioniche e cationiche nei radicali e negli joni complessi, considerando le polarizzazioni nei plagioclasi, trovò in esse una giustificazione delle anomalie osservate nel plagioclasio di Val Sabbiola.

A Palermo il Perrier collaborò col collega Segrè. In una Nota sulla organificazione del fosforo in tessuti animali, egli curò l'isolamento dell'isotopo radioattivo P^{32} ricavato da pezzi metallici provenienti dalle pareti del Cyclotron di California. Tra questi pezzi una lastra di molibdeno che era stata bombardata intensamente da deutoni e neutroni, permise agli Autori di individuare l'elemento 43 ed esaminarne varie proprietà, che sono prossime a quelle del renio. Con nuovo materiale riuscirono a separare e studiare maggior quantità di iso-

topi del 43. Di tali importanti ricerche dettero conto i Lincei, il *Journal of Chemical phisics*, la *Nature*, ecc.

Con Bellanca il Perrier espose un ingegnoso metodo per sensibilizzare, mediante potenziometro e galvanometro, la determinazione di una temperatura variabile nel tempo.

Con Ferla eseguì ricerche microchimiche su gli acidi lattici, sia per differenziare gli attivi dagli inattivi, sia per isolare e riconoscere l'acido lattico che si produce nei fenomeni glicolitici (in tubercolotici, cancerosi, ecc.).

Nel 1940 apparve il notevole studio Perrier–Bellanca sulla aftitalite e sulla palmierite considerate nel sistema ternario: solfati di potassio, di sodio, di piombo. L'esame è condotto con rigorose analisi termiche riguardo ai tre composti binari.

A Genova il Perrier, dopo aver riorganizzato l'Istituto mineralogico, studiò le condizioni di isomorfismo riferendosi alla cosidetta regola di Zambonini. Trattò anche della regola di Retgers riguardo ai volumi specifici dei cristalli misti. Aveva altresì ripreso, in collaborazione con Lombardi, l'esame delle emoglobine cristallizzate, considerando quelle del cavallo, dell'asino e dei loro incroci.

Si era da poco tempo procurato un assistente fresco di laurea, con spiccata tendenza matematica, il Fumi, col quale stava avviando un grande programma; ma la produzione scientifica del nostro Perrier dovette arrestarsi qui. Aveva 62 anni, aveva passato dalla laurea 40 anni di lavoro.

Egli aveva dato molto della sua attività anche all'insegnamento. Fece appena a tempo a stampare il *Corso di Mineralogia*, pregevole trattato nel quale ha grande sviluppo la cristallografia; vi è svolta con ampiezza l'ottica; particolarmente sviluppata ed ottimamente esposta è la cristallografia chimica.

Nella produzione del Perrier è dominante l'indirizzo chimico–fisico. Ora sono relazioni di isomorfismo e di morfotropia in serie di composti; ora vengono definiti i caratteri e la natura chimica di alcune specie minerali; ora egli applica la teoria delle deformazioni joniche per interpretare il comportamento anomalo di certi feldspati; ora mostra il carattere isomorfogeno dello zinco col rame nella malachite; ora mediante analisi termiche precisa la natura dell'aftitalite e la non esistenza di cristalli misti aftitalite–palmierite; ora dimostra l'isomorfismo fra antimonite e bismutinite.

Ha lavori con finalità geochimica, fra i quali sono in primo piano quelli relativi all'elemento 43; così pure quelli che, impiegando indicatori radioattivi, indagarono il processo di organificazione del fosforo negli organismi, e quelli che stabilirono l'impossibilità dello scambio dello stesso catione fra due diversi anioni complessi; lavori che, nel 1940, ebbero un premio dell'Accademia d'Italia.

Recentemente, riguardo al concetto di isomorfismo, egli esaminò come, oltre alla influenza dei raggi jonici, entrino in gioco anche le analogie delle azioni fisiche esercitate da parte dei leptoni corrispondentisi nei due reticoli.

In una relazione alla Società Mineralogica Italiana egli espose le recenti vedute sulla stabilità dei reticoli e le correlazioni tra esse e le cause del polimorfismo. Pare di udirne ancora la voce, che tenne avvinta la nostra attenzione nel congresso di Genova.

Senza dubbio nel Perrier il Mineralogo e il Chimico si abbinano; ma la tonalità dell'opera sua è mineralogica; e la Mineralogia italiana ha perso in lui un grande valore.

Ciò sentono vivamente l'Università di Genova, dove egli era molto amato ed apprezzato; la Società Mineralogica, di cui, come in una grande famiglia, egli era uno dei componenti più autorevoli; l'Accademia dei Lincei, che ha perso in lui un valente collaboratore. Tutti ne ricordiamo con rimpianto la cordialità gentile e signorile, la profonda cultura, l'abilità sperimentale, l'importanza delle ricerche e dei risultati, la serena e schietta onestà scientifica e umana.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Presidente comunica che è uscito il 1° fascicolo dei Rendiconti dell'anno in corso e lo presenta alla Classe.

Il Socio Perucca presenta la VI edizione del 1° volume della sua opera « Fisica generale e sperimentale » e la illustra brevemente mettendo in rilievo come tal volume, pur presentando non lievi varianti rispetto alle precedenti edizioni, conservi la sua originaria finalità di costituire cioè un'opera intermediaria tra i libri di fisica elementare e le opere di fisica pura e applicata.

Il Socio Puntoni presenta e illustra brevemente il 2° ed ultimo volume del suo « Trattato d'igiene », del quale ha già offerto in omaggio il 1° volume all'Accademia. Il presente volume comprende una esposizione sintetica della epidemiologia e della profilassi in genere e la trattazione speciale di tutte le più importanti malattie microbiche e parassitarie nonchè di alcune piaghe sociali non infettive.

L'Accademico Segretario illustra alcune pubblicazioni inviate in omaggio all'Accademia, tra le quali figurano opere in lingua russa, dono dell'Accademia delle Scienze di Mosca. Di tali opere, alcune contengono biografie di scienziati russi, mentre altre appartengono rispettivamente alla serie dei classici delle scienze e a una serie detta « scientifico-popolare ».

L'accademico Segretario illustra poi uno studio del Socio Russo dal titolo: « Stadi del ciclo evolutivo di un Ciliato, loro individualità e rapporto con analoga manifestazione dei Metazoi », estratto dei Rendiconti dell'Accademia dei XL, serie III, vol. XXVII, uno studio del Socio Silvestri dal titolo: « Un piccolo insetto amico degli olivicultori », Estratto dalla rivista « Olearia » n. 1, gennaio 1949, numerosi lavori del dott. Mario Crenna e la raccolta di comunicazioni e memorie del Comité National Français d'Astronomie.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei Rendiconti i Soci Beccari, Negri, Caglioti, Sergi, Trabacchi, Vernoni, Picone e Armellini.

Il Socio Brunelli presenta la Memoria del dott. Vito Zanon dal titolo: « Crisostomatacee africane ».

Il Presidente comunica che sarà nominata una apposita Commissione per l'esame di detta Memoria.

L'Accademico Segretario legge l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

AGENO M., CHIOZZOTTO M. e QUERZOLI R., Sulla nuova tecnica dei contatori a scintillazione (pres. dal Socio G. C. TRABACCHI).

ARMELLINI CONTI G., La pioggia invernale a Roma dal 1824 al 1949 (pres. dal Socio G. ARMELLINI).

BACCAREDDA M., Velocità ultrasonore e compressibilità adiabatiche in alcuni derivati benzenici bisostituiti isomeri (pres. dal Corrisp. G. NATTA).

BONETTI E. e ALOISI M., Il metabolismo batterico del glicerolo e dei suoi derivati. – III. Comportamento di alcuni Mycobacteria (pres. dal Socio G. VERNONI).

BONSIGNORE A., Dosaggio separato dei piridin nucleotidi e della N_I-metil etilnicotinamide dei tessuti mediante l'azione della nucleosidasi (pres. dal Socio U. LOMBROSO).

CAGLIOTI V., SARTORI G. e SILVESTRONI P., Ricerche polarografiche e coulombometriche su alcuni complessi cianidrici del manganese mono e bivalente (pres. dal Corrisp. V. CAGLIOTI).

GROSS W., Sulla matrice di Green di un problema di Elasticità Piana (pres. dal Socio M. PICONE).

PERSONALE ACCADEMICO

Il Socio Panichi commemora il compianto Collega Carlo Perrier, ricordandone la nobile figura di uomo e di scienziato. Il testo integrale della commemorazione sarà pubblicata negli Atti dell'Accademia.

Il Presidente ringrazia il Socio Panichi e invia un reverente saluto alla memoria dell'illustre scienziato scomparso. La Classe si associa.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 12 marzo 1949

ASRATJAN E. A. — *Ivan Petrovic Pavlov.* Moskva–Leningrad. Ak. Nauk. SSSR, 1946. Pp. 30, in–16°.

CALIRAUT A. — *Teorija figury zemli, osnovannaja na načalah gidrostatiki.* Perevod N. S. Jahontovoj. Moskva–Leningrad. Ak. Nauk SSSR, 1947. Pp. 358, in–8°, con tavv. (Klassiki Nauki).

ČERNYŠEVA E. A. — Vedi: FARADAY Michael.

COMITÉ NATIONAL FRANÇAIS D'ASTRONOMIE. — *Communications et Mémoires.* (Réunions Scientifiques des 22, 23 et 24 octobre 1946, tenues à Paris avec la participation d'astronomes étrangers pour le Centenaire de la découverte de Neptune). Orléans, Impr. Nouvelle, 1948. Pp. 167, in–4°, con figg.

CRENNA Mario. — *Celebrazione Voltiana a Pietramala.* (Discorso). Estr. da « Il Monitore Tecnico », a. LIII, 1947, n. 8.

— *Il concetto di temperatura nell'attuale termologia.* Estr. da « L'Universo », a. XXIV, 1943, n. 6.

— *Deduzione elementare del principio di Huygens, sul moto del baricentro di un pendolo composto dal teorema delle aree.* Estr. da « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », a. X, 1931, n. 5.

— *Il duplice significato biologico della divergenza fogliare generatrice.* Estr. da « Rivista di Biologia », vol. XV, 1933, fasc. 3–4.

— *Esposizione elementare di un caso notevole del problema ristretto dei tre corpi.* Estr. da « Periodico di Matematiche », s. 4ª, vol. XXIII, 1943, n. 1–2.

— *La legge psicofisica e lo strumento fisiologico della sua esplicazione.* Estr. da « Rivista di Biologia », vol. XXXVI, 1943.

— *Notevoli proprietà delle concali di Huber.* Estr. da « Bollettino di Matematica », s. 4ª, annata XXXVII, 1941, fasc. 5.

— *Scienza e fede in Alessandro Volta.* Estr. da « Il Monitore Tecnico », a. L, 1944, n. 12.

CRENNA Mario. — *Il significato assoluto della legge psicofisica.* Estr. da « Lavoro umano », vol. V, 1944.

— *Il significato finalistico della legge psicofisica.* Estr. da « Rivista di Biologia », vol. XXXV, 1943.

— *Il significato teoleologico della legge di rifrazione del flusso termico.* Estr. da « Periodico di Matematiche », s. 4ª, volume XXIV, 1946, n. 1.

— *Sulle distanze dei pianeti dal Sole.* Estr. da « Coelum », vol. X, 1940.

— *La teoria di relatività e la filosofia tradizionale.* Estr. da « Antonianum », a. XXIII, 1948, fasc. 2–3.

DELONE B. N. — *Peterburgskaja Škola teorii čisel.* Moskva–Leningrad. Ak. Nauk SSSR, 1947. Pp. 422, in–8°, con tavv.

FARADAY Michael. — *Eksperimental'nye Issledovanija po električestvu.* T. I. Perevod s anglijskogo E. A. Černyševoj i Ja. R. Šmidt–Černyševoj. Moskva–Leningrad, Ak. Nauk SSSR, 1947. Pp. 848, in–8°, con tavv. (Klassiki Nauki).

GAZE V. F. – Vedi: MONGE Gaspard.

GUKOVSKIJ M. A. — *Mehanika Leonardo da Vinci.* Moskva–Leningrad, Ak. Nauk SSSR, 1947. Pp. 815, in–8°, con tavv.

IVANOV L. A. — *Svet i vlaga v žizni naših drevesnyh porod.* Moskva–Leningrad, Ak. Nauk. SSSR, 1946. Pp. 60, in–8°, con ill. (Timirjazevskie Čtenija, V).

JAHONTOVA N. S. – Vedi: CLAIRAUT A.

KARATAEV N. M. — *Nikolaj Mihajlovič Prževal' skij, pervyj issledovatel' prirody central'noj Azii.* Moskva–Leningrad, Ak. Nauk. SSSR, 1948. Pp. 284, in–8°, con tavv.

KOŠTOJANC H. S. — *Ocerki po istorii fiziologii v Rossii.* Moskva–Leningrad, Ak. Nauk SSSR, 1946. Pp. 494, in–8°, con tavv.

— *Povest' iz žizni akademika Pavlova.* Moskva–Leningrad, Ak. Nauk SSSR, 1947. Pp. 144, in–8°, con tavv.

KOVALEVSKAYA S. V. — *Vospominanija detstva i avtobiografičeskie očerki*. Moskva–Leningrad, Ak. Nauk SSSR, 1945. Pp. 227, in–8°, con tavv.

KRAVKOV S. V. — *Vzaimodejstvie organov čuvstv*. Moskva–Leningrad, Ak. Nauk SSSR, 1948. Pp. 128, in–8°, con ill.

MEČNIKOV I. I. — *Stranicy vospominanij* . . . Moskva–Leningrad, Ak. Nauk SSSR, 1946. Pp. 279, in–8°. (Naučno–Populjarnaja Serija, Memuary).

MENŠUTKIN B. N. — *Žizneopisanie Mihaila Vasil'eviča Lomonosova*. III^e Izdanie. Moskva–Leningrad, Ak. Nauk SSSR, 1947. Pp. 295, in–8°, con tavv.

MONGE Gaspard. — *Nacertatel'naja Geometrija*. Perevod V. F. Gaze . . . Moskva–Leningrad, Ak. Nauk SSSR, 1947. Pp. 291, in–8°, con tavv. (Kalassiki Nauki).

MOROZOV N. A. — *Povesti moej žizni* . . . Moskva–Leningrad, Ak. Nauk SSSR, 1947. Voll. 3, in–8°, con tavv.

PERUCCA Eligio. — *Fisica generale e sperimentale*. I. *Meccanica–Calore*. Sesta Edizione. Torino, U. T. E. T., 1949. Pp. XXIV–802, in–8°, con figg.

PUNTONI Vittorio. — *Trattato d'igiene*. Vol. II. *Epidemiologia e profilassi*. Roma, «Studium Urbis», 1948. Pp. VII–1444, in–8°, con figg.

RUSSO Achille. — *Stadi del ciclo evolutivo di un Ciliato, loro individualità e rapporto con analoghe manifestazioni nei Metazoi*. Estr. da «Rendiconti dell'Accademia dei XL», s. 3ª, vol. XXVII, 1948.

SILVESTRI Filippo. — *Un piccolo insetto amico degli olivicultori*. Estr. da «Olearia», 1949, n. 1.

SMIDT–ČERNYŠEVA Ja. R. – Vedi: FARADAY Michael.

SMIRNOV V. I. – *Gaspar Monž*. Sbornik statej . . . Moskva–Leningrad, Ak. Nauk SSSR, 1947, Pp. 85, in–8°.

VAVILOV S. I. – *Isaak N'juton*. II^e Izdanie. . . Moskva–Leningrad, Ak. Nauk SSSR, 1945. Pp. 230, in–8°, con tavv.

— *Sovetskaja Nauka na Novom Etape*. Moskva–Leningrad, Ak. Nauk SSSR, 1946. Pp. 104, in–16°

— *Trideat' Let Sovetskoj Nauki*. Moskva–Leningrad, Ak. Nauk SSSR, 1947. Pp. 62, in–16°.

U. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 9 aprile 1949

Presidenza del Socio G. CASTELNUOVO

NOTE DI SOCI

Matematica (Geometria differenziale). — *Alcune proprietà caratteristiche delle varietà a curvatura costante* (*). Nota I (**) del Corrisp. BENIAMINO SEGRE.

1. Una notevole proposizione, stabilita dallo Schlaefli nel 1871, afferma che le varietà riemanniane a curvatura costante, di dimensione $n(\geq 2)$ arbitraria, sono le sole V_n riemanniane rappresentabili sopra un S_n euclideo in modo che le imagini delle loro linee geodetiche siano linee rette (1). Per $n = 2$, tale proprietà era già stata ottenuta qualche anno prima dal Beltrami (2).

In un lavoro recente ho esteso il risultato di Beltrami (3), provando che le superficie a curvatura costante sono le sole superficie rappresentabili su di un piano euclideo, in guisa che alle loro linee geodetiche corrispondano cerchi (o, in particolare, rette). Il caso in cui si richiegga ulteriormente che

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico dell'Università di Bologna.

(**) Presentata nella seduta del 12 febbraio 1949.

(1) Cfr. L. SCHLAEFLI, *Nota alla Memoria del sig. Beltrami, « Sugli spazi di curvatura costante »*, « Ann. di Mat. », (2) *5* (1871 73), 178-193. La Memoria del Beltrami a cui quella dianzi citata si riferisce, dimostra la possibilità di rappresentare geodeticamente (ossia nel modo suddetto) su di un S_n ogni V_n a curvatura costante; ved. E. BELTRAMI, *Teoria fondamentale degli spazi di curvatura costante*, « Ann. di Mat. », (2) *2* (1868-69), 232-255 = *Opere matematiche*, vol. I (Milano, Hoepli, 1902), 406-429. Su tale risultato è poi tornato il BELTRAMI nel lavoro *Osservazione sulla precedente Memoria del sig^r. prof. Schläfli*, « Ann. di Mat. », (2) *5* (1871 73), 194-198 = *Opere matematiche*, vol. II (Milano, Hoepli, 1904), 385-389.

(2) E. BELTRAMI, *Risoluzione del problema: « Riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette »*, « Ann. di Mat. », (1) *7* (1865), 185-204 = *Opere matematiche*, vol. I (Milano, Hoepli, 1902), 262-280.

(3) Ved. B. SEGRE, *Generalizzazione di un teorema di Beltrami*, « Boll. Un. Mat. Ital. », (3) *4* (1949), 16-22.

la rappresentazione della superficie sul piano risulti conforme, era stato in precedenza trattato da F. Busse (4).

In questa Nota, dopo aver esposto una semplice dimostrazione del teorema di Schlaefli richiamato in principio, stabilisco il

Teorema I. – *Ogni* V_n *riemanniana a curvatura costante può rappresentarsi su di un* S_n *euclideo in guisa che alle geodetiche di* V_n *corrispondano cerchi (o, in particolare, rette).*

Il problema di determinare le rappresentazioni di V_n su S_n soddisfacenti alla condizione enunciata, si riconduce subito a quello di rappresentare un S'_n proiettivo su S_n in guisa che alle rette di S'_n corrispondano cerchi. Esso vien qui parzialmente risolto mediante certe corrispondenze, dette di tipo C, introdotte nel n. 3.

Queste verranno caratterizzate, in una successiva Nota II, coll'ulteriore proprietà di mutare piani in 2–sfere (n. 4). Ivi inoltre mostrerò che, se $n = 2, 3, 5$, le sole corrispondenze fra S'_n ed S_n trasformanti rette in cerchi sono quelle di tipo C (n. 7), mentre invece per $n = 4$ ve ne sono altre (compiutamente determinate nel n. 6). Non approfondirò ulteriormente la questione per $n \geq 6$, a prescindere dall'osservazione che (n. 5) ogni eventuale corrispondenza non di tipo C trasformante rette in cerchi dev'essere birazionale e mutare i piani di S'_n in superficie di Veronese. È notevole che, sebbene il presente lavoro si svolga nel campo reale con indirizzo locale, e quindi implichi soltanto convenienti ipotesi di derivabilità, ciascuna delle corrispondenze suddette (sia essa o no di tipo C) risulta algebrica.

Nella Nota III invertirò il teor. I per $n = 3$, dimostrando il

Teorema II. – *Ogni* V_3 *riemanniana rappresentabile su di un* S_3, *in guisa che alle geodetiche di* V_3 *corrispondano cerchi, dev'essere a curvatura costante.*

Ho già avvertito che un risultato analogo sussiste per le V_n di dimensione $n = 2$, ed è probabile ch'esso valga altresì per $n \geq 4$, sebbene in quest'ultimo caso la discussione diventi assai più difficile (n. 11). Il risultato sarà però acquisito nella Nota III anche per le V_n di dimensione $n > 3$ arbitraria soddisfacenti ad una certa condizione, meno restrittiva ad esempio di quella che V_n sia rappresentata su S_n in modo conforme. Nella Nota IV quest'ultimo caso particolare verrà ulteriormente esteso col seguente

Teorema III. – *Ogni* V_n *riemanniana rappresentabile conformemente su di un* S_n *euclideo (nel campo reale), in modo che alle geodetiche di* V_n *corrispondano su* S_n *linee di curvatura costante, è necessariamente a curvatura costante. La rappresentazione di* V_n *su* S_n *riesce allora del tipo considerato nel n. 3, e quindi le linee a curvatura costante di* S_n *trasformate delle geodetiche di* V_n *risultano cerchi. La rappresentazione, inoltre, muta le* $(n-1)$*–sfere di* V_n *(ossia i luoghi dei punti di* V_n *aventi distanza geodetica costante da un punto fisso) in* $(n-1)$*–sfere di* S_n.

In altri lavori mostrerò che le varietà riemanniane a curvatura costante si possono anche caratterizzare come le uniche V_n di Finsler rap-

(4) F. Busse, *Ueber eine spezielle konforme Abbildung der Flächen konstanten Krummungsmaasses auf die Ebene* (Dissertation, Berlin, 1896–97), p. 9.

presentabili su di un S_n in guisa che alle $(n-1)$–sfere di V_n corrispondano $(n-1)$–sfere di S_n, e che ogni rappresentazione siffatta riesce del tipo considerato nel teor. III. Darò poi varie interpretazioni fisiche dei risultati suddetti, indicandone fra l'altro il significato in relazione ad un'estensione del problema Riemann–Helmholtz sui fondamenti della geometria.

2. Ecco intanto come, nel lavoro citato in [1], lo Schlaefli procede per dimostrare che ogni V_n rappresentata geodeticamente su di un S_n ha curvatura costante. Introdotte in S_n coordinate proiettive non omogenee di punto, queste possono assumersi come coordinate curvilinee del punto omologo di V_n, ciò che definisce compiutamente la forma differenziale quadratica esprimente il ds^2 di V_n. Orbene, affinchè la rappresentazione di V_n su S_n riesca geodetica, occorre e basta che gli $\frac{1}{2}n(n+1)$ coefficienti del ds^2 soddisfino ad un certo sistema di $\frac{1}{2}n^2(n+1)$ equazioni differenziali del 1° ordine; e l'integrazione – tutt'altro che agevole – di tale sistema, conduce appunto al risultato voluto.

Per $n \geqq 3$, lo stesso risultato può oggi ottenersi in un modo assai più rapido, che ora passiamo ad esporre.

Incominciamo col ricordare che una superficie immersa in una V_n riemanniana (di dimensione $n \geqq 3$) dicesi geodetica – in un suo punto O – se ogni linea geodetica di V_n uscente da O, ed ivi tangente alla superficie, giace interamente su questa. Una superficie di V_n dicesi poi (secondo J. Hadamard) totalmente geodetica, quand'essa è geodetica in ogni suo punto. Orbene – come conseguenza di un classico teorema di F. Schur – si dimostra che, ogni V_n riemanniana di cui tutte le superficie geodetiche siano totalmente geodetiche, è necessariamente a curvatura costante [5].

Ciò premesso, se una V_n è rappresentata su di un S_n in modo che alle linee geodetiche di V_n corrispondano linee rette in S_n [6], abbiamo intanto che – viceversa – alle rette di S_n corrispondono le geodetiche di V_n, poichè si determina una delle prime od una delle seconde dandone ad arbitrio un elemento e, d'altro canto, il riferimento fra V_n ed S_n induce una trasformazione regolare fra i loro elementi curvilinei. Inoltre è chiaro che ogni superficie geodetica di V_n si rappresenta in S_n con un piano. Siccome a quest'ultimo appartengono ∞^2 rette, ne consegue che una qualunque superficie geodetica di V_n contiene ∞^2 linee geodetiche, ed è quindi totalmente geodetica. Ma ciò appunto esige, come s'è detto, che V_n sia a curvatura costante.

3. Per dimostrare il teor. I (enunciato nel n. 1) basta osservare che, presa una V_n a curvatura costante e rappresentatala geodeticamente su di uno spazio proiettivo S_n – ciò che può sempre farsi in base ai risultati richiamati di Beltrami

(5) Cfr. ad esempio E. CARTAN, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, 2ª ed. (Paris, Gauthier–Villars, 1946), nn. 108, 179, 199.

(6) Si tratta naturalmente di porzioni convenienti di linee rette, appartenenti ad un campo opportuno di S_n. Avvertenze analoghe verranno sottintese in seguito.

e di Schlaefli - si ottengono tutte e sole le rappresentazioni di V_n su di un S_n euclideo che mutano le geodetiche di V_n in cerchi di S_n, componendo la rappresentazione di V_n su S'_n colle varie corrispondenze puntuali fra S'_n ed S_n trasformanti le rette di S'_n in cerchi di S_n. Si rilevi quindi che corrispondenze di questo ultimo tipo esistono per ogni valore $\geqq 2$ della n, tali essendo le ∞^{n^2+3n+1} corrispondenze – che diremo di tipo C – rappresentate dalle

$$(1)\qquad x'_i = \frac{a_{i0}(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) + a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + a_{i,n+1}}{a_{00}(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + \cdots + a_{0n}x_n + a_{0,n+1}}$$
$$(i = 1, 2, \cdots, n),$$

dove le x e le x' denotano rispettivamente coordinate cartesiane ortogonali in S_n e coordinate proiettive non omogenee in S'_n, e le a_{ij} sono costanti (reali) soggette alla sola condizione che la loro matrice abbia rango $n+1$.

Possiamo semplificare le (1), assumendo in S_n convenientemente le x e sostituendo in S'_n alle x' opportune coordinate proiettive omogenee $(y_0, y_1, \cdots, y_n)$. All'uopo osserviamo che, uguagliando a zero numeratori e denominatore delle frazioni a secondo membro nelle (1) veniamo a rappresentare $n+1$ $(n-1)$-sfere indipendenti di S_n, le quali sono quindi ortogonali ad una $(n-1)$-sfera fissa di S_n, diciamola Θ. Distinguiamo ora tre casi.

1° Θ *è l'iperpiano improprio di* S_n. Attualmente, come trasformate delle (1), si possono assumere le:

$$(2)\qquad y_0 = 1 \quad , \quad y_1 = x_1 \quad , \quad y_2 = x_2, \cdots, y_n = x_n.$$

2° Θ *è un'iperpiano proprio di* S_n, che possiamo supporre rappresentato dall'equazione $x_n = 0$. In questo caso le (1) possono ridursi nel modo suaccennato alla forma

$$(3)\quad y_0 = 1 \quad , \quad y_1 = x_1, \cdots, \quad y_{n-1} = x_{n-1} \quad , \quad y_n = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2.$$

3° Θ *è una* $(n-1)$*-sfera propria*, che possiamo supporre rappresentata dall'equazione

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = c,$$

denotando con c $(\gtrless 0)$ il quadrato del raggio. Allora le (1) appaiono manifestamente riducibili alla forma

$$(4)\qquad y_0 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + c \quad , \quad y_1 = x_1, \cdots, y_n = x_n.$$

È chiaro che i tre casi suddetti non possono ricondursi l'uno all'altro, e che nel terzo caso vi sono da distinguere tre possibilità, secondochè la costante c ivi considerata è positiva, nulla o negativa. Si vede poi senza difficoltà che ciascuna delle suddette trasformazioni fra S_n, S'_n è algebrica e che, più precisamente, la (2) e la (4) in cui si supponga $c = 0$ sono birazionali (rispettivamente lineare e quadratica), mentre le restanti (3), (4) sono di indici (2, 1), e si ottengono riferendo proiettivamente un sistema lineare ∞^n di $(n-1)$-sfere di S_n – avente grado 2 – al sistema degli iperpiani di S'_n.

Possiamo infine valutare l'elemento lineare ds di V_n, qualora le coordinate cartesiane ortogonali $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ nell'S_n suddetto si assumano come

coordinate curvilinee su V_n. Detta K la curvatura costante di V_n, esaminiamo a tal proposito separatamente i due casi in cui $K = 0$, oppure $K \neq 0$.

Se $K = 0$, si può far sì che la rappresentazione geodetica di V_n su S'_n sia un'applicabilità, laonde

$$ds^2 = dx'^2_1 + dx'^2_2 + \cdots + dx'^2_n.$$

Si ottiene allora la valutazione richiesta esprimendo qui nel secondo membro le x mediante le (1).

Se $K \neq 0$, ogni rappresentazione geodetica di V_n sull'S'_n proiettivo $(y_0, y_1, \cdots, y_n)$ introduce una quadrica assoluto (non degenere)

$$(5) \qquad f(y) \equiv \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} c_{ik}\, y_i\, y_k = 0.$$

Questa quadrica è senza punti reali se $K > 0$, mentre essa è a punti reali – ma priva di rette reali – se $K < 0$; e viceversa. Risulta allora notoriamente (7)

$$ds^2 = \frac{\{df(y)\}^2 - 4f(y)\,f(dy)}{4\,|K|\,\{f(y)\}^2};$$

e – a norma delle (1) – non v'è che da esprimere qui le y con formule del tipo

$$(6) \qquad y_i = a_{i0}(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) + a_{i1}\,x_1 + a_{i2}\,x_2 + \cdots + a_{in}\,x_n + a_{i,n+1}$$
$$(i = 0, 1, \cdots, n),$$

dove le a_{ij} sono costanti soggette alla sola condizione che la loro matrice abbia rango $n + 1$, per ottenere la richiesta valutazione dell'elemento lineare di V_n. In base a ciò che precede, con opportuna scelta delle x e delle y – e quindi pure della quadrica (5) – le formule (6) possono semplificarsi, e ridursi ad una delle forme (2), (3), (4).

Matematica (Statistica matematica). — *Sulle probabilità di Karup*. Nota (*) del Corrisp. FRANCESCO PAOLO CANTELLI.

1. Nella teorica delle probabilità di Karup si considerano delle probabilità del tipo $p(t)$, funzioni di una variabile indipendente t, e si suol supporre che queste funzioni ammettano derivata. Non trovo, nemmeno nei più recenti lavori in argomento, che tale restrizione, nociva per le applicazioni, sia stata tolta. Riprendo, perciò, qualche mio antico lavoro (1) e uno del Messina (2), che ha seguìto il mio indirizzo, allo scopo di portare l'argomento nel campo, più

(7) Cfr. E. BELTRAMI, ultimo lavoro citato in (1).

(*) Presentata nella seduta del 9 aprile 1949.

(1) *Genesi e costruzione delle tavole di mutualità*, « Bollettino di notizie sul Credito e sulla Previdenza », n. 3, anno 1914; *Sulle leggi di mutualità e sulle equazioni delle riserve matematiche*, « Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari », n. 2, aprile 1938; *Sulla costruzione delle tavole di mortalità*, « Atti della III Riunione della Società Italiana di Statistica », giugno-luglio 1941, Roma.

(2) *Le probabilità parziali nella Matematica attuariale*, « Bollettino di Notizie sul Credito e sulla Previdenza », 4-6, anno 1915.

ampio, delle funzioni a variazione limitata. Accennerò, per la necessaria brevità, ad alcuni concetti fondamentali, rimandando ai lavori citati, svolti nel campo restrittivo sopra indicato, per i possibili maggiori sviluppi di quanto in questa Nota viene accennato.

2. Consideriamo una collettività di $l(0)$ individui, appartenenti ad una società S, e supponiamo, per brevità, che essi possano eliminarsi esclusivamente per una causa (α) *oppure* per una causa (β). Sia $\bar{q}_\alpha(t)$ la probabilità che un individuo si elimini per la causa (α) nell'intervallo di tempo $(0, t)$, e $\bar{q}_\beta(t)$ l'analoga probabilità per la causa β.

Rappresentano, allora, notoriamente,

$$(1) \qquad M_\alpha(t) = l(0)\cdot\bar{q}_\alpha(t) \quad , \quad M_\beta(t) = l(0)\cdot\bar{q}_\beta(t)$$

i numeri *medi*, non decrescenti al crescere di t, degli eliminati per la causa (α), o per la causa (β), nell'intervallo $(0, t)$. Il numero *medio* degli esistenti in S all'epoca t è perciò espresso da

$$(2) \qquad l(t) = l(0) - M_\alpha(t) - M_\beta(t).$$

Sino a contrario avviso supporremo che le funzioni (1) siano continue e che, in un intervallo $(0, a)$, dove varia la variabile t, sia $l(t) > 0$, potendo solo essere $l(a) = 0$.

Consideriamo adesso un caso assai particolare della teorica delle riserve matematiche, da me introdotta nei miei lavori indicati [1], ripresa da I. Messina nel lavoro citato [2] e da me, nella Nota del 1938, anche con riferimento a forme di assicurazioni che richiedono la considerazione di probabilità *dipendenti* del tipo $\bar{q}(t)$ sopra indicato.

Supponiamo, riferendoci sempre a numeri *medi*, che ognuno degli $l(0)$ individui versi, all'epoca *zero*, una somma $R(0)$ e che ad ognuno degli eliminati per la causa (α), all'epoca t, si dia una parte $A(t)\cdot R(t)$ della riserva media individuale $R(t)$ accumulata a quell'epoca, mentre se ne dia una parte $B(t)\cdot R(t)$ ad un eliminato per la causa (β); supponiamo, inoltre, che le funzioni $A(t)$, $B(t)$ siano continue e, per brevità, che sia nullo il tasso di interesse.

Nel caso che esista una espressione della riserva individuale $R(t)$, funzione continua della variabile t, essa dovrà ovviamente soddisfare alla equazione

$$(3) \qquad l(t)\,R(t) = l(0)\,R(0) - \int_0^t A(u)\,R(u)\,d\,M_\alpha(u) - \int_0^t B(u)\,R(u)\,d\,M_\beta(u).$$

Dalla precedente si ricava immediatamente, riferendoci ad una qualsiasi divisione dell'intervallo $(0, t)$ in sotto intervalli Δs_i,

$$(4) \qquad \frac{l(t)\,R(t)}{l(0)\,R(0)} = e^{\sum_0^t \Delta \log_e [l(s)\,R(s)]} = e^{\sum_0^t \log_e \left[1 + \frac{\Delta l(s)\,R(s)}{l(s)\,R(s)}\right]}$$

e si verifica facilmente che esistono le condizioni perchè, passando al limite, facendo tendere a zero l'intervallo Δs di maggiore ampiezza, si possa scrivere

$$(5) \qquad \frac{l(t)\,R(t)}{l(0)\,R(0)} = e^{-\int_0^t \left[A(s)\frac{dM_\alpha(s)}{l(s)} + B(s)\frac{dM_\beta(s)}{l(s)}\right]} .$$

D'altra parte è facile vedere che non esiste una espressione di $R(t)$, funzione continua della variabile t, diversa da quella che si ricava dalla (5), che sia soluzione della (3).

In base alla ipotesi detta che le funzioni $M_\alpha(t)$, $M_\beta(t)$ siano continue, risulta dalla (2)

$$(6) \qquad \frac{l(t)}{l(0)} = e^{-\int_0^t \frac{dM_\alpha(s)}{l(s)}} \cdot e^{-\int_0^t \frac{dM_\beta(s)}{l(s)}}$$

che rappresenta il teorema di Karup, relativo a due sole cause di eliminazione, quando si voglia evitare di supporre l'esistenza delle derivate di $M_\alpha(s)$ e di $M_\beta(s)$.

Sostituendo la (6) nel primo membro della (5), si ha il risultato finale,

$$(7) \qquad \frac{R(t)}{R(0)} = e^{\int_0^t \left\{[1-A(s)]\frac{dM_\alpha(s)}{l(s)} + [1-B(s)]\frac{dM_\beta(s)}{l(s)}\right\}} ,$$

che fornisce la riserva media individuale $R(t)$, accumulata all'epoca t, per il versamento individuale di una somma $R(0)$, eseguito all'epoca *zero*.

3. Procediamo ad una breve discussione della (7) e della (6). Se nella (7) si pone $A(s) = B(s) = 0$, risulta $\frac{R(t)}{R(0)} = \frac{l(0)}{l(t)}$. Ora, notoriamente, $\frac{l(0)}{l(t)}$ rappresenta il montante demografico-finanziario, a interesse nullo, e all'epoca t, di un capitale unitario versato all'epoca zero: è il caso in cui nulla si dia agli eliminati per la causa (α) oppure per la causa (β), in cui, cioè, le somme versate all'epoca *zero* rimangono tutte a vantaggio di coloro che non si eliminano per le dette cause da S. In tal caso la legge di permanenza in S, legge sulla quale si calcolano pure gli effetti della mutualità, è espressa da $\frac{l(t)}{l(0)}$. È perciò che, più generalmente, ho considerato il rapporto inverso di (7) come legge di *mancata eliminazione attiva*, e cioè

$$(8) \qquad \frac{\lambda(t)}{\lambda(0)} = \frac{R(0)}{R(t)} = e^{-\int_0^t [1-A(s)]\frac{dM_\alpha(s)}{l(s)}} \cdot e^{-\int_0^t [1-B(s)]\frac{dM_\beta(s)}{l(s)}}$$

in base alla quale, in questo come nei casi più generali, occorre costruire la *tavola di mutualità* per evitare di fondare il calcolo di $R(t)$ sulla (3), calcolo che si

presenta assai più complicato di quello da farsi fondandosi sulla previa determinazione numerica della (8), sistema da me proposto e giustificato sin dal 1914.

Nel caso che sia $A(s) = B(s) = 1$, risulta dalla (7) $R(t) = R(0)$: in questo caso la (3) coincide, a meno del fattore $R(0)$, con la (2), e risponde alla ipotesi che ad ogni eliminato per la causa (α), oppure per la causa (β), si dia l'intera riserva individuale accumulata : in questo caso la riserva media individuale rimane sempre costante e uguale alla somma inizialmente versata $R(0)$.

La funzione $\lambda(t)$, definita dalla (8), può anche scriversi, con facili trasformazioni,

$$(9) \qquad \frac{\lambda(t)}{\lambda(0)} = 1 - \int_0^t \frac{\lambda(s)}{\lambda(0)} [1 - A(s)] \frac{d\,M_\alpha(s)}{l(s)} - \int_0^t \frac{\lambda(s)}{\lambda(0)} [1 - B(s)] \frac{d\,M_\beta(s)}{l(s)} .$$

La eguaglianza tra la (9) e la (8) costituisce una generalizzazione del teorema di Karup. Infatti tale teorema, espresso dalla uguaglianza risultante dai valori di $\frac{l(t)}{l(0)}$ espressi dalla (6) e dalla (2), si ricava dalle (9) e (8) ponendo $A(s) = B(s) = 0$ e, quindi, tenuta presente la (6), ponendo $\frac{\lambda(t)}{\lambda(0)} = \frac{l(t)}{l(0)}$.

Ritorniamo al teorema di Karup, espresso dalla (6), per dare un significato attuariale ai due fattori del secondo membro della (6) stessa. Risulta dal teorema generalizzato – eguaglianza tra (8) e (9) – che, se si pone $A(s) = 0$, $B(s) = 1$, il terzo membro della (8) si riduce al primo fattore del secondo membro della (6) e che, pertanto, questo fattore fornisce la legge di *mancata eliminazione attiva* che bisogna costruire nella ipotesi che, tenuto presente un contributo unitario individuale, versato all'epoca *zero*, si stabilisca di dare l'intera riserva media individuale a chi si elimina da S per la causa (β), mentre nulla si dia a coloro che si eliminano per la causa (α). E analogamente dicasi per il significato del secondo fattore del secondo membro della (6).

Si possono estendere le considerazioni fatte, evitando la restrizione già indicata, a tutti i problemi trattati nei lavori citati, ivi compresi i metodi per la costruzione delle tavole di *mancata eliminazione attiva* nei casi più generali, e ciò dicasi pure per il caso in cui si voglia rinunciare anche alla ipotesi della continuità delle funzioni esaminate, argomento di cui appresso mi occupo brevemente. Si osservi, intanto, che quando si suppongano note le funzioni $F_\alpha(t)$, $F_\beta(t)$ rappresentate rispettivamente dai due integrali, moltiplicati per $\lambda(0)$, del secondo membro della (9), questa e la (8) si scrivono rispettivamente

$$(9') \qquad \lambda(t) = \lambda(0) - F_\alpha(t) - F_\beta(t)$$

$$(8') \qquad \frac{\lambda(t)}{\lambda(0)} = e^{-\int_0^t \frac{dF_\alpha(s)}{\lambda(s)}} \cdot e^{-\int_0^t \frac{dF_\beta(s)}{\lambda(s)}},$$

cosicchè le (9') e (8') hanno la stessa forma delle espressioni (2) e (6). Lasciando da parte le ovvie conseguenze di questa osservazione, desidero ora portare la discussione delle (9') e (8') nel campo più ampio delle funzioni a variazione limitata.

4. Fermando l'attenzione sulla (9'), facciamo le seguenti ipotesi, anche per la necessaria brevità:

a) le funzioni $F_\alpha(s)$, $F_\beta(s)$ sono a variazione limitata, ed è $\lambda(t) > \eta > 0$ in tutti gli intervalli $(0, t)$ che saranno considerati; esse funzioni non hanno *salti* comuni, cioè in corrispondenza a uno stesso valore di s;

b) in ogni punto s si considera come determinazione di $F_\alpha(s)$ il valore $\lim_{\varepsilon \to 0} F_\alpha(s-\varepsilon) = F_\alpha(s-0)$ e analogamente dicasi per $F_\beta(s)$.

Nelle ipotesi fatte, quando si consideri la (9'), si ricava, dividendo l'intervallo $(0, t)$ in qualsivoglia numero di parti Δs_i,

$$(10) \qquad \frac{\lambda(t)}{\lambda(0)} = e^{\sum_0^t \Delta \log_e \lambda(s)} = e^{\sum_0^t \log_e \left[1 + \frac{\Delta\lambda(s)}{\lambda(s)}\right]} = e^{\sum_0^t \log_e \left[1 - \frac{\Delta F_\alpha(s)}{\lambda(s)} - \frac{\Delta F_\beta(s)}{\lambda(s)}\right]}.$$

Scindendo ora le funzioni $F_\alpha(s)$, $F_\beta(s)$ rispettivamente nella somma di una funzione continua e della corrispondente funzione dei salti, ponendo cioè

$$(11) \qquad F_\alpha(s) = F_\alpha^{(1)}(s) + F_\alpha^{(2)}(s) \quad , \quad F_\beta(s) = F_\beta^{(1)}(s) + F_\beta^{(2)}(s),$$

tenendo conto inoltre delle ipotesi fatte *a*) e *b*) si perviene a dimostrare che il rapporto $\frac{\lambda(t)}{\lambda(0)}$, che si ricava dalla (9'), è pure espresso da

$$(12) \qquad \frac{\lambda(t)}{\lambda(0)} = \left[e^{-\int_0^t \frac{dF_\alpha^{(1)}(s)}{\lambda(s)}} \cdot \prod_{s_i < t} \left(1 - \frac{dF_\alpha^{(2)}(s_i)}{\lambda(s_i)}\right)\right] \cdot \left[e^{-\int_0^t \frac{dF_\beta^{(1)}(s)}{\lambda(s)}} \cdot \prod_{s'_i < t} \left(1 - \frac{dF_\beta^{(2)}(s'_i)}{\lambda(s'_i)}\right)\right]$$

dove il simbolo $\prod$ indica il limite del prodotto di fattori $1 - \frac{\Delta F_\alpha^{(2)}(s_k)}{\lambda(s_k)}$ (e analogamente per la causa β), che si riferiscono a una qualsiasi suddivisione dell'intervallo $(0, t)$ in sottointervalli Δs_k, al tendere a zero del massimo di questi sottointervalli, limite che si dimostra finito e indipendente dalla legge secondo cui si fanno tendere a zero i sottointervalli considerati; nel simbolo $\prod$ sono indicati con s_i e con s'_i rispettivamente i punti di salto delle funzioni $F_\alpha^{(2)}(s)$ e $F_\beta^{(2)}(s)$. È evidente che tale limite coincide con il prodotto infinito dei fattori $1 - dF_\alpha^{(2)}(s)/\lambda(s)$ relativi alla successione dei salti ordinati secondo il loro valore assoluto decrescente (e analogamente per la causa β).

In base alle ipotesi fatte, i due fattori in parentesi quadra, che figurano nella (12), risultano positivi; indicandoli rispettivamente con $P_\alpha(0, t)$ e $P_\beta(0, t)$, si può scrivere, tenuta presente la (9'),

$$(13) \qquad 1 - \frac{F_\alpha(t)}{\lambda(0)} - \frac{F_\beta(t)}{\lambda(0)} = P_\alpha(0, t) \cdot P_\beta(0, t),$$

della quale possono farsi applicazioni diverse.

La (13) comprende il teorema di Karup: è evidente che essa si riduce alla (6) quando le funzioni $F_\alpha(t)$, $F_\beta(t)$ si identifichino con le funzioni continue $M_\alpha(t)$, $M_\beta(t)$ considerate nella (2).

Supposto ora, per brevità, che le funzioni $F_\alpha(t)$, $F_\beta(t)$ che figurano nella (9') siano positive non decrescenti, i due fattori in parentesi quadra della (12) acquistano il significato di probabilità o possono adeguarsi a questo significato.

In questa ipotesi, consideriamo l'equazione, di fondamentale importanza nelle applicazioni,

$$(14) \qquad F_\alpha(t) = \lambda(0)\cdot Q_\alpha(0,t) - \int_0^t Q_\alpha(s,t)\cdot dF_\beta(s)$$

nell'incognita $Q_\alpha(0,t) = 1 - P_\alpha(0,t)$, equazione corrispondente a quella che si riferisce alle probabilità continue e derivabili, la quale ultima fu studiata esaurientemente da me e da Messina nel 1914–1915, per coordinare alcune considerazioni tedesche con altre inglesi attraverso le probabilità di Karup, generalizzandola per la costruzione delle tavole di mutualità.

Quando si consideri, ora, la (14), e si tenga conto che, nella ipotesi fatta, vale la relazione $Q_\alpha(s,t) = 1 - \dfrac{P_\alpha(0,t)}{P_\alpha(0,s)}$, si deduce per $P_\alpha(0,t)$ il primo fattore in parentesi quadra del secondo membro della (12), e analogamente dicasi con riferimento al secondo fattore.

Geodesia. — *Sulla rappresentazione di Weingarten della sfera sul piano.* Nota (*) del Corrisp. Giovanni Boaga.

Si prendono a coordinate curvilinee sulla sfera, anzichè le coordinate geografiche, come è consuetudine, le coordinate geodetiche polari e si studia dapprima la rappresentazione piana della sfera – qui definita *rappresentazione di Weingarten* – perchè ottenuta con le formule di corrispondenza dovute a questo geometra e poi si ricavano le più generali equazioni della rappresentazione conforme della sfera sul piano, sempre facendo uso di coordinate geodetiche polari.

1. Sono note in Geodesia le formule che vanno sotto il nome di *sviluppi di Puiseux–Weingarten* e che dànno la possibilità di determinare le coordinate rettangolari cartesiane ξ, η, ζ di un punto P di una geodetica g appartenente ad una superficie qualunque Σ, in funzione delle coordinate geodetico-polari α, s con α angolo che la g forma con una delle due sezioni normali principali appartenenti al fascio avente per centro l'origine O delle coordinate cartesiane e dal quale esce pure la g, ed s l'ascissa curvilinea contata su g, dall'origine O al punto considerato P. In questo caso, il sistema trirettangolare di riferimento è orientato in modo che l'asse delle ζ risulti normale alla Σ, quello ξ ad esso perpendicolare e tangente in O alla sezione normale principale di riferimento degli angoli α; l'asse η perpendicolare ai precedenti e quindi tangente pure in O alla seconda sezione normale principale.

(*) Presentata nella seduta del 9 aprile 1949.

Quando Σ è una sfera di raggio R, tali formule sono:

$$(1) \quad \xi = R \operatorname{sen} \frac{s}{R} \cos \alpha \quad , \quad \eta = R \operatorname{sen} \frac{s}{R} \operatorname{sen} \alpha \quad , \quad \zeta = -2R \operatorname{sen}^2 \frac{s}{2R} .$$

In questo caso tutte le sezioni normali hanno la medesima curvatura; gli archi di geodetica coincidono con archi di sezioni normali (cerchi massimi). L'orientamento dell'asse ξ rimane allora arbitrario; si può perciò assumere un arco di cerchio massimo uscente da O, e del resto qualunque, come origine per il computo degli angoli α e riferire a quest'arco l'asse ξ.

Le formule (1) coincidono con quelle analoghe che si hanno quando per superficie Σ si considera lo ellissoide di rivoluzione terrestre e si assume $R = \sqrt{\rho N}$ con ρ ed N raggi principali di curvatura riferiti rispettivamente alle sezioni normali principali, meridiano e primo verticale e quando si limita a 110 km. la lunghezza dell'ascissa curvilinea s di geodetica, il che vale a ritenere trascurabili le terze potenze del rapporto s/R.

2. Nelle (1) i due parametri α, s possono essere considerati come coordinate curvilinee di Σ ed il quadrato dell'elemento lineare $d\sigma$ di Σ, definito dalla:

$$d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2$$

assume in base alle (1) la forma seguente:

$$(2) \quad d\sigma^2 = ds^2 + R^2 \operatorname{sen}^2 \frac{s}{R} \cdot d\alpha^2$$

facilmente riducibile a quella isoterma:

$$(3) \quad d\sigma^2 = R^2 \operatorname{sen} \frac{s}{R} (dS^2 + d\alpha^2)$$

con

$$(4) \quad dS = \frac{ds}{R \operatorname{sen} \frac{s}{R}}$$

dalla quale, supponendo nulla la costante additiva di integrazione, si trae:

$$(5) \quad S = \ln \left(\operatorname{tang} \frac{1}{2} \frac{s}{R} \right).$$

3. Desiderando rappresentare su un piano Σ' la Σ, potremo assumere come coordinate piane ortogonali x, y in funzione dei parametri α, s di Σ, delle quantità proporzionali ai secondi membri delle due prime relazioni della terna (1). Si avrà così:

$$(6) \quad x = KR \operatorname{sen} \frac{s}{R} \cos \alpha \quad , \quad y = KR \operatorname{sen} \frac{s}{R} \operatorname{sen} \alpha$$

con K costante di riduzione della carta.

Chiamiamo *rappresentazione di Weingarten* la rappresentazione definita dalle (6).

In base alle (6) stesse il quadrato dell'elemento lineare $d\sigma'$ sul piano risulta dato dalla:

$$(7) \qquad d\sigma'^2 = K^2 \cos^2 \frac{s}{R} ds^2 + K^2 R^2 \operatorname{sen}^2 \frac{s}{R} d\alpha^2$$

pure riducibile alla forma isoterma:

$$(8) \qquad d\sigma'^2 = K^2 R^2 \operatorname{sen}^2 \frac{s}{R} (dS'^2 + d\alpha^2)$$

con

$$(9) \qquad dS' = \frac{ds}{R \cdot \operatorname{tang} \frac{s}{R}}$$

dalla quale, mediante integrazione, trascurando la costante aggiuntiva:

$$(10) \qquad S' = \ln \left(\operatorname{sen} \frac{s}{R} \right)$$

che permette il passaggio da s a S', come la (5) permette quello da s a S e reciprocamente.

4. Con riferimento ai parametri α, s e senza tener conto delle forme isometriche (3), (8), indicando come di consueto con E, F, G e con e_1, f_1, g_1 i coefficienti della prima forma fondamentale delle Σ, Σ', cioè delle (2) e (7) e ritenendo senza ledere le generalità $K = 1$, si hanno le:

$$(11) \qquad E = 1 \quad , \quad F = 0 \quad , \quad G = R^2 \operatorname{sen}^2 \frac{s}{R}$$

$$(12) \qquad e_1 = \cos^2 \frac{s}{R} \quad , \quad f_1 = 0 \quad , \quad g_1 = R^2 \operatorname{sen}^2 \frac{s}{R} .$$

Posto adesso

$$(13) \qquad e = e_1/E = \cos^2 \frac{s}{R} \quad , \quad f = f_1/\sqrt{EG} = 0 \quad , \quad g = g_1/G = 1$$

il quadrato del modulo di deformazione lineare n è dato dalla:

$$(14) \qquad n^2 = \cos^2 \alpha \cos^2 \frac{s}{R} + \operatorname{sen}^2 \alpha$$

con $n = d\sigma'/d\sigma$, ed i moduli principali conseguentemente risultano espressi dalle:

$$(15) \qquad N_1 = \sqrt{e} = \cos \frac{s}{R} \quad , \quad N_2 = \sqrt{g} = 1 .$$

Il modulo m di deformazione superficiale, essendo dato dal prodotto dei moduli principali di deformazione lineare, è espresso dalla:

$$m = \cos \frac{s}{R} .$$

La corrispondenza fra gli angoli α, α' rispettivamente di Σ, Σ' e compresi fra gli elementi lineari omologhi, risulta definita dalla seguente relazione che lega le tangenti trigonometriche dei due angoli ai moduli principali di deformazione lineare:

$$\text{(16)} \qquad \operatorname{tang} \alpha' = \sqrt{g/e} \operatorname{tang} \alpha = \sec \frac{s}{R} \cdot \operatorname{tang} \alpha$$

e la tangente trigonometrica della deformazione angolare ($\vartheta = \alpha' - \alpha$), essendo questa in generale espressa dalla:

$$\text{(17)} \qquad \operatorname{tang} \vartheta = (N_2 - N_1) \operatorname{tang} \alpha / (N_1 + N_2 \operatorname{tang} \alpha)$$

tenendo conto delle (15), diviene:

$$\text{(18)} \qquad \operatorname{tang} \vartheta = \left(1 - \cos \frac{s}{R}\right) \operatorname{tang} \alpha \Big/ \left(\cos \frac{s}{R} + \operatorname{tang} \alpha\right).$$

Il massimo valore di ϑ risulta così fornito dalla:

$$\text{(19)} \qquad \operatorname{tang} \vartheta_{max} = \pm \operatorname{sen}^2 \frac{s}{R} \sqrt{\sec \frac{s}{R}}.$$

Le formule ora stabilite, che sono applicazioni dirette di formule fondamentali della teoria delle rappresentazioni cartografiche, servono a mettere in luce le caratteristiche della « rappresentazione di Weingarten », definita dalle (6) o dalle equivalenti in coordinate polari ρ, θ:

$$\rho = KR \operatorname{sen} \frac{s}{R} \quad , \quad \Theta = \alpha .$$

5. Si osservi poi che, con riferimento al corpo terrestre, per archi di geodetiche inferiori a 15 km. potremo negli sviluppi in serie delle funzioni goniometriche dell'angolo s/R trascurare i termini di secondo ordine e quelli di ordine superiore, perchè i loro contributi risultano inferiori a 1/1000000. In questo caso $\cos \frac{s}{R}$ e come conseguenza $n = 1$ e quindi $N_1 = N_2, \vartheta = 0$.

Dunque: nell'intorno dell'origine delle coordinate e fino alla distanza accennata, la rappresentazione di Weingarten risulta *naturale*, ossia conserva angoli e distanze in tutto il campo; poi, via via che aumenta la lunghezza dell'ascissa curvilinea s, la rappresentazione abbandona la conformità, per assumere i caratteri delle rappresentazioni afilattiche ed i moduli di deformazione lineare cominciano a differenziarsi fino ad un massimo espresso dalla differenza: $1 - \cos \frac{s}{R}$, ossia fino all'importo $2 \operatorname{sen}^2 \frac{s}{2R}$ od all'equivalente $s^2/2R^2$ abbandonando i termini di terzo ordine. Sull'ellissoide di rotazione terrestre per geodetiche lunghe 110 km. (campo di Weingarten) tale differenza si aggira intorno al valore 0,0001 e perciò la rappresentazione in tutto il campo di Weingarten risulta *praticamente* conforme, ed anche equivalente; essa perciò è idonea per la costruzione delle mappe cata-

stali o (di carte topografiche naturali) come avviene per la rappresentazione di Soldner, alla quale effettivamente si riduce quella di Weingarten sotto certe condizioni.

La rappresentazione studiata non vincola il punto O, origine delle coordinate geodetico–polari, che può quindi essere un punto qualunque della superficie. Quando O coincide col polo australe o con quello boreale, gli angoli α si trasformano in longitudini, gli archi s risultano lunghezze di archi di circoli meridiani uscenti dal polo, gli angoli s/R denotano le colatitudini dei punti considerati e la rappresentazione, che è atta a descrivere le calotte polari, diviene una proiezione stereografica (Tolomeo).

6. Possiamo anche esaminare se, ricorrendo ai parametri isometrici S, α con S logaritmo naturale della tangente del semiangolo s/R ed α azimut, come coordinate curvilinee su Σ, sia possibile esplicitarli dalle equazioni generali della carta $x = x(S, \alpha), y = y(S, \alpha)$ in modo che la rappresentazione di Σ su Σ' risulti conforme.

La risposta al quesito è affermativa, se, come discende dalla *teoria delle rappresentazioni conformi*, fra x, y ed S, α vale una delle seguenti relazioni:

$$x \pm i \cdot y = f(S \pm i \cdot \alpha). \tag{20}$$

Considerando per esempio dei doppi segni messi in evidenza nelle (20) per il primo membro quello positivo e per il secondo quello negativo, sviluppando in serie di Taylor ritenendo come incremento $i\alpha$ (con α naturalmente espresso in radianti) si perviene alla:

$$x + iy = f(S) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i\alpha)^n}{n!} f^{(n)}(S) \tag{21}$$

dalla quale eguagliando i termini reali e quelli immaginari dei due membri, risultano per equazioni della carta ed in forma esplicita, le seguenti funzioni di S ed α:

$$\begin{cases} x = f(S) - \dfrac{\alpha^2}{2} f''(S) + \dfrac{\alpha^4}{24} f^{IV}(S) + \cdots \\ y = -\alpha f'(S) + \dfrac{\alpha^3}{6} f'''(S) + \cdots \end{cases} \tag{22}$$

Risultando $f(S)$ arbitraria, le (22) forniscono le più generali equazioni della carta conforme di Σ su Σ'. Particolarizzando $f(S)$, si possono trovare quante si vogliono di tali rappresentazioni.

Così ad esempio, ponendo nelle (22)

$$f(S) = K \cdot e^{-Sc} \tag{23}$$

con e base dei logaritmi neperiani e con K, c due costanti, si ottengono le:

$$x = K \cdot e^{-Sc} \cos(\alpha c) \quad , \quad y = K \cdot e^{-Sc} \operatorname{sen}(\alpha c) \tag{24}$$

ed in coordinate polari ρ, Θ:

$$\rho = K \cdot e^{-Sc} \quad , \quad \Theta = \alpha \cdot c . \tag{25}$$

S si potrà poi eliminare dalle (24) c (25), ricorrendo alla (5).

La rappresentazione studiata può essere impiegata nelle costruzioni di carte idrografiche speditive quando nel rilevamento si misurano direttamente le coordinate geodetico–polari ricorrendo al radar per le distanze ed ai metodi radiogoniometrici per gli angoli; sotto questo punto di vista riteniamo utili le considerazioni esposte.

Chimica. — *Ricerche polarografiche e coulombometriche su alcuni complessi cianidrici del manganese mono e bivalente* (*). Nota di Vincenzo Caglioti, Guido Sartori e Paolo Silvestroni, presentata (**) dal Corrisp. V. Caglioti.

Per riduzione del complesso $K_4[Mn(CN)_6]$ in soluzione di cianuro di potassio con lega di Devarda o polvere di alluminio, Manchot e Gall [1] [2] ottennero il complesso $K_5[Mn(CN)_6]$ che per dissociazione graduale dà origine a forme del tipo $K_2[Mn(CN)_3]$ e $K_3[Mn(CN)_4]$. Quest'ultimo, secondo Grube e Brause [3], si formerebbe per riduzione elettrolitica del $K_4[Mn(CN)_6]$. Durante tale riduzione, effettuata a concentrazioni basse di cianuro, precipita inoltre un sale solido al quale Treadwell e collaboratori [4] hanno attribuito la formula $K_2[Mn(CN)_3] \cdot K_4[Mn(CN)_6]$.

Il problema della riduzione polarografica di $K_4[Mn(CN)_6]$ in cianuro di potassio fu affrontata da Verdier [5]; questo Autore riscontrò tre onde diverse di riduzione, i cui potenziali di semionda diventano più positivi con l'aumentare della concentrazione del cianuro di potassio. I suoi risultati si possono così riassumere: in soluzioni di cianuro di potassio 1,5 N si ottiene una sola onda al potenziale di — 1,365 V; in soluzioni di cianuro di potassio fra 0,5 e 1 N, la riduzione avviene con due onde, delle quali la prima ha un potenziale di — 1,7 V; in soluzioni più diluite di cianuro, la riduzione non è più reversibile, perchè si nota una netta influenza della velocità di gocciolamento del capillare sul potenziale. Verdier nota inoltre che in soluzione diluita di KCN il potenziale diventa più positivo con l'aumentare della concentrazione di cianuro. Dai suoi dati l'Autore conclude che in ogni caso si ha deposizione di manganese e che il processo quindi è del secondo ordine; in ambiente concentrato di KCN il composto riducibile è lo ione $[Mn(CN)_6]^{-4}$ in soluzione più diluita (fra 1 N e 0,5N) sarebbero presenti

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico dell'Università di Roma. Centro di Chimica Generale del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 12 marzo 1949.

(1) « Berichte », *60*, 191 (1927).

(2) « Berichte », *61*, 1135 (1928).

(3) « Berichte », *60*, 2273 (1927).

(4) « Helv. Chim. Acta », *24*, 152 (1941).

(5) « Coll. Trav. Chim. Tchec. », *11*, 216 (1938).

oltre allo ione $[Mn(CN)_6]^{-4}$ anche molecole $Mn(OH)CN$; in soluzione ancora più diluita di cianuro si avrebbe soltanto $Mn(OH)_2$.

Metodo di ricerca. – Abbiamo voluto riprendere in esame con il metodo polarografico e coulombometrico il comportamento dei complessi cianidrici del manganese bivalente. Il sale studiato è il $K_4[Mn(CN)_6]$ che è stato preparato e conservato fuori del contatto dell'aria. Una prima serie orientativa di esperienze è stata fatta sciogliendo il sale in una soluzione di cianuro potassico ed esaminando polarograficamente la soluzione così ottenuta. La soluzione era quindi ridotta nel coulombometro [6] al potenziale di semionda, e l'esame polarografico veniva ripetuto durante il procedere della riduzione. Al proseguire dell'elettrolisi, l'onda che era inizialmente di sola riduzione si abbassa sotto lo zero del galvanometro, diventando onda di ossidoriduzione ed infine di sola ossidazione. Questo fatto porta subito ad ammettere che nella riduzione polarografica non si ha deposizione di manganese, ma solo passaggio a valenza inferiore. Che non si abbia

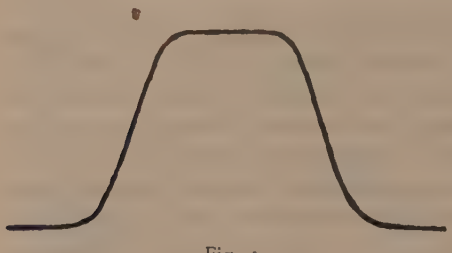


Fig. 1.

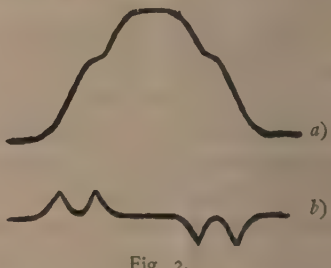


Fig. 2.

deposizione è confermato dal fatto che lasciando riossidare la soluzione, si riottiene qualitativamente e quantitativamente l'onda di partenza, cioè del $K_4[Mn(Cn)_6]$. Anche le soluzioni ridotte chimicamente con la Lega di Devarda o amalgama di potassio presentano lo stesso comportamento polarografico. Si è stabilito così qualitativamente che il processo è di sola riduzione e non di deposizione.

Per avere una riprova con altro mezzo di indagine della reversibilità del fenomeno abbiamo rilevato le curve potenziale–tempo mediante il dispositivo oscillografico di Heyrovskj [7]. Questo dispositivo consente di sovrapporre alla corrente continua di polarizzazione una corrente alternata, sicchè la goccia si polarizzi con la frequenza della corrente alternata stessa, passando dal potenziale dell'elettrodo a calomelano a quello di scarica degli ioni alcalini. In assenza di un depolarizzante con potenziale compreso fra questi limiti, la curva potenziale–tempo presenterà l'aspetto della fig. 1. Se è presente invece un ione con potenziale di depolarizzazione inferiore a — 1,8 V, la curva presenterà, al potenziale corrispondente a quello di depolarizzazione dello ione, un punto di flesso che sarà simmetrico sui due rami ascendente e discendente se la reazione è reversibile, mentre non presenterà tale simmetria se la reazione è irreversibile. In figura 2 *a* è ripor-

(6) « Journ. Am. Chem. Soc. », *67*, 1916 (1945).
(7) « Coll. Trav. Chim. Tchec. », *12*, 11 (1947).

tata la curva potenziale–tempo per la soluzione di $K_4[Mn(CN)_6]$ in KCN N/2, in figura 2 *b* è riportata la derivata del potenziale rispetto al tempo in funzione del tempo; in queste ultime curve ogni massimo corrisponde ad un fenomeno di depolarizzazione: come si vede, i massimi sono nel nostro caso perfettamente simmetrici. Stabilita così la natura del fenomeno e la reversibilità, se ne è intrapreso lo studio polarografico e coulombometrico.

Parte sperimentale. – Per lo studio polarografico una quantità pesata di $K_4[Mn(CN)_6]\cdot 3H_2O$ dell'ordine di 0,05 gr. veniva sciolta in 100 cc. di soluzione di cianuro di potassio alla concentrazione minima necessaria per avere soluzione stabile. Di questa soluzione veniva fatto il polarogramma; indi si aggiungevano quantità variabili di KCN a titolo noto, ripetendo di volta in volta il polarogramma. Delle diverse serie di misure riportiamo alcuni valori più significativi nella tabella I.

Tabella I.

Numero	Normalità KCN	π 1/2	Numero	Normalità KCN	π 1/2
1	0,160	— 1,388	10	1,262	— 1,324
2	0,178	— 1,388	11	1,574	— 1,311
3	0,204	— 1,385	12	1,685	— 1,308
4	0,235	— 1,380	13	1,928	— 1,301
5	0,412	— 1,367	14	2,338	— 1,300
6	0,531	— 1,360	15	2,821	— 1,293
7	0,767	— 1,344	16	3,793	— 1,283
8	0,935	— 1,340	17	4,408	— 1,289
9	1,100	— 1,322	18	6,216	— 1,275
			19	6,724	— 1,274

Da questi dati risulta che il potenziale di semionda diventa più positivo all'aumentare della concentrazione del cianuro potassico. Questo fatto potrebbe far supporre che il complesso monovalente abbia un numero di coordinazione rispetto agli ioni CN^- maggiore del complesso bivalente e ciò non sarebbe in accordo con nessuna delle formule proposte dai diversi Autori per il complesso monovalente.

Prima di procedere alla discussione di questi dati abbiamo voluto chiarire il meccanismo di riduzione eseguendo delle prove quantitative in coulombometro. Una prima ricerca si è eseguita come segue: grammi 0,2808 di $K_4[Mn(CN)_6]\cdot 3H_2O$ sono stati sciolti nella cella catodica contenente circa 100 cc. di KCN N/1: la cella anodica conteneva anche essa KCN N/1. Prima della riduzione è stato fatto un polarogramma. Il potenziale di semionda è risultato — 1,325 V e l'altezza dell'onda pari a $1{,}13\cdot 10^{-5}$ A. Fu quindi iniziata l'elettrolisi e furono fatti polaro-

grammi a intervalli vari di tempo: i valori dei tempi, delle altezze polarografiche e dei cc. di gas tonante sviluppati sono riportati nella tabella II.

Tabella II.

Tempo (minuti)	$(i_d \cdot 10^5)_{rid.}$	$(i_d \cdot 10^5)_{ox}$	cc. svil.
0′	—	1,13	0
20′	0,44	0,69	4,5
30′	0,68	0,45	7,2
60′	1,13	—	11,9

Durante la riduzione, il colore della soluzione catodica vira dal giallo cupo al giallo oro intenso e non si ha formazione di alcun precipitato. Come si vede dai dati della tabella II, l'onda, che era di sola riduzione, passa gradualmente sotto lo zero del galvanometro trasformandosi prima in onda di ossidoriduzione, indi in onda di sola ossidazione. I valori $i_{rid.}$ e i_{ox} sono rispettivamente proporzionali ai valori della concentrazione del sale ridotto ed ossidato. Il processo totale involge un solo elettrone: infatti se con questa ammissione si calcolano i cc. di gas tonante che dovrebbero teoricamente svilupparsi per la riduzione di gr. 0,2808 di $K_4[Mn(CN)_6] \cdot 3\,H_2O$ si ottengono cc. 11,25, valore che sta in ottimo accordo con quello ottenuto sperimentalmente.

L'esperienza è stata ripetuta diminuendo la concentrazione del cianuro. Grammi 0,3484 di $K_4[Mn(CN)_6] \cdot 3\,H_2O$ sono stati sciolti nella cella catodica in 100 cc. di KCN 0,23 N: la cella anodica conteneva KCN alla stessa concentrazione. Il potenziale di semionda ottenuto dal polarogramma eseguito prima di iniziare l'elettrolisi era di — 1,390 V. I dati coulombometrici e quelli ottenuti da polarogrammi fatti durante l'elettrolisi sono riportati nella tabella III.

Tabella III.

Tempo (minuti)	$(i_d \cdot 10^5)_{rid.}$	$(i_d \cdot 10^5)_{ox.}$	$i_{tot.}$	cc. svil.
0′	—	1,60	1,60	0
7′	0,26	1,26	1,52	1,1
17′	0,56	0,96	1,52	2,6
27′	0,70	0,70	1,40	3,8
36′	0,72	0,40	1,10	4,7
45′	—	—	1,00	5,4
78′	—	—	0,70	7,1

Durante l'elettrolisi, nei primi minuti si ha soltanto la variazione di colore della soluzione catodica da giallo cupo a giallo oro, indi inizia subito un intorbidimento della stessa cui segue la formazione di un abbondante precipitato bianco giallastro. I cc. di gas tonante calcolati teoricamente per un processo di primo ordine sarebbero 13,95 per 0,3484 gr. di $K_4[Mn(CN)]_6 \cdot 3\,H_2O$: nell'elettrolisi se ne sono ottenuti quasi esattamente la metà.

Discussione dei risultati. – La spiegazione di tutto il fenomeno elettrochimico si può avere da queste due serie di esperienze ora citate. Da esse si deduce che in ambiente fortemente cianidrico, si ha la riduzione reversibile senza che si formino composti insolubili. Solamente quando la concentrazione del cianuro scende sotto un certo limite la metà del $K_4[Mn(CN)_6]$ inizialmente presente si riduce e al fenomeno elettrochimico segue un fenomeno chimico di precipitazione. È difficile dare una spiegazione del fenomeno studiato a causa dei molteplici equilibri che possono prendere origine dalla dissociazione degli ioni complessi, sia nella forma ossidata che nella forma ridotta. E però si può ammettere con Manchot (loc. cit.) che il processo di riduzione sia

$$(1) \qquad [Mn(CN)_6]^{-4} + \Theta \rightleftarrows [Mn(CN)_6]^{-5}$$

a cui corrisponde un potenziale dell'elettrodo dato da

$$(2) \qquad \pi = \pi_0 + \frac{RT}{nF} \ln \frac{[Mn(CN)_6^{-5}]}{[Mn(CN)_6^{-4}]}.$$

Se i due complessi fossero completamente indissociati, il potenziale di semionda dovrebbe essere indipendente dalla concentrazione del cianuro nella soluzione. Invece, le esperienze polarografiche della tabella I mettono in evidenza una tendenza del potenziale di semionda a spostarsi verso valori più positivi per aggiunta di cianuro, spostamento che diventa meno pronunciato per le alte concentrazioni del cianuro stesso. Orbene, la forma ossidata e la forma ridotta del complesso cianidrico possono rispettivamente dar luogo alle dissociazioni seguenti:

$$(3) \quad \begin{cases} [Mn^{II}(CN)_6]^{-4} \rightleftarrows [Mn^{II}(CN)_3]^{-1} + 3\,CN^- & (a) \\ [Mn^{II}(CN)_6]^{-4} \rightleftarrows Mn^{+2} + 6\,CN^- & (b) \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} [Mn^{I}(CN)_6]^{-5} \rightleftarrows [Mn^{I}(CN)_3]^{-2} + 3\,CN^- & (a) \\ [Mn^{I}(CN)_6]^{-5} \rightleftarrows [Mn^{I}(CN)_4]^{-3} + 2\,CN^- & (b). \end{cases}$$

Perciò dobbiamo limitarci a dare solo una spiegazione qualitativa dei fenomeni. I dati della tabella I indicano che per forti concentrazioni di cianuro di potassio il potenziale di semionda assume un valore quasi costante. Possiamo ammettere che a queste concentrazioni le dissociazioni (3) e (4) vengono ostacolate sicchè praticamente il potenziale è dato dalla (2), ed è quindi indipendente dalla concentrazione degli ioni CN^-. Per concentrazioni di cianuro inferiori, entrano in gioco le dissociazioni (3) e (4) e al di sotto di un certo limite di concentrazione si ha la precipitazione del sale solido. A questo, secondo i dati analitici di

Treadwell da noi confermati, corrisponde la formula $K_6Mn_2(CN)_9$. Orbene, questo sale può considerarsi derivato dall'una o dall'altra delle due seguenti reazioni:

$$(5)\quad \begin{cases} [Mn^{II}(CN)_3]^{-1} + [Mn^{I}(CN)_6]^{-5} \longrightarrow Mn_2(CN)_9^{-6} & (a) \\ [Mn^{II}(CN)_6]^{-4} + [Mn^{I}(CN)_3]^{-2} \longrightarrow Mn_2(CN)_9^{-6} & (b). \end{cases}$$

La variazione del potenziale verso valori più positivi per effetto dell'aggiunta di ioni CN^- può essere spiegata ammettendo che per la reazione (5_a) prevalga l'equilibrio di dissociazione (3_a) della forma ossidata rispetto a quelli di dissociazione della forma ridotta (4_a) e (4_b); per la reazione (5_b), invece, che coesistano gli equilibri di dissociazione (3_b) e (4_a).

È interessante osservare come la formula $K_6Mn_2(CN)_9$ del sale solido di precipitazione, che contiene un atomo di manganese monovalente ed uno di manganese bivalente, abbia analogia con la formula del ferro enneacarbonile $Fe_2(CO)_9$. Se si tiene presente che è stato recentemente preparato [8] il complesso $K_4Ni(CN)_4$ analogo al nicheltetracarbonile $Ni(CO)_4$ in cui i quattro gruppi CO legati all'atomo di nichel sono sostituiti da ioni CN^- e si considera che in $Fe_2(CO)_9$ tre gruppi CO sono legati a ponte fra i due atomi di ferro mentre sei sono in condizioni analoghe a quelli del nicheltetracarbonile, si potrebbe pensare di ascrivere al nostro sale $K_6Mn_2(CN)_9$ una struttura analoga a quella di $Fe_2(CO)_9$, con conseguente possibilità di poter avere in questo la sostituzione di sei gruppi CO con sei ioni CN^-.

Abbiamo in corso misure magnetiche e strutturistiche per chiarire la struttura del $K_6Mn_2(CN)_9$.

Elettrochimica. — *Concordanze e discordanze fra valori teorici e sperimentali delle forze elettromotrici delle pile elettrochimiche.* Nota [*] del Socio Oscar Scarpa.

Le cause delle differenze fra i valori delle f. e. m. delle pile calcolati termodinamicamente e quelli ricavati con misure dirette non pare abbiano sufficientemente richiamato l'attenzione dei fisici. Specialmente per provare la necessità di tener conto nel calcolo termodinamico del cosidetto termine correttivo di Helmholtz [1] vennero infatti, a suo tempo, esaminate poche pile per le quali Jahn ha ottenuto i risultati, compendiosamente esposti nella tabella che vien di solito citata nei trattati [2].

(8) « Journ. Am. Chem. Soc. », *64*, 1187 (1942).

(*) Presentata nella seduta del 9 aprile 1949.

(1) Del termine $T\frac{de}{dt}$ che compare nella equazione: $e = \frac{J\Delta U}{96500n} + T\frac{de}{dt}$. Per chiarimenti vedere alla nota (11) in fine del presente scritto.

(2) Vedere ad esempio a p. 108 del noto trattato: *Piles primaires et accumulateurs* di Fery, Chenevau et Paillard, Paris, Enc. Baillère.

Ma mentre per le pile in essa incluse si hanno differenze comprese fra + 0,02 volt e — 0,01 volt con gli sperimentali (il che si accorda con il fatto per cui si possono ammettere i valori di ΔU noti con l'approssimazione di ± 100 calorie e quelli di $\frac{de}{dt}$ con l'approssimazione di ± 0,00005 volt/grado), in parecchi casi da me sperimentati, pur impiegando pile con costituzione non troppo speciale, ho riscontrato differenze molto maggiori di cui non appariscono evidenti le cause.

Ed ecco alcuni esempi caratteristici:

1° *Pile ad aria con anodo di carbone attivo.* - Di queste pile esistono tre tipi principali che differiscono per la natura dell'elettrolito (soluzioni di Cloruro di Ammonio, di Cloruro di Sodio, di idrato di Potassio). Il più importante è il primo al quale compete lo schema:

(1) $\underset{-}{Cu} \mid Zn \mid \underset{sol.}{NH_4Cl} \mid$ Carbone poroso saturo di ossigeno adsorbito $\mid \underset{+}{Cu}$

La reazione termochimica complessiva che ad esso compete è:

(2) $$Zn + 2\,NH_4Cl + 1/2\,O_2 = ZnO \cdot 2\,NH_4Cl + 84900 \text{ cal.}$$

Poichè il coefficiente $\frac{de}{dt}$ nell'intorno di + 20° C. si può assumere + 0,0016 volt/grado, applicando la equazione di Helmholtz si deduce: $e = \mathbf{2{,}3}$ **volt** mentre la misura diretta (a circuito aperto e con pila non polarizzata) conduce a stabilire come media: $e = \mathbf{1{,}5}$ **volt.**

Esiste quindi una differenza di ben **0,8 volt.**

Discutendo il reale funzionamento di queste pile ho fermato in modo particolare la mia attenzione sulle modalità con le quali i carboni porosi adsorbono l'ossigeno atmosferico. Poichè gli elettrodi fabbricati con i *carboni attivi* si debbono considerare sempre saturi di ossigeno, deve avvenire che l'ossigeno atmosferico viene man mano adsorbito dal carbone compensando quello ceduto dall'elettrodo all'elettrolita per effetto della reazione elettrochimica;

(3) $$2\,NH_4^+ + O + 2\,H_2O = 2\,NH_4OH + 2 \times 96580 \text{ Coulomb.}$$

Ma l'*adsorbimento* di ossigeno gassoso da parte dei carboni è notoriamente accompagnato da emissione di calore:

(4) $$C + O_2 = C + 2\,O_{adsorbito} + Q_{caloric}$$

calore che non può, nel caso speciale, contribuire direttamente allo sviluppo di energia elettrica da parte della pila poichè la reazione (4) si può far avvenire (come in alcune delle vecchie pile Féry) soltanto in corrispondenza della testata dell'elettrodo di carbone che è esterna alla pila. In proposito si deve tener presente che essendo imposto isotermico il funzionamento della pila, tale calore viene ceduto dall'elettrodo all'ambiente esterno (al termostato in cui si suppone immersa la pila).

L'energia interna posseduta dal sistema, impiegata per la produzione di energia elettrica, deve quindi differire da quella espressa con l'equazione (2) di Q calorie. Ne segue che per ogni molecola grammo di acqua liquida formata durante il funzionamento della pila si deve tener conto che se essa avvenisse entro un calorimetro non si avrebbe lo sviluppo delle 68300 calorie che accompagnano la combustione dell'idrogeno con l'ossigeno gassoso nelle ordinarie esperienze termochimiche, ma bensì di 68300 — Q calorie.

La reazione termochimica complessiva che si suppone avvenire nella pila mentre genera 96580 Coul. è quindi non già la (2) ma bensì la:

$$(5) \qquad Zn + 2\,NH_4Cl + (O)_{ads.} = ZnO \cdot 2\,NH_4Cl + (84900 - Q)\ \text{cal.}$$

E poichè il valore di Q per i carboni più porosi [3] è dell'ordine di 40000 cal., applicando la equazione Helmholtz risulta come valore della f. e. m. teorica **1,45 volt**, valore sufficientemente in accordo con il medio sperimentale. Che se le vecchie pile Féry possedevano forze elettromotrici ancora minori (Féry cita pile con f. e. m. 1,26 Volt) ciò si deve attribuire alla minor attività dei carboni allora adoperati (e quindi a minori valori di Q).

Fatti simili avvengono con gli altri sopracitati tipi di pile ad aria.

2° *Pile al biossido di manganese* (*pile Léclanché*). – Le diverse teorie sul loro funzionamento conducono concordemente ad ammettere come reazione termochimica complessiva la:

$$2\,MnO_2 + 2\,NH_4Cl + Zn = Mn_2O_3 + ZnO \cdot 2\,NH_4Cl + 59000\ \text{cal.}$$

La forza elettromotrice di queste pile (a circuito aperto) è differente (varia fra 1,4 e 1,9 volt) secondo la qualità del biossido di manganese impiegato come depolarizzante, ma per convenzione si assume nella pratica 1,5 volt [4] che circa coincide con quello delle pile con pirolusite.

Fra i diversi biossidi di manganese naturali e artificiali (i quali differiscono per grado di idratazione, per la costituzione cristallografica e per la costituzione chimica, sulla quale però si hanno tuttora notevoli incertezze) assume particolare importanza la pirolusite naturale.

Assumendo intorno a + 20° C, per le pile aventi questo spolarizzante, $\frac{de}{dt} = +0{,}00085$ (valore risultante dalle mie misure dirette [5]) si deduce, applicando la equazione di Helmholtz, $e = \mathbf{1{,}52\ volt}$ mentre il valore più probabile (corrispondente alla massima frequenza) è **1,53 volt.**

(3) Vedi ad esempio in S. J. Gregg, *The Absorption of Gases by solids*, Methuen, London. Per maggiori particolari rinvio alle mie Note pubblicate negli anni 1944 e 1945 nella rivista: *L'Energia Elettrica* (Milano, vol. XXI e XXII).

(4) Vedere le norme nazionali emesse dal C. E. I. nonchè quelle internazionali per le pile industriali.

(5) *Contributo allo studio delle pile con biossido di manganese.* « La ricerca Scientifica », gennaio 1941. Vedi pure id. luglio–settembre 1941, nonchè in *L'Energia Elettrica*, gennaio 1945.

Se si conoscessero con sicurezza le costituzioni chimiche dei vari biossidi naturali e artificiali e i corrispondenti calori di formazione, come si conoscono quelli riguardanti la pirolusite, sarebbe possibile eseguire un esame approfondito del loro funzionamento nelle pile; disgraziatamente tali dati mancano. Si ritiene, soltanto, con qualche ragione, che nei biossidi artificialmente trattati sono contenuti (probabilmente allo stato di combinazione di adsorbimento) ossidi più reazionabili della pirolusite e probabilmente anche ossidi superiori. Le pile che impiegano questi ossidi artificialmente attivati posseggono non solo forze elettromotrici più elevate, ma hanno maggiore durata a parità delle altre condizioni.

Un biossido attivato che conduce a pile con forze elettromotrici dell'ordine di 1,8–1,9 volt è stato da me realizzato trattando un biossido naturale avente titolo superiore all'85% in MnO_2 con acido nitrico concentrato, mantenendo l'impasto per più ore a temperatura elevata fino a completa secchezza, lavando lungamente il prodotto con acqua distillata e essiccando in stufa a 120°. Il coefficiente di temperatura delle pile con esso fabbricate risultò assai minore (dell'ordine di + 0,0005 Volt/grado) di quelle con pirolusite [6].

Si può quindi concludere che per le pile Léclanché che impiegano biossidi con proprietà chimico–fisiche normali (ad esempio la pirolusite del Caucaso) l'equazione di Helmholtz è soddisfatta, mentre per quelle con biossidi artificialmente attivati conduce a valori inferiori degli sperimentali in causa di non sufficiente conoscenza dei dati termochimici.

3° *Pile Weston.* – Lo studio sperimentale di queste pile è stato effettuato, in modo quanto mai accurato, nei grandi laboratori tecnico–scientifici poichè con esse vengono costruiti i campioni di f. e. m. Il tipo con elettrolita saturo di Solfato di Cadmio possiede la f. e. m. **1,0183 volt** a 18° e il coefficiente di temperatura – 0,000041 Volt/grado.

Poichè la reazione termo-chimica che corrisponde alla generazione di 2×96580 Coulomb è:

$$Cd + Hg_2SO_4 = Cd\,SO_4 + 2\,Hg + 54360 \text{ calorie}$$

si deduce, applicando la equazione di Helmholtz: $e = \mathbf{1,169\ volt}$, valore molto maggiore dello sperimentale.

Ma si deve notare che in queste pile il cadmio viene impiegato sotto forma di amalgama, la cui formazione avviene con sviluppo di calore, ragione per cui la effettiva variazione di energia interna del sistema in corrispondenza della generazione di 2×96580 Coulomb è inferiore alla sopraindicata di ben 6800 Calorie. Tenendo conto di tale fatto, risulta a 18° C.:

$$e = \frac{47560}{2 \times 23100} - 291 \times 0{,}000041 = \mathbf{1,074\ volt}$$

valore che praticamente si accorda con lo sperimentale.

(6) Vedi nelle Note sopracitate.

4° *Accumulatori.* – È noto che gli usuali accumulatori al piombo posseggono una forza elettromotrice il cui valore praticamente coincide con quello dedotto mediante la equazione di Helmholtz, fatto che pur ho trovato verificato negli accumulatori al piombo con catodo di zinco:

$$\overset{+}{Cu} \mid Pb \mid PbO_2 \mid H_2SO_4 \mid Zn \mid \overset{-}{Cu}$$

Differenze notevoli fra i valori teorici e gli sperimentali si osservano invece nel caso degli accumulatori alcalini al Ferro-Nichel, al Cadmio–Nichel e al Ferro-Nichel–Cadmio, fatto che deve venir principalmente attribuito alla imperfetta conoscenza della costituzione chimica della loro materia attiva positiva e quindi delle conseguenti reazioni di scarica (7) e alla mancanza di dati termochimici sufficientemente esatti.

5° *Pile tipo Daniell.* – È noto che la applicazione della equazione di Helmholtz alla pila di Daniell:

$$\overset{+}{Cu} \mid CuSO_4 \mid ZnSO_4 \mid Zn \mid \overset{-}{Cu}$$

conduce a valori della f. e. m. che si possono assumere ben concordanti con quelli risultanti dalle misure dirette. Ho però ritenuto interessante esaminare il caso delle pile:

$$\overset{+}{Cu} \mid CuCl_2 \mid ZnCl_2 \mid Zn \mid \overset{-}{Cu}$$

$$\overset{+}{Cu} \mid Cu(NO_3)_2 \mid Zn(NO_3)_2 \mid \overset{-}{ZnCu}$$

alle quali pur corrisponde la equazione di reazione complessiva:

$$Zn + Cu^{++} = Zn^{++} + Cu$$

il che potrebbe far ritenere che a tutte corrisponde una medesima variazione dell'energia interna. Possono invece differire i termini: $T\frac{de}{dt}$ poichè differenti sono i valori degli effetti *Peltier* riferiti ai contatti fra gli elettrodi e gli elettroliti.

Particolarmente interessante riuscì il caso delle pile con le soluzioni dei nitrati, poichè la f. e. m. mi risultò molto minore di quella delle pile con i solfati e con i cloruri dei due metalli (ordine di grandezza rispettivamente: 1,1 e 1,08 volt contro 0,85 a 0,65 volt per le pile con i nitrati). E differenti anche nel segno risultarono i coefficienti di temperatura.

Esaminando poi le pile:

$$\overset{+}{Cu} \mid Cu(NO_3)_2 \mid ZnSO_4 \mid Zn \mid \overset{-}{Cu}$$

$$\overset{+}{Cu} \mid CuSO_4 \mid Zn(NO_3)_2 \mid Zn \mid \overset{-}{Cu}$$

(7) Vedi due mie Note pubblicate in *Energia Elettrica* nell'anno 1948.

ho potuto stabilire che le maggiori delle differenze appaiono per le seconde (quando lo zinco è immerso nelle soluzioni di Nitrato di zinco).

Ho quindi ritenuto necessario misurare i P. E. dello Zinco quando è bagnato da tali soluzioni. Per la relazione delle relative esperienze mi riferisco alla mia Nota pubblicata recentemente nella « Ricerca Scientifica » [8] nella quale ho mostrato che si deve ammettere per lo zinco uno speciale stato passivo acquisito quando viene immerso nelle soluzioni di nitrato di Zinco.

Ne segue che la reazione chimica che avviene all'elettrodo negativo quando l'elettrodo di zinco è immerso nelle soluzioni dei nitrati (e in particolare in quelle di nitrato di zinco) non può venir perfettamente definito dal punto di vista termodinamico.

Fatto che dà ragione della incostanza nei valori delle f. e. m. direttamente misurate nel caso delle pile con questi elettroliti.

6° *Caso delle pile di concentrazione.* - In una precedente Nota [9] ho mostrato che mentre la equazione di Gibbs–Helmholtz è valida per le pile di concentrazione costituite con due amalgame diversamente concentrate, ma diluite, di un medesimo metallo, fra le quali è interposta la soluzione di un sale del metallo amalgamato, essa non vale per quelle costituite con due elettrodi dello stesso metallo immersi in due soluzioni di un sale del medesimo metallo onde sono costituiti gli elettrodi, ma diversamente concentrate.

La causa di tale fatto non è da attribuire, come può apparire a prima vista, alla irreversibilità termodinamica del fenomeno di diffusione che origina lo sviluppo della loro forza elettromotrice, perchè se si esaminano attentamente le condizioni imposte al funzionamento delle pile elettrochimiche per poter dedurre la equazione di Gibbs–Helmholtz, e si osserva che principalissima è che la erogazione della corrente duri un tempo brevissimo con una intensità pressocchè nulla, quale in pratica è quella necessaria per caricare l'ago e i quadranti dell'elettrometro elettrostatico possedente piccolissima capacità, con il quale si suppone di misurarne la forza elettromotrice (« a circuito aperto »), risulta che con ciò vengono escluse tutte le cause che possono alterare il valore della f. e. m. della pila per l'esistenza di fenomeni irreversibili durante il sopraindicato funzionamento.

Nella citata Nota ho infatti mostrato che la causa della invalidità deriva essenzialmente dalle differenze fra i coefficienti di temperatura dei numeri di trasporto degli ioni positivi e negativi contenuti nei due elettroliti a contatto, per effetto delle quali il termine $T \frac{de}{dt}$ non può dar la misura della differenza di potenziale elettrico sviluppata al contatto fra i due elettroliti.

7° A maggior illustrazione di quanto riguarda la applicazione della equazione di Gibbs–Helmholtz a pile il cui funzionamento **reale** è tipicamente irre-

(8) « La Ricerca Scientifica », vol. XIX, Anno 1949.

(9) *Sulla validità della equazione di Gibbs-Helmholtz per le pile di concentrazione.* Questi « Atti », anno 1948.

versibile (anche perchè soggette a intensissimi fenomeni di polarizzazione e a notevolissime sovratensioni gassose) cito il caso della pila di Volta, per la quale il valore sperimentale della f. e. m. misurata in condizioni di circuito aperto (con pila appena preparata) è notevolmente maggiore di quello calcolabile con la equazione di G.-H.; mentre, se si dovesse tener conto della energia dissipata per fenomeni irreversibili dovrebbe esser minore.

Questa pila, costituita con un elettrodo di rame uno di zinco e, come elettrolita, una soluzione diluita di acido solforico, possiede secondo i diversi trattati forza elettromotrice compresa fra 0,9 e 1 Volt, fatto che ho confermato sperimentalmente su alcuni campioni. Operando però con lamiere di rame ben pulite con carta a smeriglio ho quasi sempre ottenuto **1,00 volt** mediante misure a circuito aperto, e operando con lamiere ramate di fresco per via elettrolitica, in modo da escludere la presenza di tracce di ossido, non ho mai ottenuto valori inferiori a **0,95 volt.**

La pila di Volta, come è ben noto, è sensibilissima alla polarizzazione. Chiudendo ad esempio una di tali pile, con forza e. m. iniziale di 1 volt su una resistenza di 5 ohm, la tensione scende molto rapidamente a 0,4 volt. Ma se dopo essersi quasi stabilizzata si apre il circuito, la f. e. m. risale, prima con grandissima rapidità fino a circa 0,5-0,6 volt e poi più lentamente tendendo al valore primitivo.

La reazione termo-chimica complessiva a cui viene attribuita la generazione della energia fornita dalla pila di Volta ad acido solforico, è la:

$$Zn + H_2SO_4 = ZnSO_4 + H_2 + 37970 \text{ calorie.}$$

Durante il funzionamento l'idrogeno si sviluppa sull'elettrodo di rame, ed è a tale sviluppo di gas che viene attribuita la polarizzazione della pila. Ma questo fenomeno è molto più complesso di quanto generalmente è detto nei trattati poichè il rame forma con l'idrogeno dei composti definiti (idruri) e dei composti di adsorbimento ai quali corrisponde, per ogni molecola grammo di idrogeno adsorbita, uno sviluppo di calore che, in media, si può valutare a 15000 calorie [10] alla temperatura ordinaria. Al calore di reazione corrispondente alla precedente equazione di reazione (37970 cal.) sembra quindi di dover sommare tali 15000 calorie, per poi calcolare la f. e. m. della pila durante il funzionamento iniziale (cosa che può, tuttavia, sembrare non legittima).

Poichè il coefficiente di temperatura della f. e. m. pila di Volta non era noto, lo ho dedotto sperimentando fra 17° e 70°, ottenendo valori dell'ordine di 10^{-4} volt/grado. Applicando la equazione di Gibbs-Helmholtz e tenendo conto che il termine $\frac{P\Delta V}{2 \times 96580}$ dà il contributo di — 0,02 volt, e adottato per Q il valore: 37970 cal. si ottiene: $e = 0{,}83$ **volt,** valore che è notevolmente inferiore a tutti gli sperimentali. Nè le differenze si possono attribuire a errori nelle misure.

(10) S. J. Gregg, *The Absorption of Gases by solids*. Methuen, London, p. 41 (1934); Vedi anche in C. Smithells, *Gases and metals*, London, 1937.

Ricercando le cause di tale apparente invalidità della equazione di Gibbs-Helmholtz per le pile di Volta sono stato condotto a ritenere che le più probabili sono:

1° Il rame onde è costituito l'elettrodo contiene nel suo strato superficiale (come generalmente avviene nelle ordinarie lamiere) dell'ossidulo il quale venendo ridotto dall'idrogeno nascente origina uno sviluppo locale di energia a cui corrisponde un aumento del valore della f. e. m.

2° L'elettrolita contiene dell'ossigeno proveniente dalla dissoluzione dei gas dell'atmosfera, il quale ossidando l'idrogeno che si sviluppa sull'elettrodo di rame produce un simile effetto.

3° Lo strato superficiale dell'elettrodo di rame contiene (inizialmente) dell'ossigeno allo stato di combinazione di adsorbimento.

4° Bisogna tener conto del calore di formazione dei sopradetti composti di adsorbimento dell'idrogeno.

È evidente che le prime tre cause possono coesistere, ma è ben difficile scinderne i contributi specialmente per la rapidissima polarizzabilità della pila.

Ricordo tuttavia che la f. e. m. delle pile possedenti l'elettrodo di rame ramato di fresco per via elettrolitica, operando in modo da escludere la presenza di ossidulo, risultò dell'ordine di **0,95 volt**, e che scaldando leggermente nell'aria l'elettrodo di rame, in modo da formare poco ossidulo alla sua superficie, ho ottenuto pile con f. e. m. di **1,04 volt** la quale poi, a circuito aperto, diminuì lentamente fino a 1 volt, raggiungendo così il valore che molte volte si trova adoperando lamiera di rame del commercio.

D'altra parte mantenendo per qualche ora una pila alla temperatura di 70°, in modo da espellere gran parte dell'ossigeno disciolto, e poi proteggendone la superficie dall'aria, ho trovato, in alcuni casi, che dopo raffreddata la pila alla temperatura ordinaria la f. e. m. diminuisce e raggiunge circa 0,90 volt, ma in altri rimase invariata. Che se la reazione a cui è dovuto lo sviluppo della f. e. m. fosse:

$$Zn + H_2SO_4 + \frac{1}{2}O_2 = ZnSO_4 + H_2O$$

poichè ad essa corrisponde lo sviluppo di 106357 calorie, la forza elettromotrice dovrebbe essere dell'ordine di 2 volt e quindi molto maggiore dell'effettiva. Bensì vero ove si trattasse di ossigeno disciolto nel liquido oppure di ossigeno adsorbito esistente nello strato superficiale del metallo bisognerebbe tenere conto dei corrispondenti calori (di soluzione e di adsorbimento), ma nella mancanza di dati sperimentali non si può effettuare alcun calcolo. Per analogia con i noti calori di adsorbimento dell'ossigeno per parte di altri metalli si può tuttavia ritenere che esso sia assai elevato e quindi sufficiente per dare, almeno in parte, ragione del fenomeno in discussione.

Bisogna quindi concludere che per effetto di parziale ossidazione dell'idrogeno che si scarica sull'elettrodo di rame (ragione per cui il calore di reazione, 37970 calorie, deve venir aumentato) e per il fatto che per quanto riguarda l'ossigeno eventualmente adsorbito dall'elettrodo di rame il suo calore di combinazione con l'idrogeno risulta assai inferiore alle 68387 calorie, o per concomitante azione di

tracce di ossidulo contenute nello strato superficiale dell'elettrodo di rame, il valore della f. e. m. delle pile di Volta appare, nelle condizioni di circuito aperto, maggiore di quello teorico che si calcola considerando la equazione di reazione finora ritenuta valida.

Non si deve però dimenticare che se alle 37970 calorie, di cui nella soprascritta equazione di reazione, si aggiungono le 15000 calorie corrispondenti alla contemporanea formazione (iniziale) di una molecola gr. di idruro di rame, la f. e. m. teorica andrebbe aumentata di 0,32 volt, nonchè di 0,02 volt per l'assenza del termine $P\Delta V$, e quindi sarebbe **1,17 volt**, valore che sorpassa di circa 0,17 volt lo sperimentale.

8° Un altro esempio di pile con f. e. m. maggiore della teorica è dato dalla pila:

$$\underset{-}{Cu} \mid Zn \mid (NH_4Cl)_{aq.} \mid \text{Carbone di storta} \mid \underset{+}{Cu}$$

di cui è stata tentata qualche applicazione tecnica. Essa possiede all'inizio della scarica la forza elettromotrice: **1,1 volt**; mentre calcolandola in base alla reazione complessiva:

$$Zn + 2\,(NH_4Cl)_{aq.} + H_2O = ZnO \cdot 2\,(NH_4Cl)_{aq.} + H_2 + 16500 \text{ cal.}$$

tenendo conto del termine $T\frac{de}{dt}$ e sottraendo 0,01 volt corrispondente al lavoro $P\Delta V$ conseguente allo sviluppo di una molecola grammo di idrogeno gassoso, si ottiene:

$$e = 0{,}37 + 0{,}47 - 0{,}01 = \mathbf{0{,}83 \text{ volt.}}$$

Anche in questo caso la differenza $1{,}1 - 0{,}83 = 0{,}28$ volt deve venir attribuita all'ossigeno atmosferico che è disciolto nel liquido e a quello adsorbito dalla superficie del carbone di storta. Ma anche in questo caso si deve tener presente che a tale ossigeno spetta una energia interna (in quanto si trova in combinazione di adsorbimento) assai minore di quella che possederebbe allo stato libero. Ponendo che il calore di adsorbimento per atomo grammo di ossigeno da parte del carbone di storta sia di 35000 calorie il valore teorico della f. e. m. di questa pila diventa **1,08 volt**, e quindi si accorda con lo sperimentale.

Concludendo. – 1° Dall'esame del funzionamento di pile nelle quali, a differenza di quelle esaminate da Jahn, le reazioni elettrochimiche sono accompagnate da fenomeni chimico-fisici di natura complessa (sviluppi e assorbimenti di calore causati da adsorbimenti, da dissoluzioni, ecc.) risulta, ciò malgrado, che la equazione di Gibbs–Helmholtz si può ritenere valida in quanto i valori termodinamici della f. e. m. calcolati tenendo conto della concomitante esistenza di questi fenomeni, si possono ritenere in buon accordo con quelli risultanti dalle misure dirette.

2° Soltanto in un caso, per le pile di concentrazione di seconda specie (cioè delle pile di diffusione), la suddetta equazione conduce a valori che non

possono accordarsi con gli sperimentali, e ciò per ragioni intrinseche, riguardanti la impossibilità di calcolare mediante il termine $T\frac{de}{dt}$ la differenza di potenziale elettrico sviluppata al contatto fra elettroliti (11).

Chimica fisica. — *Indici di legame e spettri di oscillazione nelle molecole poliatomiche* (*). Nota di GIOV. BATTISTA BONINO e EOLO SCROCCO, presentata (**) dal Socio G. B. BONINO.

I metodi di calcolo degli orbitali molecolari, sviluppati dai noti e classici lavori teorici della Scuola inglese di Lennard Jones e di Coulson [1], permettono di affrontare, attraverso alla considerazione ed all'analisi degli indici di legame, problemi di natura più squisitamente chimica. Un compito di attualità nella chimica è per esempio quello di penetrare il significato degli indici di legame e di utilizzarne il contenuto euristico onde inquadrare, in una rappresentazione chimico-organica di più ampio respiro, problemi fino ad oggi affidati alle classiche valutazioni simboliche qualitative della chimica organica.

In tale direttiva si accentua ogni giorno più l'opportunità di trovare metodi atti a consolidare sperimentalmente la plausibilità dei valori degli indici di legame calcolati per via quanto-meccanica in modo da poter attribuire agli stessi indici, sul piano empirico, un maggior grado di fiducia. L'opportunità di questo controllo è tanto più risentita ed attuale in quanto i metodi oggi proposti ed usati per il

(11) Per maggior chiarimento ricordo che mentre alcuni trattati affermano esser l'equazione di Gibbs-Helmholtz valida per le sole pile reversibili, altri affermano esser valida per tutte le pile.

Ora il fatto è che GIBBS (« Transaction Connecticut Ac. », vol. II e III anni 1873 a 1878) considerando solo trasformazioni chimico-fisiche isotermiche, isobariche e REVERSIBILI dedusse l'equazione :

$$W = J\Delta U - JT\Delta S + P\Delta V$$

da cui riferendosi al caso delle pile elettrochimiche eroganti ε Coulomb, risulta :

$$e = J\frac{\Delta U}{\varepsilon} - JT\frac{\Delta S}{\varepsilon} + P\frac{\Delta V}{\varepsilon}$$

e che, quattro anni dopo, l'HELMHOLTZ (« Sitz. Berichte d. Berlin Ak. », Anno 1882) considerando simili problemi e indicando con q il calore reversibile sviluppato durante la trasformazione dedusse la equazione :

$$J\,dq = T\frac{de}{dt}\,de$$

ragione per cui si deduce :

$$e = J\frac{\Delta U}{\varepsilon} + T\frac{de}{dt} + P\frac{\Delta V}{\varepsilon}$$

che nel caso delle pile di concentrazione considerate nella mia Nota citata si riduce alla :

$$e = T\frac{de}{dt}\,.$$

(*) Lavoro eseguito, presso l'Istituto Chimico « Giacomo Ciamician » della Università di Bologna, Centro Studi di Chimica Fisica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 9 aprile 1949.

calcolo degli indici di legame hanno carattere approssimato e provvisorio e gli indici di legame possono risultare così da tipi di approssimazione diverse che reclamano sul piano chimico la necessità di controlli sperimentali atti a valutarne la consistenza pratica.

Una possibilità di sottoporre a controllo sperimentale (se pur di massima) i valori degli indici di legame può essere trovata (in casi di particolare semplicità) nel calcolo delle alterazioni che subiscono le frequenze molecolari tipiche di oscillazione al variare della delocalizzazione di elettroni mobili p_z e quindi al variare degli indici dei legami multipli. Il controllo sperimentale può allora essere ricondotto ad un giudizioso studio di spettri Raman ed ultrarossi.

Nella Nota presente riferiamo su un tentativo che mostra come si possano calcolare con ragionevoli approssimazioni le variazioni delle forze di richiamo di speciali legami fra atomi in molecole poliatomiche.

Seguendo le notazioni adottate nei lavori precedenti, ricordiamo che in una molecola organica costituita da nuclei aromatici o da catene polieniche o da ambedue questi tipi di elementi strutturali, l'energia totale ($\mathcal{F}$) dovuta all'interazione degli elettroni p_z nello studio quanto meccanico della molecola poliatomica stessa, viene espressa in funzione di parametri $x_1, x_2, \cdots, x_\nu$ che rappresentano le distanze di separazione tra gli atomi adiacenti nella molecola allo stato di riposo.

Questa energia può essere espressa, per comodità, come somma di due termini di cui il primo si concreta nella somma delle energie E_j dei singoli elettroni p_z nei diversi orbitali occupati. Si suppone perciò che questi elettroni si muovano nel campo di uno scheletro nucleare (deformato rispetto a quello originale) costituito da tutti i legami σ, astraendo del tutto dagli orbitali p_z. Il secondo termine ci è rappresentato dall'energia di compressione dei legami singoli che formano lo scheletro primitivo della molecola. Questa energia è necessaria per portare tale scheletro molecolare primitivo a quello attuale. È chiaro che anche quest'ultimo termine di energia è sempre dovuto all'effetto dell'interazione degli elettroni p_z.

Scriveremo cioè:

$$\text{(I)} \qquad \mathcal{F}(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) = 2 \sum_j E_j + V(x_1, x_2, \cdots, x_\nu);$$

la sommatoria è estesa a tutti gli orbitali j occupati nello stato fondamentale della molecola e il coefficiente 2 indica che ciascun orbitale è doppiamente occupato.

Valutando come fa Lennard Jones [2] in prima approssimazione con:

$$v(x_i) = k_s (x_i - s)^2$$

l'energia richiesta per cambiare la lunghezza di un legame singolo di tipo σ dal suo valore di equilibrio s fino al suo valore attuale x_i dovuto all'intervento degli elettroni mobili p_z, si può assumere per $V(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$ l'espressione:

$$V(x_1, x_2, \cdots, x_\nu) = \sum_{i=1}^{\nu} k_s (x_i - s)^2$$

per cui la (I) prende la forma:

$$\text{(II)} \qquad \mathcal{F}(x_1, x_2, \cdots, x_v) = 2 \sum_j E_j + \sum_i k_s (x_i - s)^2 .$$

Dalla (II) si deduce, per la forza che si esercita tra due atomi adiacenti comprendenti il legame x_i:

$$\text{(III)} \qquad F_i = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_i} = -2 \sum_j \frac{\partial E_j}{\partial x_i} - 2 k_s (x_i - s) .$$

La (III) può essere semplificata per una più utile applicazione del calcolo che ci siamo proposti ponendo:

$$\frac{\partial E_j}{\partial x_i} = \frac{\partial E_j}{\partial \beta_i} \frac{\partial \beta_i}{\partial x_i} .$$

Ricordando la nota equazione data da Lennard Jones [2] si ha:

$$\frac{\partial \beta_i}{\partial x_i} = k_d (x_i - d) - k_s (x_i - s) .$$

La derivata $\frac{\partial E_j}{\partial \beta_i}$ è calcolata nel lavoro di Coulson e Longuet-Higgins [11] e vale:

$$\frac{\partial E_j}{\partial \beta_i} = 2 \sum_j c_{j,k} c_{j,k+1} = I_i$$

dove β_i è il solito integrale di risonanza relativo al legame « i » e $c_{j,k}$ rappresentano i coefficienti delle combinazioni lineari costituenti gli orbitali molecolari j del problema studiato; inoltre k_s e k_d, e rispettivamente s e d, sono le costanti delle forze e le lunghezze dei legami singolo e doppio tipici, considerati cioè nei casi limiti nei quali l'indice di legame, rispetto agli elettroni mobili, sia rispettivamente zero od uno. Sviluppando si ha:

$$\text{(IV)} \qquad F_i = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_i} = -\{ I_i [2 k_d (x_i - d) - 2 k_s (x_i - s)] + 2 k_s (x_i - s) \} .$$

Per semplificare la (IV) teniamo presente che all'equilibrio $F_i = 0$, e ciò si verifica per un valore speciale $\bar{x}_i$ della distanza di legame x_i. Nell'intorno di questo punto potremo esprimere, nella solita approssimazione di potenziale parabolico proposta da Lennard Jones [2], la forza di richiamo nella forma:

$$\text{(V)} \qquad F_i = -2 \bar{k} (x_i - \bar{x}_i) .$$

Dalle (IV e V) si deduce:

$$\text{(VI)} \qquad -I_i [2 k_d (x_i - d) - 2 k_s (x_i - s)] - 2 k_s (x_i - s) = -2 \bar{k} (x_i - \bar{x}_i)$$

da cui, derivando membro a membro rispetto a x_i, si ottiene:

$$\text{(VII)} \qquad 2 \bar{k} = 2 k_s + I_i (2 k_d - 2 k_s) .$$

La (VII) risolve il problema che ci siamo proposti fornendo la nuova costante della forza nella nuova posizione di equilibrio. Questa costante evidentemente ha un valore compreso tra k_s e k_d, riducendosi, come si è postulato in

partenza, ad esse nei casi limiti nei quali rispettivamente l'indice di legame I_i è eguale a zero (caso del legame singolo puro tipico), oppure ad uno (caso del legame doppio tipico puro).

Abbiamo cercato di utilizzare la (VII) per computare le frequenze delle oscillazioni del gruppo C = O al variare del relativo indice di legame in alcuni derivati carbonilici (aldeidi e chetoni). Si sono fatti i calcoli partendo dall'ipotesi che l'aldeide formica contenga un C = O tipico. Poi tenendo conto dei rispettivi indici di legami si è giunti a calcolare la frequenza C = O dell'acroleina, dell'aldeide benzoica, del benzofenone, dell'acetofenone, e di qualche altra aldeide non satura (vedi tabella).

In questi composti si può verosimilmente considerare (ragionando per esempio con la teoria della valenza di Pauling) che per l'atomo di carbonio legato all'ossigeno sia verificata la ripartizione trigonale della valenza ibrida s, p. Si riferiscono perciò i diversi composti alla stessa configurazione schematica dell'aldeide formica le cui oscillazioni sono state studiate da Sutherland e

ν_1 ν_2 ν_4

Fig. 1.

Dennison [3]. Tre delle frequenze fondamentali che ci interessano (e delle quali diamo gli schemi nella fig. 1) soddisfano l'equazione dedotta dai sovra ricordati autori [3]

$$\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_4 = \frac{M_2 + 2m}{2 M_2 m} a + \frac{2b}{m} + \frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2} c$$

dove: $\Theta_i = 4\pi^2 \nu_i^2$, M_1 è la massa dell'atomo di ossigeno, M_2 quella dell'atomo di carbonio e m la massa dell'atomo di idrogeno (o in genere dei sostituenti all'atomo di carbonio). Le tre costanti a, b, c, ci rappresentano le forze di richiamo valutate da Sutherland e Dennison [3] per la molecola dell'aldeide formica. Per quanto riguarda la costante c che ci interessa e cioè la costante relativa al legame C = O i detti autori propongono il valore $c = 13{,}45 \cdot 10^5$ dine/cm.

Data la persistenza della simmetria della quantizzazione del carbonio legato all'ossigeno nei diversi composti carbonilici sovra ricordati, si potrà considerare in prima approssimazione che la frequenza Θ_4, restando costanti le masse degli atomi di C e di O, varii da composto a composto solo al variare della costante c e cioè praticamente al variare della forza di richiamo del legame C = O.

Si sono considerati Θ_4 e c come noti dallo studio degli spettri Raman della formaldeide per la quale si deve ritenere il legame C = O come puro, tipico e non delocalizzato, attribuendo perciò ad esso l'indice di legame eguale

ad uno. Misurando le frequenze di oscillazione in numeri d'onda (ω_i) dai dati di Sutherland e Dennison si ha, nel caso dell'aldeide formica:

$$\omega_{4,0} = 1744 \text{ cm}^{-1}.$$

Non abbiamo assunto come frequenza tipica del C = O quella relativa all'acetone in quanto a carico di essa si dovrebbero valutare delle azioni di iperconiugazione dovute ai gruppi metilici dell'acetone come in seguito sarà ulteriormente chiarito.

Dunque, nei limiti delle approssimazioni sovra schematizzate, il rapporto $\frac{\omega_{4,i}}{\omega_{4,0}}$ tra le frequenze C = O in due composti aldeidici o chetonici diversi dovrà scriversi eguale alla radice quadrata dei rapporti delle rispettive costanti di forza del legame C = O stesso. Queste si possono calcolare con il metodo sovraschematizzato a meno che non intervengano degli effetti di iperconiugazione per i quali occorre uno speciale calcolo degli indici di legame.

Chiamata con $\omega_{4,0}$ la frequenza C = O dell'aldeide formica e con $\omega_{4,i}$ la frequenza analoga in un chetone o in una aldeide diversa, scriveremo:

$$\frac{\omega_{4,i}}{\omega_{4,0}} = \sqrt{\frac{2\bar{k}_i}{2k_d}}.$$

Per ciò si avrà:

$$\omega_{4,i} = 1{,}503\sqrt{2\bar{k}_i} \text{ cm}^{-1}.$$

Per il valore k_s del legame semplice C — O si è usato il valore dedotto da Kohlrausch [4] attraverso all'interpretazione degli spettri Raman e cioè si è posto $2k_s = 5 \cdot 10^5$ dine/cm.

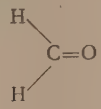
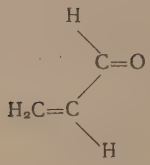
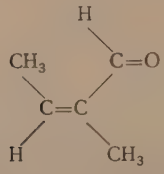
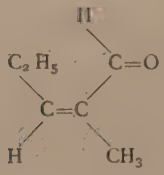
Il valore degli indici di legame I_i necessari al calcolo di $\bar{k}$ secondo la (VII) sono ricavati dalle soluzioni delle equazioni secolari dell'acetofenone, del benzofenone e del butadiene, applicando perciò l'approssimazione [A] [5].

Si trascura perciò in questi primi calcoli l'effetto dovuto alla maggiore elettronegatività dell'ossigeno rispetto al carbonio nel C = O, e si trascurano anche tutti gli effetti di iperconiugazione dei gruppi metilici legati ai C = O stessi.

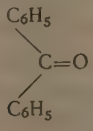
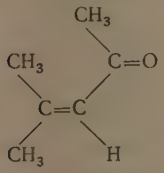
Nella tabella I riportiamo i valori delle varie grandezze e i valori delle frequenze così calcolate.

Il risultato relativo alla acroleina ci mostra una differenza nel senso che la frequenza trovata per il C = O è superiore di nove numeri d'onda a quella calcolata. Ciò dovrebbe imputarsi al fatto che l'indice di legame del C = O sia più forte di quello calcolato con la semplice equazione secolare butadienica nella quale (approssimazione [A]) non si tiene conto della maggiore elettronegatività dell'ossigeno rispetto al carbonio.

TABELLA I.

COMPOSTO	I_i C=O	$2k \cdot 10^{-5}$ dine/cm	Calcolato	Trovato	*Note*
1) Aldeide formica 	1,00	13,45	—	1744	[3]
2) Acroleina 	0,8944	12,56	1683	1692	[7]
3) Aldeide 2-metilcrotonica 	0,8944	12,56	1683	1689	[7]
4) Metiletilacroleina 	0,8944	12,56	1683	1688	[8]
5) Aldeide benzoica	0,904	12,64	1690	1689	[9]
6) Acetofenone	0,904	12,64	1690	1679	[9]

Segue: TABELLA I.

COMPOSTO	I_i C=O	$2k \cdot 10^{-5}$ dine/cm	Calcolato	Trovato	*Note*
7) Benzofenone 	0,8466	12,15	1656	1653	[9]
8) Ossidò di mesitile 	0,8944	12,56	1683	1673	[6]

Passando all'aldeide 2·metilcrotonica e alla metiletilacroleina, questa differenza è leggermente attenuata probabilmente per l'effetto iperconiugante [10] del metile legato al carbonio adiacente al gruppo C = O. In questi composti, però, la frequenza trovata è sempre leggermente superiore a quella calcolata. Nel caso dell'aldeide benzoica abbiamo invece, si può dire, la perfetta coincidenza fra calcolato e trovato. Qui il gruppo C_6H_5, nettamente elettronegativo, compensa praticamente la elettronegatività del C = O e l'approssimazione [A], con la quale è stata calcolata l'equazione secolare, risponde praticamente in modo completo. Lo stesso si può dire per il benzofenone, per il quale la differenza fra calcolato e trovato è di soli tre numeri d'onda, e cioè insignificante. Viceversa nel caso dell'acetofenone e nel caso dell'ossido di mesitile le differenze fra calcolato e trovato sono molto forti. In ambedue i composti la frequenza trovata è minore di circa 10 numeri d'onda di quella calcolata. Dunque l'indice di legame C = O in questi composti dovrebbe essere più piccolo di quello calcolato con l'approssimazione [A]. In ambedue questi composti abbiamo, però, un gruppo metilico direttamente legato al carbonio carbonilico.

Questo gruppo metilico indurrà un effetto di iperconiugazione nettamente sentito. L'effetto iperconiugante del metile è invero tanto forte da far abbassare la frequenza del C = O nell'acetone (che presenta appunto due gruppi metilici coniugati al C = O) di ben 24 numeri d'onda rispetto alla frequenza dell'aldeide formica, dove tale effetto di iperconiugazione non esiste.

E se si considera che la frequenza del C = O coniugato a un C = C etilenico, quale si osserva nell'acroleina, dovrebbe avere un valore di 1692 cm^{-1}, si vede che la frequenza trovata per l'ossido di mesitile scarta appunto di una ventina di numeri d'onda da quest'ultimo valore trovato per l'acroleina. Cioè

l'effetto iperconiugante del metile, che si ritrova nell'acetone, dove il C = O non è coniugato a doppi legami etilenici o a nuclei aromatici, si riproduce quantitativamente presso a poco inalterato anche nel caso del chetone alifatico insaturo sovraricordato. Questa diminuzione dell'indice di legame, dovuta all'effetto iperconiugante del metile, è invece meno risentita nell'acetofenone in conseguenza della « elettronegatività » del gruppo fenilico legato al carbonile analogamente a quanto si è poco innanzi riscontrato per l'aldeica benzoica e per il benzofenone.

I risultati ottenuti sono perciò incoraggianti: occorre poter però tener conto nel calcolo dell'effetto di iperconiugazione del metile legato al carbonile sull'abbassamento dell'indice del legame C = O. Su questo effetto tenteremo di impostare un calcolo di approssimazione in un prossimo lavoro.

Bibliografia.

[1] Ved. per esempio Coulson, « Trans. Far. Soc. », *33*, 388 (1937).
[2] Lennard Jones e Turkevich, « Proc. Roy. Soc. » (London), A *158*, 227 (1937).
[3] Sutherland e Dennison, « Proc. Roy. Soc. » (London), *148*, 259 (1934).
[4] Kohlrausch, *Der Smekal Raman Effect*, Springer, p. 154 (1931).
[5] Bonino e Rolla, « Rend. Acc. Linc. » (VIII), vol. V, 223 (1948).
[6] Kohlrausch, Pongratz, « Ber. », *66*, 1355 (1933).
[7] Bourguel, « C. R. », *195*, 311 (1932).
[8] Gredy, « Bull. Soc. Chim. France » *1*, 1029, 1038 (1935); *2*, 1951 (1935).
[9] Kohlrausch, Pongratz, « Wien. Ber. », *143*, 288 (1934).
[10] V. per esempio Mulliken e Rieke, « J. Am. Chem. Soc. », *63*, 41 (1941).
[11] Coulson e Longuet-Higgins, « Proc. Roy. Soc. » (London), A *191*, 39, eq. 23 (1947).

Paleontologia. — *Osservazioni sulle forme di « Neosqualodon » del Miocene della Sicilia* (*). Nota (**) del Socio Ramiro Fabiani.

Il genere *Neosqualodon* veniva istituito dal prof. Giorgio Dal Piaz nel 1904 su avanzi di un cranio e di una mandibola di un Odontoceto conservato nel museo geologico dell'Università di Firenze e proveniente dai calcari miocenici (Langhiano) dei dintorni di Scicli (Ragusa); i quali, com'è noto, in alcune aree della regione sono più o meno profondamente ed estesamente asfaltizzati. Nelle collezioni di detto Museo il fossile in parola portava l'etichetta: *Squalodon Assenzae* Forsyth Major *in schedis*. Il prof. Dal Piaz, che aveva avuto in esame l'esemplare dall'allora direttore dell'Istituto Geologico di Firenze prof. Carlo De Stefani, riconosceva però trattarsi di un Delfinide diverso dagli *Squalodon* veri e propri, pel quale proponeva appunto il nome generico *Neosqualodon* (1). Due anni prima, negli scavi praticati in una delle miniere di asfalto aperte subito a sud della città di Ragusa in località Tabuna, era stato rinvenuto un cranio quasi

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Geologia e Paleontologia dell'Università di Roma.
(**) Presentata nella seduta del 9 aprile 1949.
(1) G. Dal Piaz, *Neosqualodon*, « *nuovo genere della famiglia degli Squalodontidi* », « Mém. Soc. Paléont. Suisse », vol. XXXI. Genève, 1904.

completo di un Odontoceto, che il proprietario sig. P. A. Brown donava al museo geologico dell'Università di Palermo. Il direttore del tempo, prof. Gaetano Giorgio Gemmellaro, in una breve comunicazione presentata a questa Accademia [2] dava notizia dell'interessante rinvenimento, rilevando che l'esemplare, per i caratteri dei molari, si allontanava dagli *Squalodon* propriamente intesi, per avvicinarsi al *Phocodon Scillae*, genere e specie istituiti dall'Agassiz pel famoso frammento di mandibola con tre molari figurato nel 1670 da Agostino Scilla [3]. Pure propendendo a riportare questo frammento, trovato nei sedimenti miocenici di Malta, al genere *Squalodon* Grateloup, il Gemmellaro dichiarava non ancora bene dimostrato questo riferimento. Egli però non trovava più il tempo di occuparsi del fossile di Ragusa, il cui studio veniva invece intrapreso molti anni dopo, cioè nel 1920, da suo figlio Mariano [4]. Questi non esitava punto a riportare l'importante esemplare alla stessa specie *Neosqualodon Assenzae* dei pressi di Scicli, che 16 anni prima aveva fatta conoscere il prof. Dal Piaz.

Riesaminando recentemente l'esemplare illustrato da Mariano Gemmellaro per un lavoro che ho in corso su tutto il materiale di Odontoceti del Langhiano della regione ragusana, e confrontandolo con l'originale del *Neosqualodon Assenzae* di Scicli, che il collega prof. Merla, direttore dell'Istituto di Geologia dell'Ateneo fiorentino, ha voluto assai gentilmente concedermi a prestito, mi sono convinto che i due esemplari non possono invece considerarsi specificamente identici. Ho rilevato ciò già in altra mia pubblicazione [5], ma ne darò ampia dimostrazione nel lavoro accennato, che comparirà prossimamente nelle Memorie dell'Istituto Geologico dell'Università di Padova. Parmi tuttavia che sia sufficiente anche il semplice confronto fra la serie dentaria del *Neosqualodon Assenzae* di Scicli (Dal Piaz) e la omologa (per la sola mandibola) del *Neosqualodon Assenzae* di Ragusa (Gemmellaro) delineate negli uniti disegni, per rilevare immediatamente che si tratta di due specie differenti. E pertanto ritengo distinguere l'esemplare di Ragusa sotto il nome di *Neosqualodon Gemmellaroi* n. sp.

Nella Memoria in preparazione illustrerò anche vari frammenti di altri individui di questa specie trovati a Ragusa dopo il 1927, e inoltre alcuni resti di *Squalodon*, genere, la cui presenza avevo per primo segnalata negli stessi giacimenti asfaltiferi [6]. Tali resti di *Squalodon* ritengo riferibili per la massima parte a una nuova specie (*Squalodon Dal Piazi* n. sp.), che mi è caro dedicare al prof. Giorgio Dal Piaz, al quale dobbiamo l'illustrazione della fauna di Odonto-

(2) G. G. GEMMELLARO, *Sul rinvenimento di un teschio di Squalodontidi nel calcare bituminoso di Ragusa in Sicilia*, « R. Acc. Lincei », vol. XI, 2° sem., ser. V, fasc. 1. Roma, 1902.

(3) A. SCILLA, *La vana speculazione disingannata dal senso*. Napoli, 1670. – Fu tradotta in latino sotto il titolo: *De corporibus marinis lapidescentibus quae defossa reperiuntur*. Roma, MDCCLII.

(4) M. GEMMELLARO, *Il « Neosqualodon Assenzae Forsyth Major sp. » del Museo Geologico della Università di Palermo*. « Giorn. Sc. Nat. ed Econ. di Palermo », vol. XXXII. Palermo, 1920.

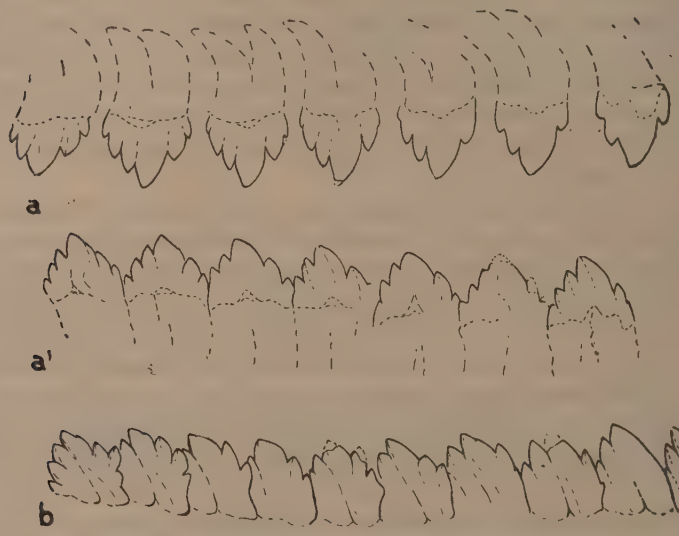
(5) R. FABIANI, *Sui resti di Odontoceti del Miocene inferiore del Ragusano conservati nel museo di Geologia dell'Università di Palermo*. « Giorn. di Sc. Nat. ed. Econ. di Palermo », vol. 46, seduta del 18 dicembre 1948. Palermo, 1949.

(6) R. FABIANI, *Resti di Mammiferi del Terziario e del Quaternario di Ragusa in Sicilia*. « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », Cl. Sc. Fis. Mat. e Nat., vol. VI, ser. 6ª, 2° sem., fasc. 11. Roma, 1927.

ceti miocenici del Bellunese, che è fra le più ricche e varie conosciute, ed ha importanza notevolissima riguardo ai problemi filogenetici dell'interessante gruppo.

Quanto all'accennato *Phocodon Scillae*, desidero fin d'ora esporre qualche osservazione.

La figura dello Scilla (da lui incisa in rame diritta, cioè non allo specchio, e quindi risultata rovescia), per quanto, *grosso modo*, abbastanza fedele, non poteva esser sufficiente per un riferimento generico sicuro.



a serie dentaria posteriore della mascella destra e *a'* del ramo mandibolare corrispondente, del *Neosqualodon Assenzae* di Scicli descritto da Giorgio Dal Piaz.

b serie posteriore del ramo mandibolare sinistro (l'immagine è rovesciata per rendere più immediato il confronto) dell'esemplare di Ragusa attribuito da Mariano Gemmellaro alla stessa specie, dalla quale però va distinto (*N. Gemmellaroi* n. sp.).

L'originale da molto tempo è andato a far parte delle collezioni del Dipartimento di Geologia del Sedgwick Museum dell'Università di Cambridge. Il dott. A. G. Brighton, che dirige tale Dipartimento, mi ha con somma cortesia inviate alcune fotografie e un perfetto calco dell'esemplare, sicchè mi son potuto convincere ch'esso va riportato al genere *Squalodon*, come aveva sospettato Gaetano Giorgio Gemmellaro e come alcuni autori avevano decisamente ammesso, ritenendo inoltre qualcuno di essi che al nome *Squalodon Scillae* Agassiz sp. sia da preferirsi, il nome *Squalodon melitensis* Blainville sp. (7). Io propongo tuttavia che sia mantenuto il nome specifico dell'Agassiz, che onora un precursore nella giusta interpretazione dell'origine dei fossili.

(7) R. Kellogg, *Description of two Squalodonts recently discovered in the Calvert Cliffs, Maryland.* « Proceed. U. S. Nat. Mus. », vol. 62, art. 16. Washington, 1923.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Proprietà di media toroidali delle funzioni armoniche* (*). Nota di GAETANO FICHERA, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

È a tutti noto il classico teorema della media di Gauss, che dimostra essere il valore, che una funzione armonica assume nel centro di un dominio sferico, la media dei valori che essa assume sulla frontiera.

Nei corsi del prof. Picone trovansi considerati altri teoremi di media per le funzioni armoniche in due o tre variabili, ad esempio per quelle armoniche all'interno o all'esterno di un dominio circolare, oppure nell'interno o all'esterno di un'ellisse. Per queste ultime si dimostra che la media della funzione u, rispetto all'anomalia eccentrica dell'ellisse, è uguale alla media – ponderata con un assegnato peso – dei valori che la u assume nell'intervallo, avente per estremi i due fuochi (1).

Non mi risulta che siano stati mai dati teoremi di media per una funzione, in tre variabili, armonica nell'interno di un toro, oppure all'esterno di questo. Scopo di questa Nota è di far conoscere teoremi siffatti, la cui esistenza mi fu più volte indicata, come molto probabile dal mio Maestro, prof. Picone, il quale ha previsto la molto notevole circostanza che l'ufficio, prestato nei teoremi di media su ricordati dal centro o dal punto all'infinito per dominî circolari, e dal tratto focale per quello ellittico, è invece assunto, nel caso del toro, dall'asse di rotazione di questo e dal cerchio base del fascio di sfere ortogonali al toro, cerchio che chiamerò *polare*.

In un piano passante per un assegnato asse ζ fissiamo i due punti A e B simmetrici rispetto a ζ. Diciamo ψ l'angolo secondo cui un punto P del semipiano di origine ζ e contenente A vede il segmento AB, θ l'angolo che detto semipiano forma con un fissato semipiano di origine ζ e poniamo:

$$\eta = \log \frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}.$$

Com'è noto, le tre quantità η, ψ, θ diconsi le *coordinate toroidali* di P. Si ha

$$0 \leq \eta < +\infty \quad , \quad -\pi < \psi \leq \pi \quad , \quad -\pi < \theta \leq \pi .$$

Quando $\eta \to 0$ il punto P si porta sull'asse ζ, mentre, per $\eta \to +\infty$, P tende ad un punto della circonferenza C descritta da A attorno a ζ. Chiameremo

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta del 9 aprile 1949.

(1) Cfr. M. PICONE, *Appunti di Analisi superiore.* [Rondinella (Napoli) 1947], vol. I, cap. II e cap IV.

tale circonferenza il *cerchio polare* del sistema di coordinate sopradetto e indicheremo il suo raggio con $a = \frac{1}{2}\overline{AB}$ e il suo centro con O. La superficie di equazione $\eta =$ costante è un toro circolare, che chiameremo *toro di parametro* η *e cerchio polare* C.

L'equazione di Laplace $\Delta_2 u = 0$, impiegando il sistema di coordinate curvilinee (η, φ, θ), si scrive al modo seguente

$$(1) \qquad \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\operatorname{senh}\eta}{\cosh\eta - \cos\psi}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{\operatorname{senh}\eta}{\cosh\eta - \cos\psi}\frac{\partial u}{\partial \psi}\right) + \\ + \frac{1}{(\cosh\eta - \cos\psi)\operatorname{senh}\eta}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

Fissata la quantità positiva η_0, consideriamo il dominio toroidale D definito dalla limitazione $\eta \geqq \eta_0$. Sia $u(P)$ una funzione continua in D e armonica nell'interno. Posto:

$$u = v(\cosh\eta - \cos\psi)^{\frac{1}{2}},$$

dalla (1) si trae

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \psi^2} + \frac{1}{\operatorname{senh}^2\eta}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \coth\eta\frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{1}{4}v = 0$$

che, operato il cambiamento di variabile $\rho = \cosh\eta$, si scrive

$$(2) \qquad (\rho^2 - 1)\frac{\partial^2 v}{\partial \rho^2} + 2\rho\frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 v}{\partial \psi^2} + \frac{1}{\rho^2 - 1}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{4}v = 0.$$

Se poniamo

$$V(\rho) = \int_{-\pi}^{\pi} d\psi \int_{-\pi}^{\pi} v(\rho, \psi, \theta)\, d\theta$$

dalla (2) si trae

$$\frac{d}{d\rho}\left[(\rho^2 - 1)\frac{dV}{d\rho}\right] + \frac{1}{4}V = 0.$$

Tale equazione, com'è ben noto, ha come integrali indipendenti le due funzioni di Legendre $P_{-\frac{1}{2}}(\rho)$, $Q_{-\frac{1}{2}}(\rho)$ di parametro $-\frac{1}{2}$, alle quali si può dare, dette p e q due costanti, la seguente rappresentazione integrale [2]

$$P_{-\frac{1}{2}}(\rho) = p\int_0^{\pi}\frac{dt}{\rho + \cos t\sqrt{\rho^2 - 1}} \quad ; \quad Q_{-\frac{1}{2}}(\rho) = q\int_0^{+\infty}\frac{dt}{\rho + \cosh t\sqrt{\rho^2 - 1}}.$$

Poichè si ha

$$\lim_{\rho \to +\infty} P_{-\frac{1}{2}}(\rho) = \infty \quad , \quad \lim_{\rho \to +\infty} Q_{-\frac{1}{2}}(\rho) = 0,$$

(2) Cfr. Hobson, *Spherical and ellipsoidal harmonics*. Cambridge (1931), p. 437.

si deduce che deve essere, detta k una costante

$$V(\rho) = k\, Q_{-\frac{1}{2}}(\rho)$$

cioè

$$\frac{1}{Q_{-\frac{1}{2}}(\cosh\eta)} \int_{-\pi}^{\pi} d\psi \int_{-\pi}^{\pi} u(\eta, \theta, \psi)\,(\cosh\eta - \cos\psi)^{-\frac{1}{2}}\, d\theta = k\ (3).$$

Ma la funzione $Q_{-\frac{1}{2}}(\cosh\eta)$ ha come valore asintotico – quando $\eta \to +\infty$ – $e^{-\frac{1}{2}\eta}$ (4), per cui indicati con $U(\theta)$ i valori che la funzione u assume sul cerchio polare C si deduce:

$$\lim_{\eta\to+\infty} \frac{1}{Q_{-\frac{1}{2}}(\cosh\eta)} \int_{-\pi}^{\pi} d\psi \int_{-\pi}^{\pi} u(\eta, \psi, \theta)\,(\cosh\eta - \cos\psi)^{-\frac{1}{2}}\, d\theta = 2\sqrt{2}\,\pi \int_{-\pi}^{\pi} U(\theta)\, d\theta.$$

Poichè l'elemento superficiale $d\sigma$ del toro di parametro η è dato da

$$d\sigma = \frac{a^2 \operatorname{senh}\eta}{[\cosh\eta - \cos\psi]^2}\, d\psi\, d\theta$$

si perviene al seguente teorema

I. *Posto*

$$\mu(P) = \frac{(\cosh\eta - \cos\psi)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{2}\,\pi a\, Q_{-\frac{1}{2}}(\cosh\eta)},$$

(3) Più in generale, se si pone $V_{mn}(\rho) = \int_{-\pi}^{\pi} d\psi \int_{-\pi}^{\pi} v(\rho, \psi, \theta)\, e^{-i(n\psi + m\theta)}\, d\theta$, si deducono le seguenti *proprietà integrali* per la funzione v

$$V_{mn}(\rho) = h_{mn}\, P^{|m|}_{|n|-\frac{1}{2}}(\rho) + k_{mn}\, Q^{|m|}_{|n|-\frac{1}{2}}(\rho).$$

Assegnata su $\mathfrak{F}D$ la funzione continua $F(\psi, \theta) = f(\psi, \theta)\,(\cosh\eta_0 - \cos\psi)^{\frac{1}{2}}$, la soluzione del problema di DIRICHLET per l'equazione $\Delta_2 u = 0$ in D, posto $\rho_0 = \cosh\eta_0$, è data dalla formola

$$u\cdot(\rho - \cos\psi)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{0}^{\infty}{}_{mn} \frac{Q^{|m|}_{|n|-\frac{1}{2}}(\rho)}{Q^{|m|}_{|n|-\frac{1}{2}}(\rho_0)}\, \lambda_{hk} \int_{-\pi}^{\pi} d\psi \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi', \theta') \cos[n(\psi' - \psi)] \cos[m(\theta' - \theta)\, d\theta]$$

con $\lambda_{00} = \frac{1}{4}$, $\lambda_{0n} = \lambda_{m0} = \frac{1}{2}$, $\lambda_{mn} = 1$ per $mn > 0$.

Poichè la serie al secondo membro - per $\rho = \rho_0$ - sommata col procedimento di FÉJER, converge uniformemente verso $f(\psi, \theta)$, in virtù del teorema di HARNACK si deduce immediatamente il teorema di esistenza per il problema di DIRICHLET nel dominio toroidale D.

(4) Cfr. HOBSON, loc. cit., p. 436.

se $u(P)$ *è continua nel dominio limitato dal toro* $\tau(\eta_0)$ *di parametro* η_0 *e cerchio polare* C *e armonica nell'interno, comunque si assuma* $\eta \geqq \eta_0$, *si ha*

$$\int_C U(s)\, ds = \iint_{\tau(\eta)} \mu(P)\, u(P)\, d\sigma,$$

avendo indicato con $U(s)$ *i valori in funzione dell'arco* s *che* u *assume su* C.

Supponiamo ora che $u(P)$ sia armonica all'esterno del toro $\tau(\eta_0)$ di parametro η_0 e infinitesima all'infinito, riuscendo continua anche su $\tau(\eta_0)$.

Ragionando come in precedenza, poichè si ha

$$\lim_{\rho \to 1} P_{-\frac{1}{2}}(\rho) = \pi \quad , \quad \lim_{\rho \to 1} Q_{-\frac{1}{2}}(\rho) = \infty,$$

deduciamo

$$V(\rho) = k\, P_{-\frac{1}{2}}(\rho),$$

cioè

$$\frac{1}{P_{-\frac{1}{2}}(\cosh \eta)} \int_{-\pi}^{\pi} d\psi \int_{-\pi}^{\pi} u(\eta, \psi, \theta)\, (\cosh \eta - \cos \psi)^{-\frac{1}{2}}\, d\psi = k.$$

Introdotto sull'asse z un sistema di ascisse avente origine O, diciamo z l'ascissa della proiezione su detto asse, del punto $P(\eta, \psi, \theta)$. Con facile calcolo si ottiene

$$z = \frac{a \operatorname{sen} \psi}{\cosh \eta - \cos \psi}. \tag{3}$$

Detta poi r la distanza di P dall'asse z, si ha

$$r = \frac{a \operatorname{senh} \eta}{\cosh \eta - \cos \psi}.$$

Per $\eta \leqq \eta_0$ si ha

$$|u(P)| \leqq \frac{A}{OP} = \frac{A}{\sqrt{r^2 + z^2}},$$

mentre nell'insieme dei punti esterni a $\tau(\eta_0)$ e contenuti nella sfera di centro O e raggio a – cioè l'insieme dei punti pei quali riesce $\eta < \eta_0$, $\frac{\pi}{2} \leqq |\psi| \leqq \pi$ – si ha

$$|u(P)| \leqq \frac{A}{a}.$$

Con A si è indicata una conveniente costante positiva. Avremo allora, se $0 \leqq |\psi| \leqq \frac{\pi}{2}$, $0 \leqq \eta \leqq \eta_0$

$$\left| \frac{u(\eta, \psi, \theta)}{(\cosh \eta - \cos \psi)^{\frac{1}{2}}} \right| \leqq \frac{A}{a} \left(\frac{\cosh \eta - \cos \psi}{\operatorname{senh}^2 \eta + \operatorname{sen}^2 \psi} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{A}{a} \frac{1}{(\cosh \eta + \cos \psi)^{\frac{1}{2}}} \leqq$$

$$\leqq \frac{A}{a} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\cos \frac{\psi}{2}} \leqq \frac{A}{a},$$

e per $\frac{\pi}{2} \leq |\psi| \leq \pi$ e $0 \leq \eta \leq \eta_0$

$$\left| \frac{u(\eta, \psi, \theta)}{(\cosh \eta - \cos \psi)^{\frac{1}{2}}} \right| \leq \frac{A}{a} \frac{1}{(1 - \cos \psi)^{\frac{1}{2}}} = \frac{A}{a} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\psi}{2}} \leq \frac{A}{a}.$$

Detti $\bar{u}(\psi) \equiv U(\zeta)$ i valori assunti da u sull'asse ζ, abbiamo, potendo per le limitazioni ottenute passare al limite sotto il segno d'integrale e tenendo presente la (3)

$$\lim_{\eta \to 0} \int_{-\pi}^{\pi} d\psi \int_{-\pi}^{\pi} u(\eta, \psi, \theta) (\cosh \eta - \cos \psi)^{-\frac{1}{2}} d\theta =$$

$$= 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} \bar{u}(\psi) (1 - \cos \psi)^{-\frac{1}{2}} d\psi = 4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(\zeta)}{\sqrt{1 + \zeta^2}} d\zeta.$$

Si perviene così al seguente teorema

Se $u(P)$ è armonica all'esterno del toro di parametro η_0 e infinitesima all'infinito, posto

$$\nu(P) = \frac{(\cosh \eta - \cos \psi)^{\frac{1}{2}}}{4 a^2 \operatorname{senh}^2 \eta \, P_{-\frac{1}{2}}(\cosh \eta)},$$

comunque si assuma $\eta \leq \eta_0$ si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(\zeta)}{\sqrt{1 + \zeta^2}} d\zeta = \iint_{\tau(\eta)} \nu(P) u(P) d\sigma.$$

Analisi matematica. — *Un nuovo metodo per l'integrazione dei problemi di propagazione.* Nota di SANDRO FAEDO, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

1. Sono ben noti i metodi di W. Ritz (1) e delle minime potenze ponderate di M. Picone per la risoluzione dei problemi di equilibrio della Fisica-Matematica. M. Picone ha poi allargato questo Suo procedimento ai problemi di propagazione, dando così origine al *metodo variazionale*, che è stato applicato con successo a numerosi problemi, presentatisi all'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

È opportuno notare che la teoria del metodo variazionale non è ancora stata sviluppata; si sono però superate alcune questioni essenziali che stanno alla base di tale teoria.

(*) Nella seduta del 9 aprile 1949.

(1) Rinvio per la bibliografia alla mia Memoria cit. in (2).

In una mia Memoria [2] in corso di stampa è esposto un nuovo procedimento, che è detto *metodo dei momenti*, per lo studio dei problemi di propagazione e di cui vengono poste le linee fondamentali della teoria, relativamente al problema che si considererà nel n. 2.

La posizione del metodo dei momenti è la seguente: esso sta a quello di Ritz nella stessa relazione del metodo variazionale rispetto a quello delle minime potenze ponderate.

In questa Nota si riassumono i principali risultati della Memoria già citata.

2. Sulla semistriscia (S) del piano xt definita da $0 \leq x \leq c$ $t \geq 0$, è data l'equazione

$$(1) \qquad L[u] = -u_{xx} + a_1 u_{xt} + a_2 u_{tt} + a_3 u_x + a_4 u_t + a_5 u = f,$$

dove i coefficienti a_i e il termine noto f sono funzioni di x e t definite in (S). *Si cerca una soluzione di* (1) *nella classe* C *delle funzioni* $u(x,t)$ *continue in* (S) *con le derivate parziali dei primi due ordini e tali che sia*

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 & u(c,t) = 0 \\ u(0,x) = 0 & u_t(0,x) = 0 \end{cases} [3].$$

Per applicare il metodo dei momenti al problema considerato si sceglie dapprima un sistema di funzioni $\{\varphi_i(x)\}$ $(i = 1, 2 \cdots)$ definite e continue in $(0,c)$ con le derivate prima e seconda con

$$\varphi_i(0) = 0 \quad , \quad \varphi_i(c) = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots);$$

inoltre il sistema $\{\varphi_i(x)\}$ deve soddisfare alla seguente condizione di completezza:

Se $u(x,t)$ è una *qualunque* funzione della classe C si devono poter determinare le funzioni $h_{i,n}(t)$ continue per $t \geq 0$ con le derivate prima e seconda, con $h_{i,n}(0) = 0$ e $h'_{i,n}(0) = 0$ e tali che, posto

$$u^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} h_{i,n}(t)\,\varphi_i(x) \qquad (n = 1, 2, \cdots),$$

$u^{(n)}(x,t)$ e le sue derivate parziali dei primi due ordini per $n \to \infty$ convergano in media su ogni rettangolo (S_T) $(0 \leq x \leq c, 0 \leq t \leq T)$ alla $u(x,t)$ e alle corrispondenti derivate.

Ciò premesso, *l'n^{ma} approssimazione* $u_n(x,t)$ *del metodo dei momenti* si ha ponendo

$$u_n(x,t) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,n}(t)\,\varphi_i(x),$$

(2) S. Faedo, *Un nuovo metodo per l'analisi esistenziale e quantitativa dei problemi di propagazione*, « Annali Scuola Normale Superiore di Pisa », ser. III, vol. I.

(3) Nella Memoria cit. in (2) si considerano le condizioni più generali $u(0,t) = f_1(t)$, $u(c,t) = f_2(t)$, $u(0,x) = g(x)$, $u_t(0,x) = g_1(x)$, dove i secondi membri sono funzioni assegnate.

dove le $c_{i,n}(t)$ si ottengono come soluzione del sistema differenziale lineare

$$\begin{cases} \int_0^c \{ L[u_n] - f \} \varphi_i(x)\, dx = 0 \\ c_{i,n}(0) = 0 \ , \ c'_{i,n}(0) = 0 . \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

Si dimostra che se è in (S) $a_2(x,t) > 0$, le $c_{i,n}(t)$ esistono e sono univocamente determinate.

3. Si stabilisce dapprima il

TEOREMA DI UNICITÀ. – *Se i coefficienti a_i della equazione* (1) *sono funzioni continue in* (S) *con le derivate* $\frac{\partial a_1}{\partial x}$ *e* $\frac{\partial a_2}{\partial t}$ *ed è* $a_2 > 0$, *l'equazione* (1) *ha al più una sola soluzione nella classe* C.

Assicurata l'unicità della soluzione, basta sapere che questa esiste perchè il metodo dei momenti fornisca una successione convergente alla soluzione; più precisamente si ha il

TEOREMA DI CONVERGENZA. – *Nelle ipotesi del teorema di unicità e se la* (1) *possiede la soluzione $u(x,t)$ nella classe* C, *allora la successione $u_n(x,t)$ delle approssimazioni del metodo dei momenti converge uniformemente in ogni* (S_T) *alla $u(x,t)$.*

Per liberarsi dell'ipotesi ora fatta dell'esistenza della soluzione, si dà il seguente

TEOREMA D'ESISTENZA. – *Se i coefficienti a_i e il termine noto f della equazione* (1) *sono funzioni continue in* (S) *con le loro derivate prima e seconda rispetto a t; se esiste continua in* S *la* $\frac{\partial a_1}{\partial x}$, *mentre gli altri coefficienti a_i $(i = 2, \cdots, 5)$ e il termine noto f hanno derivata continua rispetto ad x per $t = 0$ ed è in* (S) $a_2 > 0$; *se è verificata la condizione (necessaria) $f(0,0) = 0$, $f(c,0) = 0$; allora la* (1) *ha nella classe* C *una soluzione $u(x,t)$ (e una sola). Inoltre, le derivate u_n e u_{xt} sono assolutamente continue secondo Tonelli in ogni* (S_T).

Se nel teorema di convergenza si fanno ulteriori ipotesi sia sul sistema $\{\varphi_i(x)\}$ che sui coefficienti della (1), si può ottenere che alcune derivate della $\{u_n(x,t)\}$ convergano alle corrispondenti derivate della $u(x,t)$. In particolare si ha il teorema:

Nelle ipotesi del teorema di esistenza e se si sceglie il particolare sistema

$$\varphi_i(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi_i x}{c} \qquad (i = 1, 2, \cdots)$$

la successione $u_n(x,t)$ delle approssimazioni del metodo dei momenti converge uniformemente in ogni (S_T), *insieme a*

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} , \frac{\partial u_n}{\partial t} , \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} , \frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial t} ,$$

alla soluzione $u(x,t)$ *e alle corrispondenti derivate. Invece la* $\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$ *converge in media su* $(0,c)$ *per ogni* $t \geqq 0$ *alla* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Si dà anche un teorema che permette (nelle ipotesi del teorema di esistenza) di maggiorare in (S) il valore assoluto della soluzione $u(x,t)$ e delle sue derivate dei primi due ordini mediante funzioni che si ottengono esplicitamente dai coefficienti e dal termine noto della (1). Vengono inoltre confrontati fra loro il metodo variazionale e quello dei momenti.

Geometria. — *Sulle varietà riemanniane normali a tre dimensioni.* Nota di Angelo Tonolo, presentata(*) dal Socio F. Severi.

In una ricerca, in corso di pubblicazione negli « Annali di matematica », ho caratterizzato tutte le deformazioni di un mezzo continuo nelle quali le facce del triedro principale di deformazione, relativo ad un qualsiasi punto del corpo, sono tangenti a tre famiglie di superficie che risultano necessariamente ortogonali due a due. A questo problema della meccanica dei mezzi continui, si può far corrispondere una quistione analoga spettante alla Geometria differenziale metrica delle varietà riemanniane a tre dimensioni. Basta infatti ricordare che ad ogni punto di una tale varietà è associata una terna (almeno) di giaciture mutuamente ortogonali, alle quali competono curvature riemanniane stazionarie rispetto alle circostanti. Però, in generale, tali giaciture non sono tangenti ad un sistema triplo di superficie necessariamente ortogonali due a due; in altre parole, le congruenze principali della varietà [congruenze, cioè, le cui linee sono rispettivamente perpendicolari alle suddette giaciture], non sono *normali*. Il Bianchi (1) chiamava *varietà normali* quelle nelle quali si verifica la circostanza segnalata. Per queste, e soltanto per queste, è possibile allora, con le linee delle tre congruenze principali, costruire (almeno) un sistema triplo di superficie ortogonali. Sorge pertanto spontaneo il problema di caratterizzare tutte quelle varietà a tre dimensioni nelle quali le congruenze principali sono normali.

Nel caso delle V_3 rappresentabili conformemente sullo spazio euclideo, la quistione è stata da me risolta alcuni anni or sono (2). Un giudizioso trasporto del metodo ivi esposto alle generiche varietà riemanniane, mi ha permesso di arrivare a tre equazioni geometriche, ove figurano soltanto invarianti della V_3 e loro derivate intrinseche, le quali, quando sono soddisfatte, e soltanto in questo caso, permettono di affermare che la corrispondente V_3 è normale. Queste tre

(*) Nella seduta del 9 aprile 1949.

(1) L. Bianchi, *Sui sistemi tripli coniugati con una famiglia di superficie applicabili sopra quadriche.* « Annali di matematica », ser. II, t. XXIII (1914); *Sugli spazi normali a tre dimensioni colle curvature principali costanti.* « Rendiconti dell'Accademia dei Lincei », ser. 5ª, t. XXV (1916).

(2) *Determinazione di una classe di varietà riemanniane normali a tre dimensioni.* « Istituto Lombardo di Scienze e Lettere », vol. LXXIV (1940–41).

equazioni possono essere sottoposte ad una trasformazione, in virtù della quale gli invarianti in discorso vengono sostituiti da altri tre, costruiti con le componenti del tensore fondamentale e le derivate covarianti del tensore doppio di Ricci, che nelle V_3 sostituisce con vantaggio quello quadruplo di Riemann. In definitiva, le equazioni caratteristiche delle varietà riemanniane normali a tre dimensioni, contengono le componenti del tensore fondamentale e loro derivate parziali ordinarie fino a quelle del terz'ordine.

In questa Nota espongo soltanto la parte concettuale del metodo e i risultati ottenuti, lasciando in una dettagliata esposizione, che sarà pubblicata altrove, lo sviluppo per disteso dei ragionamenti e dei calcoli che essi esigono per ottenerli.

1. PRELIMINARI. – Sia $(\beta, \lambda, \mu, \nu, \rho, \sigma, \tau, \omega ; h, i, j, k = 1, 2, 3)$

$$ds^2 = a_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu \tag{1}$$

l'espressione del quadrato dell'elemento lineare di una varietà riemanniana V_3 a tre dimensioni con riferimento alle variabili x^λ. Denotiamo con $\alpha_{\mu\nu}$ le componenti del tensore covariante simmetrico di Ricci, che nelle V_3 sostituisce con vantaggio il tensore quadruplo di Riemann. Supporremo che tale varietà abbia distinte le sue tre curvature principali, cioè faremo l'ipotesi che siano semplici le tre radici dell'equazione di terzo grado in ρ

$$\| \alpha_{\mu\nu} - \rho a_{\mu\nu} \| = 0 . \tag{2}$$

In tale ipotesi, il sistema di equazioni lineari ed omogenee nelle incognite $\underset{h}{\chi}{}^\nu$

$$(\alpha_{\mu\nu} - \rho_h\, a_{\mu\nu})\, \underset{h}{\chi}{}^\nu = 0, \qquad (\mu = 1, 2, 3), \tag{3}$$

ammette, per ogni radice ρ_h della (2), una e una sola soluzione $\underset{h}{\chi}{}^\nu = \underset{h}{\lambda'}{}^\nu$, ove le $\underset{h}{\lambda'}{}^\nu$ sono vincolate dalle relazioni

$$\underset{h}{\lambda'}{}^\mu\, \underset{k}{\lambda'_\mu} = \delta_{hk} \quad , \quad \underset{h}{\lambda'_\mu} = a_{\mu\nu}\, \underset{h}{\lambda'}{}^\nu , \tag{4}$$

essendo δ_{hk} il noto simbolo di Kronecker.

Le (4) sono equivalenti alle seguenti

$$\underset{h}{\lambda'_\mu}\, \underset{h}{\lambda'}{}^\nu = \delta^\nu_\mu ,$$

nelle quali le δ^ν_μ hanno lo stesso valore delle $\delta_{\mu\nu}$.

Le tre congruenze individuate dai parametri $\underset{h}{\lambda'}{}^\nu$, o dai momenti $\underset{h}{\lambda'_\nu}$, si chiamano le *congruenze principali della varietà* V_3. L'insieme delle tre congruenze verrà in seguito indicato con Λ'.

Per il seguito, è opportuno trasformare le identità

$$(\alpha_{\mu\nu} - \rho_h\, a_{\mu\nu})\, \underset{h}{\lambda'}{}^\nu = 0, \qquad (\mu = 1, 2, 3). \tag{5}$$

A tale scopo, associamo alla terna principale Λ' una seconda terna di congruenze mutuamente ortogonali, comunque scelta in V_3, che denoteremo con Λ,

i cui parametri e momenti verranno indicati rispettivamente con λ^{ν}_{h}, λ_{ν}: avremo intanto le relazioni

$$\lambda^{\mu}_{h}\,\lambda_{\mu}\,_{k} = \delta_{hk} \quad , \quad \lambda_{\mu}\,_{h}\,\lambda^{\nu}_{h} = \delta^{\nu}_{\mu} .$$

Designiamo rispettivamente con $[h]$, $[h']$ le congruenze delle due terne Λ e Λ', con h, h' le linee di queste congruenze passanti per un medesimo punto di V_3, e infine con β_{hk} i coseni degli angoli formati dalle linee delle due terne; precisamente, β_{hk} indica il coseno dell'angolo che la linea h' forma con la linea k, passanti per uno stesso punto di V_3, avendo naturalmente fissato sulle due linee un verso come positivo. Si ha

$$\beta_{hk} = \lambda'^{\mu}_{h}\,\lambda_{\mu}\,_{k} . \tag{6}$$

Avendosi

$$\lambda_{\mu}\,_{h} = a_{\mu\nu}\,\lambda^{\nu}_{h} ,$$

si ottiene

$$a_{\mu\nu} = \lambda_{\mu}\,_{h}\,\lambda_{\nu}\,_{h} . \tag{7}$$

Introduciamo gli invarianti di Ricci ω_{hk} definiti dalle posizioni

$$\alpha_{\mu\nu} = \omega_{ij}\,\lambda_{\mu}\,_{i}\,\lambda_{\nu}\,_{j} . \tag{8}$$

Dalle identità (5) si traggono allora le altre

$$\omega_{kj}\,\beta_{hj} - \rho_{h}\,\beta_{hk} = 0 , \qquad (k = 1, 2, 3). \tag{5'}$$

Pertanto le ρ_h sono anche radici dell'equazione

$$\| \omega_{hk} - \rho\,\delta_{hk} \| = 0 . \tag{9}$$

Nelle varietà riemanniane a tre dimensioni i coefficienti di rotazione di Ricci delle due terne Λ' e Λ, che denotiamo con γ'_{hij}, γ_{hij}, sono in numero di nove; si può pertanto liberarsi dalla notazione a tre indici, per sostituirvi quella a due indici, ponendo (3)

$$\rho'_{hk} = \gamma'_{h+1\,h+2\,k} \quad , \quad \rho_{hk} = \gamma_{h+1\,h+2\,k} .$$

Per il seguito, conviene esprimere le ρ'_{hk} per le ρ_{hk}: un facile calcolo dà

$$\rho'_{hk} = \beta_{hj}\,[\beta_{hi}\,\rho_{ij} + \beta_{h+2\,i}\,\partial_j\,\beta_{h+1\,i}] , \tag{10}$$

ove ∂_j denota derivazione ordinaria rispetto all'arco σ_j della linea j appartenente alla congruenza $[j]$ della terna Λ.

2. Condizioni di normalità delle tre congruenze principali. Identità fondamentale. – In un generico punto P della V_3 consideriamo le tre linee h' che appartengono alle tre congruenze principali $[h']$ e le tre giaciture ad esse

(3) Ora, e nel seguito, faremo la convenzione di considerare equivalenti gli indici che differiscono fra loro di tre, o di un multiplo di tre.

rispettivamente perpendicolari. In generale, questi tre piani non saranno tangenti in P a tre famiglie di superficie costituenti un sistema triplo ortogonali. Noi vogliamo caratterizzare, come dicemmo all'inizio della Nota, quelle varietà V_3 nelle quali invece si verifica tale circostanza, non solo nel punto P, ma in ogni altro punto della varietà. Per tali V_3, e solo per esse, accadrà che le linee delle congruenze principali formeranno le traiettorie ortogonali di un sistema triplo di superficie ortogonali, cioè le congruenze principali saranno *normali*.

Prendiamo in considerazione la congruenza $[i']$ e ricordiamo che essa è normale solo e soltanto quando è nullo l'invariante

$$r'_i = \rho'_{i+1\,i+1} + \rho'_{i+2\,i+2}. \tag{11}$$

Ponendo nel secondo membro della (11) le espressioni $\rho'_{i+1\,i+1}$, $\rho'_{i+2\,i+2}$, ricavate dalla (10), otteniamo

$$\begin{cases} r'_i = \beta_{ik}\,[\partial_{k+2}\,\beta_{ik+1} - \partial_{k+1}\,\beta_{ik+2}] + \Gamma_{kk}\,\beta^2_{ik} + \Gamma_{kk+1}\,\beta_{ik}\,\beta_{ik+1}, \\ \Gamma_{kk} = \rho_{k+1\,k+1} + \rho_{k+2\,k+2} \quad , \quad -\Gamma_{kk+1} = \rho_{kk+1} + \rho_{k+1\,k}. \end{cases} \tag{12}$$

Consideriamo i due determinanti

$$G = \| g_{hk} \|, \tag{13}$$

$$\Omega = \| \omega_{hk} \|, \tag{14}$$

$$g_{hk} = \omega_{hk} - \rho\,\delta_{hk}, \tag{15}$$

e designiamo con G_{hk}, Ω_{hk} rispettivamente il complemento algebrico dell'elemento g_{hk}, ω_{hk} dei due determinanti G e Ω. Indi poniamo

$$K'_\varrho = G_{hk}\,[\partial_{k+2}\,G_{hk+1} - \partial_{k+1}\,G_{hk+2}], \tag{16}$$

$$K''_\varrho = \Gamma_{hh}\,G^2_{hk} + \Gamma_{hh+1}\,G_{hk}\,G_{hk+1}, \tag{17}$$

$$K_\varrho = K'_\varrho + K''_\varrho. \tag{18}$$

In queste posizioni la ρ va pensata funzione invariante delle x^λ, *a priori* arbitraria.

Se al posto della G_{hk} si pongono le loro esplicite espressioni, si osserva che nella funzione K'_ϱ non figurano le derivate della ρ; si ha

$$K'_\varrho = I'_1\,\rho^2 + 2\,I'_2\,\rho + I'_3, \tag{19}$$

ove

$$I'_1 = \omega_{hk}\,\psi_{hk} \quad , \quad I'_2 = \Omega_{hk}\,\psi_{hk} \quad , \quad I'_3 = \Omega_{hk}\,\Psi_{hk},$$

$$\psi_{hk} = \partial_{k+2}\,\omega_{hk+1} - \partial_{k+1}\,\omega_{hk+2} \quad , \quad \Psi_{hk} = \partial_{k+2}\,\Omega_{hk+1} - \partial_{k+1}\,\Omega_{hk+2}.$$

Se nella (17) eseguiamo la stessa sostituzione ed effettuiamo il calcolo, si trova per K''_ϱ un polinomio di quarto grado nella ρ; ma se, come accadrà nei ragionamenti seguenti, la funzione ρ è una radice ρ_i dell'equazione (9), allora questo polinomio, per $\rho = \rho_i$, si trasforma in uno di secondo grado in ρ_i, e propriamente nel seguente:

$$K''_{\varrho_i} = I''_1\,\rho_i^2 + 2\,I''_2\,\rho_i + I''_3,$$

ove

$$\left\{\begin{aligned}
I_1'' &= \omega_{hi}\,[(\rho_{i+1\,i+1}+\rho_{i+2\,i+2})\,\omega_{hi}+\rho_{h+1\,i+2}\,\omega_{h+2\,i+1}+\rho_{h+2\,i+1}\,\omega_{h+1\,i+2}-\\
&\quad-\rho_{ii+1}\,\omega_{hi+1}-\rho_{ii+2}\,\omega_{hi+2}-\rho_{h+1\,i+1}\,\omega_{h+2\,i+2}-\rho_{h+2\,i+2}\,\omega_{h+1\,i+1}],\\
I_2'' &= \Omega_{hi}\,[(\rho_{i+1\,i+1}+\rho_{i+2\,i+2})\,\omega_{hi}+\rho_{h+1\,i+2}\,\omega_{h+2\,i+1}+\rho_{h+2\,i+1}\,\omega_{h+1\,i+2}-\\
&\quad-\rho_{ii+1}\,\omega_{hi+1}-\rho_{ii+2}\,\omega_{hi+2}-\rho_{h+1\,i+1}\,\omega_{h+2\,i+2}-\rho_{h+2\,i+2}\,\omega_{h+1\,i+1}],\\
I_3'' &= \Omega_{hi}\,[(\rho_{i+1\,i+1}+\rho_{i+2\,i+2})\,\Omega_{hi}+\rho_{h+1\,i+2}\,\Omega_{h+2\,i+1}+\rho_{h+2\,i+1}\,\Omega_{h+1\,i+2}-\\
&\quad-\rho_{ii+1}\,\Omega_{hi+1}-\rho_{ii+2}\,\Omega_{hi+2}-\rho_{h+1\,i+1}\,\Omega_{h+2\,i+2}-\rho_{h+2\,i+2}\,\Omega_{h+1\,i+1}].
\end{aligned}\right.$$

Infine, introducendo le derivate intrinseche, con riferimento alla terna Λ di congruenze, i parametri di derivazione essendo naturalmente le ρ_{hk}, si ricavano le formule definitive

$$\left\{\begin{aligned}
(20)\qquad I_1 &= I_1' + I_1'' = \omega_{hk}\,[\nabla_{k+2}\,\omega_{hk+1}-\nabla_{k+1}\,\omega_{hk+2}],\\
(21)\qquad I_2 &= I_2' + I_2'' = \Omega_{hk}\,[\nabla_{k+2}\,\omega_{hk+1}-\nabla_{k+1}\,\omega_{hk+2}],\\
(22)\qquad I_3 &= I_3' + I_3'' = \Omega_{hk}\,[\nabla_{k+2}\,\Omega_{hk+1}-\nabla_{k+1}\,\Omega_{hk+2}].
\end{aligned}\right.$$

Si dimostra che fra gli invarianti K_{ϱ_i}, I_1, I_2, I_3 ha luogo l'identità fondamentale (4)

$$K_{\varrho_i} = I_1\,\rho_i^2 + 2\,\rho_i + I_3\,.$$

3. Equazioni caratteristiche delle V_3 normali. – Abbiamo supposto distinte le tre curvature della V_3: fissiamone una, per esempio, la ρ_i: allora la matrice $\| \omega_{hk} - \rho_i\,\delta_{hk} \|$ ha per caratteristica due, e quindi i complementi algebrici $G_{hj}^{(i)}$ degli elementi $g_{hj}^{(i)}$ di una riga del determinante $G^{(i)}$ dato dalla (13) per $\rho = \rho_i$, sono proporzionali a quelli di una sua qualsiasi altra riga. Dalle (5$_1$) ricaviamo allora

$$(23)\qquad m_h^{(i)}\,\beta_{ij} = G_{hj}^{(i)},$$

ove le $m_h^{(i)}$ sono scelte in modo che si abbia

$$\beta_{i1}^2 + \beta_{i2}^2 + \beta_{i3}^2 = 1\,.$$

Ricordiamo, come del resto si verifica subito, che valgono anche le identità

$$\beta_{ik}\,\beta_{jk} = 0, \qquad (i \neq j).$$

Consideriamo le funzioni

$$(24)\qquad \begin{aligned} H_{\varrho_i} = m_h^{(i)}\,\beta_{ik}\,[\partial_{k+2}\,m_h^{(i)}\,\beta_{ik+1} - \partial_{k+1}\,m_h^{(i)}\,\beta_{ik+2}] + \\ + [\Gamma_{kk}\,\beta_{ik}^2 + \Gamma_{kk+1}\,\beta_{ik}\,\beta_{ik+1}]\,m_h^{(i)\,2}, \qquad (i = 1,2,3). \end{aligned}$$

(4) Negli spazi euclidei riferiti a coordinate cartesiane ortogonali, l'identità diventa quella segnalata da J. Weingarten nella Memoria: *Zur Theorie der isostatischen Flächen*. « Journal für reine und angewandte Mathematik », Band 90 (1881).

Si trova

$$H_{Q_i} = \{ \beta_{ik} [\partial_{k+2} \beta_{ik+1} - \partial_{k+1} \beta_{ik+2}] + \Gamma_{kk} \beta_{ik}^2 + \Gamma_{kk+1} \beta_{ik} \beta_{ik+1} \} m_h^{(i)2},$$

cioè, in forza delle (11),

$$H_{Q_i} = r_i' M \quad , \quad \text{con} \quad M = \Sigma_h m_h^{(i)2} \neq 0. \tag{25}$$

Sostituendo le (23) nelle (24), ricaviamo

$$H_{Q_i} = G_{hk}^{(i)} [\partial_{k+2} G_{hk+1}^{(i)} - \partial_{k+1} G_{hk+2}^{(i)}] + \Gamma_{kk} G_{hk}^{(i)2} + \Gamma_{kk+1} G_{hk}^{(i)} G_{hk+1}^{(i)},$$

cioè, per le (16), (17), (18) e per l'identità fondamentale,

$$H_{Q_i} = K_{Q_i} = I_1 \rho_i^2 + 2 I_2 \rho_i + I_3. \tag{26}$$

Se le congruenze principali $[h']$ sono normali, gli invarianti r_i' hanno valore nullo in tutta la V_3, quindi sono nulle ivi anche le funzioni H_{Q_i}, in virtù delle (25). Allora, per le (26), valgono le tre identità in ogni punto di V_3

$$I_1 \rho_i^2 + 2 I_2 \rho_i + I_3 = 0.$$

Questo significa che l'equazione di secondo grado in ρ

$$I_1 \rho^2 + 2 I_2 \rho + I_3 = 0$$

ammette tre radici distinte, che sono le ρ_i. Dobbiamo perciò avere identicamente in ogni punto della V_3

$$I_1 = 0, \qquad I_2 = 0, \qquad I_3 = 0. \tag{27} \tag{28} \tag{29}$$

Inversamente, se hanno luogo le (27), (28), (29), sono nulle tutte le K_{Q_i}, cioè le H_{Q_i}: sono nulle quindi le r_i' e perciò le congruenze principali $[h']$ sono normali.

Dunque, le equazioni caratteristiche delle varietà riemanniane normali a tre dimensioni sono

$$\omega_{hk} [\nabla_{k+2} \omega_{hk+1} - \nabla_{k+1} \omega_{hk+2}] = 0, \quad , \quad \Omega_{hk} [\nabla_{k+2} \omega_{hk+1} - \nabla_{k+1} \omega_{hk+2}] = 0 \quad ,$$
$$\Omega_{hk} [\nabla_{k+2} \Omega_{hk+1} - \nabla_{k+1} \Omega_{hk+2}] = 0.$$

4. TRASFORMAZIONE DELLE EQUAZIONI $I_1 = 0$, $I_2 = 0$, $I_3 = 0$. – Queste equazioni possono essere sottoposte ad una trasformazione in virtù della quale esse si cambiano in altre le quali esprimono l'annullarsi di tre invarianti costruiti con le componenti del tensore fondamentale $a_{\mu\nu}$ e con quelle del tensore doppio di Ricci $\alpha_{\mu\nu}$.

A questo scopo, denotiamo con $\varepsilon^{\varrho\mu\nu}$ le componenti del tensore ternario ε contravariante di Ricci e si ponga

$$\Phi^{\sigma\omega} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\varrho\mu\sigma} \varepsilon^{\tau\nu\omega} \alpha_{\varrho\tau} \alpha_{\mu\nu}. \tag{30}$$

In forza della definizione del tensore $\varepsilon^{\varrho\mu\nu}$, la funzione $\Phi^{\varrho\omega}$ è eguale al complemento algebrico dell'elemento $\alpha_{\varrho\omega}$ nel determinante $|\alpha_{\mu\nu}|$ diviso per il discriminante della forma (1). Il principio della saturazione degli indici porta alla conclusione che le (30) definiscono un tensore contravariante doppio simmetrico.

Introduciamo i seguenti tre invarianti

$$J_1 = a^{\varrho\omega}\,\alpha_{\beta\omega}\,\varepsilon^{\beta\mu\nu}\,\nabla_\nu\,\alpha_{\varrho\mu}\,, \qquad J_2 = a_{\beta\omega}\,\Phi^{\beta\varrho}\,\varepsilon^{\omega\mu\nu}\,\nabla_\nu\,\alpha_{\varrho\mu}\,,$$

$$J_3 = a_{\beta\varrho}\,\Phi^{\omega\beta}\,\varepsilon_{\omega\mu\nu}\,\nabla^\nu\,\Phi^{\varrho\mu}\,,$$

ove ∇_ν, ∇^ν indicano rispettivamente derivazione covariante e contravariante rispetto alla forma (1).

Le equazioni definitive, trasformate delle (27), (28), (29), sono

$$(27_1)\quad J_1 = 0\,, \qquad (28_1)\quad J_2 = 0\,, \qquad (29_1)\quad J_3 = 0\,.$$

Esse contengono le componenti $a_{\mu\nu}$ del tensore fondamentale e le loro derivate parziali ordinarie fino a quelle del terz'ordine rispetto alle variabili x^λ e sono caratteristiche delle varietà riemanniane normali a tre dimensioni.

Meccanica. — *Sulla matrice di Green di un problema di Elasticità Piana* (*). Nota di Wolf Gross, presentata (**) dal Socio M. Picone.

Nella trattazione dei problemi di Elasticità Piana si suole considerare quelli del calcolo delle deformazioni di una regione elastica, dovute ad una forza di direzione qualsivoglia, concentrata in un punto P del suo contorno ed equilibrata da convenienti forze distribuite sul contorno stesso e si ritiene (Love: *The Mathematical Theory of Elasticity*, pp. 209-211) che gli spostamenti in dette deformazioni debbano essere dotati di una *certa* singolarità nel punto P. Non constandomi che la presenza di tale singolarità sia stata effettivamente dimostrata, mi sono proposto, collaborando in alcuni studi in corso presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo, dietro incitamento del direttore dell'Istituto stesso prof. M. Picone, di pervenirvi costruendo, con tutto il rigore analitico, la matrice di Green relativa ad una deformazione di una regione elastica dovuta ad una distribuzione qualunque di forze sul suo contorno.

Nella presente Nota espongo i risultati ottenuti nel caso che detta regione sia circolare.

Si considera un cerchio di raggio R, soggetto a forze distribuite sul contorno in maniera continua. Siano $S(\varphi)$ e $T(\varphi)$ le loro componenti, normale e tangenziale, riferite all'unità di lunghezza. Inoltre siano u, v gli spostamenti radiale e tangenziale, σ_r, σ_φ e τ le componenti degli sforzi. Si considera il caso degli sforzi piani.

Le equazioni di equilibrio e quelle di Hooke danno, nell'interno,

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial r}(r\sigma_r) + \dfrac{\partial}{\partial \varphi}(\tau) - \sigma_\varphi = 0\,, \\ \dfrac{\partial}{\partial r}(r^2\tau) + \dfrac{\partial}{\partial \varphi}(r\sigma_\varphi) \qquad = 0\,, \end{cases}$$

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta del 12 marzo 1949.

$$\text{(II)}\qquad \begin{cases} E\,\dfrac{\partial u}{\partial r} = \sigma_r - \nu\sigma_\varphi, \\ \dfrac{E}{r}\left(\dfrac{\partial v}{\partial \varphi} + u\right) = \sigma_\varphi - \nu\sigma_r, \\ E\left(\dfrac{\partial v}{\partial r} - \dfrac{v}{r} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\right) = 2(1+\nu)\tau, \end{cases}$$

dove E e ν sono il modulo di Young e il coefficiente di Poisson. Sul contorno si ha

$$\text{(III)}\qquad \begin{cases} \sigma_r = S(\varphi), \\ \tau = T(\varphi), \end{cases} \quad \text{per} \quad r = R$$

dove le $S(\varphi)$ e $T(\varphi)$ soddisfano alle condizioni di equilibrio:

$$\text{(III')}\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{2\pi} [S(\varphi)\cos\varphi - T(\varphi)\sin\varphi]\,d\varphi = 0, \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} [S(\varphi)\,\mathrm{sen}\,\varphi + T(\varphi)\cos\varphi]\,d\varphi = 0, \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} T(\varphi)\,d\varphi = 0, \end{cases}$$

Data una qualunque funzione (reale) periodica, di periodo 2π, il suo sviluppo in serie di Fourier si può sempre porre nella forma [1]:

$$f = \frac{1}{2\pi}\left\{ f_0 + 2\,Re \sum_1^\infty f_n\, e^{inx} \right\}$$

essendo

$$f_n = \int_0^{2\pi} f(\theta)\, e^{-in\theta}\, d\theta$$

la trasformata di Fourier della f.

Per sveltire il calcolo, introduciamo la funzione di Airy F.

Gli sforzi si esprimono come segue:

$$\text{(IV)}\qquad \begin{cases} \sigma_r = \dfrac{1}{r^2}\,\dfrac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial F}{\partial r}, \\ \sigma_\varphi = \dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \\ \tau = -\dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial^2 F}{\partial \varphi\,\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\,\dfrac{\partial F}{\partial \varphi} \end{cases}$$

(1) Se f designa una funzione, con $Re\,f$ e $Im\,f$ si designano la parte reale ed il coefficiente dell'immaginario della f.

mentre per gli spostamenti si ha:

$$(V)\qquad \begin{cases} Eu = -(1+\nu)\dfrac{\partial F}{\partial r} + U, \\ Ev = -(1+\nu)\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial F}{\partial \varphi} + V, \end{cases}$$

$$(V')\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial V}{\partial \varphi} + U\right) = \Delta F \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial r} - \dfrac{V}{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial \varphi} = 0 \end{cases}$$

essendo

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

La F soddisfa all'equazione differenziale

$$(VI)\qquad \Delta\Delta F = 0$$

ed è indeterminata a meno di una funzione del tipo

$$(VI')\qquad Ar\cos\varphi + Br\sin\varphi + C.$$

Chiamando F_n la trasformata della F e s_n, t_n quelle delle $S(\varphi)$ e $T(\varphi)$ le (VI), (III), e (III') forniscono:

$$(VII)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{d^2}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr} - \dfrac{n^2}{r^2}\right)\left(\dfrac{d^2}{dr^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr} - \dfrac{n^2}{r^2}\right) F_n = 0 \\ RF_n' - n^2 F_n = R^2 s_n \\ RF_n' - n F_n = \dfrac{i}{n} R^2 t_n \quad \text{per} \quad r = R \\ s_1 = i t_1 \\ t_0 = 0. \end{cases}$$

Risolvendo si ha:

$$(VII')\qquad \begin{cases} F_n = a_n r^{n+2} + b_n r^n \\ a_n = +\dfrac{1}{2(n+1)R^n}(s_n + i t_n) \qquad n = 0, 1 \cdots \\ b_n = -\dfrac{1}{2n(n-1)R^{n-2}}\left[n s_n + (n-2) i t_n\right] \; n = 2, 3 \cdots \end{cases}$$

mentre b_0 e b_1 sono arbitrarie e si possono assumere nulle.

Sostituendo queste espressioni nello sviluppo di Fourier e ponendo:

$$\zeta = \frac{r}{R} e^{i(\varphi - \theta)}$$

si ha

$$F = \int_0^{2\pi} \Big\{ S(\theta)\, Re\Big[-R^2 \sum_2^{\sim} \frac{\zeta^n}{n-1} + r^2 \Big(\frac{1}{2} + \sum_1^{\sim} \frac{\zeta^n}{n+1} \Big) \Big] +$$

$$+ T(\theta)\, Im\Big[R^2 \Big(2\zeta + \sum_2^{\sim} \frac{n-2}{n(n-1)}\, \zeta^n \Big) - r^2 \sum_1^{\sim} \frac{\zeta^n}{n+1} \Big] \Big\} d\theta$$

dove si è aggiunto il termine $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T(\theta)\, Im(2R^2 \zeta)\, d\theta$, che è una espressione del tipo (VI'). Sommando la serie si ha:

$$F = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big\{ S(\theta)\, Re\Big[R^2 \zeta \ln(1-\zeta) - r^2 \Big(\frac{1}{2} + \frac{\ln(1-\zeta)}{\zeta} \Big) \Big] +$$

$$+ T(\theta)\, Im\Big[R^2 (\zeta - 2) \ln(1-\zeta) + r^2 \frac{\ln(1-\zeta)}{\zeta} \Big] \Big\} d\theta$$

e dopo la sostituzione della ζ

(IX)
$$\begin{cases} F = \int_0^{2\pi} \{ F^{(1)}(r, \varphi, \theta)\, S(\theta) + F^{(2)}(r, \theta, \varphi)\, T(\theta) \}\, R\, d\theta \\ \text{con} \\ F^{(1)} = -\frac{r^2}{4\pi R^2} + \frac{1}{\pi} R\, \Gamma \sin(\varphi - \theta), \\ F^{(2)} = \frac{1}{\pi} \Gamma [R - r\cos(\varphi - \theta)]. \end{cases}$$

dove

$$\Gamma = \operatorname{arctg} \frac{r \sin(\varphi - \theta)}{R - r\cos(\varphi - \theta)}.$$

Pongo inoltre:

$$\rho^2 = r^2 - 2rR\cos(\varphi - \theta) + R^2$$

Sostituendo questa espressione nelle (IV) si ottiene

(X)
$$\begin{cases} \sigma_r = \int_0^{2\pi} \{ S_r^{(1)}(r, \varphi, \theta)\, S(\theta) + S_r^{(2)}(r, \varphi, \theta)\, T(\theta) \}\, R\, d\theta, \\ \sigma_\varphi = \int_0^{2\pi} \{ S_\varphi^{(1)}(r, \varphi, \theta)\, S(\theta) + S_\varphi^{(2)}(r, \varphi, \theta)\, T(\theta) \}\, R\, d\theta, \\ \tau = \int_0^{2\pi} T^{(1)}(r, \varphi, \theta)\, S(\theta) + T^{(2)}(r, \varphi, \theta)\, T(\theta) \}\, R\, d\theta, \end{cases}$$

con:

$$S_r^{(1)} = -\frac{1}{2\pi R} + \frac{2}{\pi\rho^4}[r - R\cos(\varphi-\theta)]^2 [R - r\cos(\varphi-\theta)],$$

$$S_\varphi^{(1)} = -\frac{1}{2\pi R} + \frac{2R^2}{\pi\rho^4}[R - r\cos(\varphi-\theta)]\sin^2(\varphi-\theta),$$

$$T^{(1)} = \frac{2R}{\pi\rho^4}[R - r\cos(\varphi-\theta)][r - R\cos(\varphi-\theta)]\sin(\varphi-\theta),$$

$$S_r^{(2)} = -\frac{2r}{\pi\rho^4}[r - R\cos(\varphi-\theta)]^2\sin(\varphi-\theta),$$

$$S_\varphi^{(2)} = -\frac{2R^2 r}{\rho^4}\sin^3(\varphi-\theta),$$

$$T^{(2)} = -\frac{2Rr}{\pi\rho^4}[r - R\cos(\varphi-\theta)]\sin^2(\varphi-\theta).$$

Per le u, v si ha dalle (V) e (V'), dopo un calcolo un po' laborioso

$$\text{(XI)}\quad \begin{cases} u = \int_0^{2\pi} \{ U^{(1)}(r,\varphi,\theta)\, S(\theta) + U^{(2)}(r,\varphi,\theta)\, T(\theta) \}\, R\, d\theta + a\cos\varphi + b\sin\varphi \\ v = \int_0^{2\pi} \{ V^{(1)}(r,\varphi,\theta)\, S(\theta) + V^{(2)}(r,\varphi,\theta)\, T(\theta) \}\, R\, d\theta - a\sin\varphi + b\cos\varphi + cr \end{cases}$$

con

$$EU^{(1)} = -\frac{1-\nu}{2\pi}\frac{r}{R} - \frac{1+\nu}{\pi}\frac{Rr}{\rho^2}\sin^2(\varphi-\theta) - \frac{1}{\pi}\ln\rho^2\cos(\varphi-\theta) + \frac{1-\nu}{\pi}\Gamma\sin(\varphi-\theta$$

$$EV^{(1)} = \frac{1+\nu}{\pi}\frac{r}{\rho^2}[r - R\cos(\varphi-\theta)]\sin(\varphi-\theta) + \frac{1}{\pi}\ln\rho^2\sin(\varphi-\theta) + \frac{1-\nu}{\pi}\Gamma\cos(\varphi-\theta$$

$$EU^{(2)} = \frac{1+\nu}{\pi}\frac{R}{\rho^2}[R - r\cos(\varphi-\theta)]\sin(\varphi-\theta) - \frac{1}{\pi}\ln\rho^2\sin(\varphi-\theta) - \frac{1-\nu}{\pi}\Gamma\cos(\varphi-\theta$$

$$EV^{(2)} = \frac{1+\nu}{\pi}\left[-\cos(\varphi-\theta) + \frac{Rr}{\rho^2}\sin^2(\varphi-\theta)\right] - \frac{1}{\pi}\ln\rho^2\cos(\varphi-\theta) + \frac{1-\nu}{\pi}\Gamma\sin(\varphi-\theta$$

Sia $U^{(1)}, V^{(1)}$ come $U^{(2)}, V^{(2)}$ sono soluzioni delle equazioni della Elasticità. Le prime corrispondono al caso di un cerchio soggetto ad una tensione unitaria concentrata nel punto $\varphi = \theta$ del contorno, equilibrata dalla distribuzione continu

$$S(\varphi) = -\frac{1}{2\pi R}\cos(\varphi-\theta) \quad , \quad T(\varphi) = \frac{1}{2\pi R}\sin(\varphi-\theta).$$

Le seconde al caso di un cerchio soggetto ad una forza tangenziale unitaria concentrata nello stesso punto ed equilibrata dalla distribuzione

$$S(\varphi) = -\frac{1}{2\pi R}\sin(\varphi-\theta) \quad , \quad T(\varphi) = -\frac{1}{2\pi R}[1 + \cos(\varphi-\theta)].$$

Nel caso considerato dal Love, che è quello di una forza concentrata, normale al contorno, la singolarità della soluzione coincide con quelle delle $U^{(1)}, V^{(1)}$.

Metereologia. — *La pioggia invernale a Roma dal 1825 al 1949.* Nota di GABRIELLA ARMELLINI CONTI, presentata (*) dal Socio G. ARMELLINI.

1. La grave siccità verificatesi nell'inverno ora trascorso, mi ha dato occasione di compiere uno studio sopra la pioggia invernale su Roma, fondandomi sopra i registri delle osservazioni meteorologiche eseguite all'Osservatorio di Roma dall'inverno 1825-26 all'inverno 1948-49; e cioè sopra un totale di 124 inverni. In proposito, devo ricordare per chiarezza che, secondo l'uso generalmente adottato, io chiamo inverno metereologico il trimestre *decembre–gennaio–febbraio* e che appunto ad esso si riferiscono i risultati che ora passo ad esporre.

2. Esaminando i registri delle osservazioni della nostra specola ed eseguendo le somme delle quantità di pioggia cadute nel trimestre ora indicato, ho ottenuto la tabella I, dove P indica la pioggia totale in *millimetri.*

3. Dalla tabella I, deduciamo subito i seguenti risultati:

A) *La pioggia media invernale a Roma è di mm. 230,8.*

B) *La pioggia massima invernale avvenuta nei 124 inverni considerati, si è avuta nell'inverno 1914–15 ed è stata di mm. 615,8 e cioè quasi tre volte superiore alla media. Ad essa segue la pioggia di mm. 469,1 caduta nell'inverno 1916–17.*

C) *La pioggia minima invernale si è avuta nell'inverno 1834–35 ed è stata di mm. 41,7 e cioè circa la sesta parte valor medio. A questo inverno segue subito, per straordinaria siccità, l'inverno ora trascorso 1948–49, in cui la pioggia caduta è stata pressochè eguale a quella ora indicata e cioè di mm. 42,0.*

4. È importante di ricercare se la distribuzione delle pioggie invernali, nel lungo periodo esaminato, segua la legge del caso.

A tal fine, ho calcolato anzitutto, la differenza o scarto s tra la pioggia di ciascun inverno e la media 230,8 e quindi ho eseguito la somma dei quadrati dei 124 scarti ottenendo $\Sigma s^2 = 1182656{,}9$. Dividendo questa somma per 124 ed estraendo la radice quadrata, ho avuto come errore medio $m = 97{,}6$ e quindi, come errore probabile, $q = 65{,}5$. In conseguenza, poichè l'errore probabile ha probabilità 0,5 di essere superato e probabilità 0,5 di non essere superato, se la distribuzione delle pioggie soddisfa alla legge del caso, dovremo avere 62 inverni con pioggie comprese tra 165,3 mm. e 296,3 mm. e 62 inverni con pioggie poste fuori di questi limiti. Ora, esaminando la tabella I, si scorge subito che la frequenza è in realtà *poco diversa*; abbiamo infatti 63 inverni con pioggie contenute nei limiti anzidetti e 61 inverni con pioggie comprese fuori di questi limiti.

(*) Nella seduta del 12 marzo 1949.

Tabella I.

Pioggia invernale a Roma.

Inverno	P	Inverno	P	Inverno	P	Inverno	P
1825–26	166,5	1856–57	306,9	1887–88	351,4	1918–19	200,3
26–27	201,7	57–58	159,5	88–89	266,8	19-20	104,2
27–28	128,3	58–59	172,2	89–90	79,1	20–21	225,7
28–29	179,6	59–60	393,3	90–91	269,9	21–22	158,0
29–30	338,3	60–61	360,3	91–92	299,6	22–23	268,8
30–31	292,8	61–62	169,5	92–93	221,6	23–24	376,9
31–32	186,3	62–63	192,8	93–94	181,0	24–25	183,5
32–33	108,1	63–64	239,7	94–95	334,6	25–26	128,9
33–34	84,7	64–65	300,4	95–96	170,6	26–27	361,3
34-35	41,7	65–66	98,4	96–97	308,9	27–28	203,4
35–36	193,9	66–67	197,6	97–98	252,2	28–29	328,8
36–37	171,5	67–68	205,4	98–99	156,6	29–30	193,1
37–38	279,2	68–69	72,2	99–00	307,2	30–31	255,7
38–39	154,6	69–70	337,1	1900–01	203,2	31–32	122,1
39–40	181,6	70–71	375,7	01–02	380,6	32–33	222,8
40–41	282,1	71–72	200,0	02–03	168,4	33–34	289,0
41–42	213,9	72–73	272,8	03–04	433,7	34–35	224,3
42–43	247,4	73–74	102,7	04–05	270,9	35 36	304,3
43–44	128,4	74–75	275,3	05–06	219,3	36 37	168,0
44–45	339,6	75–76	249,4	06–07	340,7	37–38	373,5
45–46	138,6	76–77	218,6	07–08	245,5	38–39	204,6
46–47	388,4	77–78	207,8	08–09	225,2	39 40	269,3
47–48	286,6	78–79	340,7	09–10	152,1	40 41	385,2
48–49	53,5	79–80	90,4	10–11	173,8	41 42	325,9
49–50	207,6	80–81	214,1	11–12	186,1	42–43	279,7
50–51	73,4	81–82	154,1	12–13	140,9	43 44	72,5
51–52	140,0	82–43	295,4	13–14	260,5	44 45	60,5
52–53	261,8	83–84	142,2	14–15	615,8	45 46	163,8
53–54	223,2	84–85	380,1	15–16	145,9	46–47	357,0
54–55	266,7	85–86	262,0	16–17	469,1	47–48	260,6
55–56	244,9	86–87	326,8	17–18	157,0	48–49	42,0

5. Per eseguire un esame più accurato, poniamo

$$h = \frac{1}{m\sqrt{2}} = 0{,}00727 \tag{1}$$

$$s = P - 230{,}8 \tag{2}$$

dove P indica sempre la pioggia invernale. Se la distribuzione delle pioggie è casuale, sappiamo, dal calcolo delle probabilità, che la probabilità A affinchè lo scarto s sia compreso tra a e b, è data dall'integrale:

$$A = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_a^b e^{-h^2 x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{ha}^{hb} e^{-z^2} dz . \tag{3}$$

Ricordando che, secondo il teorema di Bernouilli, la frequenza di un evento è eguale al prodotto del numero delle prove moltiplicato per la sua probabilità, vediamo subito che, su 124 inverni esaminati, il numero N degli inverni aventi pioggie comprese tra P_1 e P_2 sarà dato dall'equazione;

$$N = \frac{124}{\sqrt{\pi}} \int_\alpha^\beta e^{-z^2} dz \; ; \; \alpha = (P_1 - 230{,}8)\, h \; ; \; \beta = (P_2 - 230{,}8)\, h . \tag{4}$$

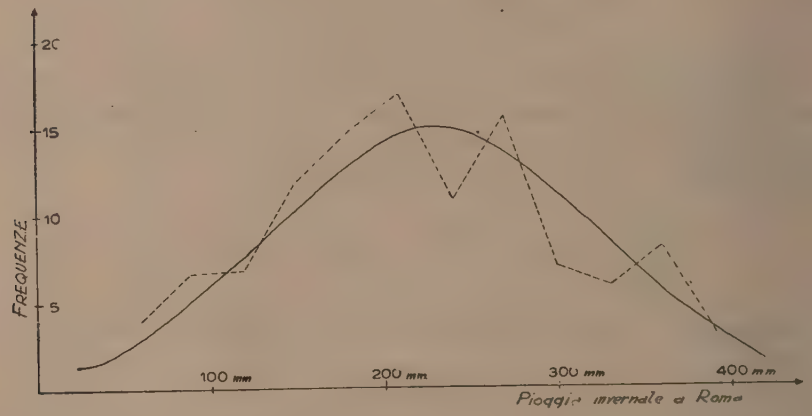
Eseguendo il calcolo e tenendo presente la Tabella I, abbiamo allora la seguente

TABELLA II.

Pioggie invernali in mm.	Inverni osservati	Frequenza calcolata N
< 40	0	1,9
40– 70	4	3,1
70–100	7	5,1
100–130	7	7,4
130–160	12	10,4
160–190	15	12,9
190–220	17	14,5
220–250	11	15,3
250–280	16	14,2
280–310	11	12,1
310–340	7	9,6
340–370	6	6,9
370–400	8	4,3
> 400	3	5,1

6. Come mostra questo specchietto, la frequenza osservata segue, in linea di massima, l'andamento della frequenza calcolata; ciò indica che, almeno in prima approssimazione, il fenomeno può ritenersi come *casuale*. In proposito, riportiamo nell'annessa figura la curva normale di una distribuzione gaussiana disegnata in tratto continuo e sovrapposta al diagramma delle frequenze osservate, che ho ricavato dallo specchietto ora riportato ed ho disegnato a tratteggio.

Si vede subito dalla figura che, in linea di massima, i due diagrammi presentano un andamento abbastanza analogo. Notiamo però che nel diagramma delle frequenze osservate si riscontrano due massimi vicini, in luogo dell'unico massimo del diagramma gaussiano.



Ma se, per maggiore esattezza, anzichè ricorrere allo specchietto riassuntivo, ricorriamo direttamente alla tabella I, si notano altre differenze che fanno presumere una distribuzione *iponormale*; analoga a quella da me trovata in altra Nota [1] sulla pluviosità generale a Roma negli ultimi cento anni. Così, per esempio, nei 124 inverni esaminati, ve ne è uno (e precisamente quello del 1914–15) in cui la pluviosità fu di 615,8 mm; vale a dire superò la media di 385,0 mm e cioè di circa 4 volte l'errore medio, che abbiamo visto essere 97,6 mm. Ora il calcolo insegna che la probabilità di un errore superiore a tre volte e mezzo l'errore medio è minore di un millesimo, e quindi un tale fenomeno dovrebbe avvenire una volta ogni mille inverni almeno e non in soli 124 inverni.

7. Notiamo pure che la tabella I mostra una qualche asimmetria. Infatti, eseguendo la media delle pluviosità dei primi 62 inverni (e cioè dall'inverno 1825-26 all'inverno 1886–87) si ottiene $m_1 = 218{,}0$; eseguendo invece la media delle pluviosità degli ultimi 62 inverni (e cioè dal 1887 88 al 1948-49) si

(1) Cfr. G. Armellini Conti, *La pioggia a Roma negli ultimi cento anni*, in «Rend. Lincei», sem. I (1946).

ha $m_2 = 243{,}6$. Come si vede, la prima è inferiore di 12,8 mm alla media generale ($m = 230{,}8$ mm), mentre la seconda la supera di altrettanto.

Non credo di poter avanzare ipotesi su questo curioso fenomeno, che indicherebbe un aumento di pluviosità invernale di circa il 10 % quando si passa dal primo al secondo sessantennio. Può essere che il fenomeno sia dovuto ad un'oscillazione climatica a lungo periodo, come accennai pure nella precedente Nota sulla pluviosità generale. Può essere che l'aumento del 10 % sia dovuto a cause locali, per esempio al rimboschimento dell'Appennino Romano. E può essere infine che si tratti di un fenomeno puramente casuale; ed infatti basterà notare che, essendo lo scarto medio della pluviosità di un inverno di 97,6 mm quello della media di 62 inverni dovrà essere $\frac{97{,}6}{\sqrt{62}} = 12{,}4$ e cioè ha un valore pressochè eguale a quello trovato. La questione non può quindi essere risolta.

Fisica. — *Sulla nuova tecnica dei contatori a scintillazione*[*]. Nota I di Mario Ageno, Mario Chiozzotto e Ruggero Querzoli, presentata[**] dal Socio G. C. Trabacchi.

Broser e Kallmann scoprirono nel 1947 [1] che i cristalli di alcune sostanze organiche, quali la naftalina, il fenantrene e l'antracene, dànno luogo sotto l'azione di raggi β o γ (oltrechè di particelle α) a scintillazioni facilmente rivelabili mediante un fotomoltiplicatore elettronico. Da tale scoperta hanno preso origine i cosidetti contatori a scintillazione, che tra i nuovi metodi di rivelazione di particelle veloci e quanti γ sembrano oggi essere uno dei più promettenti.

Avendo anche nel nostro Istituto realizzata la nuova tecnica, abbiamo iniziato su di essa delle indagini sistematiche, al doppio scopo di individuarne esattamente le caratteristiche e le possibilità e di mettere a punto alcune esperienze in preparazione. Ci limitiamo per ora ad esporre i principali resultati ottenuti nello studio del fotomoltiplicatore (il 931 A della R. C. A., reperito tra il materiale residuato di guerra), rimandando ad altra comunicazione la descrizione dell'apparato amplificatore e registratore, nonchè lo studio sistematico dei cristalli fluorescenti.

Il primo problema che ci siamo proposti di risolvere è stato quello di fissare un criterio per la misura della sensibilità di un FM a debolissime intensità luminose, in determinate condizioni, e di vedere come vari tale sensibilità da tubo a tubo e in un determinato tubo al variare delle condizioni di funzionamento.

La prima idea che si presenta a proposito è quella di assumere come misura relativa della sensibilità il rapporto R tra la corrente anodica provocata da un debolissimo segnale luminoso costante nel tempo e la corrente anodica di fondo (corrente oscura) del FM. Perchè questa misura abbia un senso ed R assuma

(**) Nella seduta del 12 marzo 1949.

(*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di fisica dell'Istituto Superiore di Sanità di Roma.

(1) I. Broser, H. Kallmann, «Z. f. Naturforschung», 2 *a*, 439 (1947); 2 *a*. 642 (1947).

presumibilmente lo stesso valore del rapporto tra la corrente media dovuta ai fotoelettroni estratti dalle scintillazioni e quella dovuta all'emissione termoionica del catodo e dei vari dinodi, occorre però evidentemente che non vi sia una sensibile corrente oscura di dispersione.

Allo scopo di chiarire questo punto, abbiamo montato un FM tipo 931 A e dato tensioni negative al catodo e ai nove dinodi mediante un partitore costituito da 10 resistenze da 100 kΩ ciascuna: la corrente anodica media veniva dedotta dalla caduta di tensione esistente ai capi della resistenza di fuga, misurata mediante un elettrometro tipo Trabacchi [2], in parallelo il quale era posta una capacità da 10^3 pF. Paraffinando zoccolo e basetta della valvola e lavorando in ambiente secco e a temperatura costante, abbiamo praticamente eliminato ogni dispersione esterna e ottenuto misure sempre perfettamente riproducibili. Abbiamo poi tentato di misurare la residua corrente di dispersione nei seguenti due modi:

1° Mediante osservazione oscillografica, abbiamo prima valutato a 50.000 al secondo il numero degli impulsi di fondo del FM e misurato poi coll'elettrometro la corrente oscura che è risultata di circa 10^{-8} amp. Essendo l'amplificazione di circa $5 \cdot 10^{-6}$, se si attribuisce ciascun impulso del fondo a un singolo fotoelettrone emesso dal catodo o dal primo dinodo, si ha che la corrente media dovuta agli impulsi è proprio dell'ordine di grandezza della corrente oscura misurata, senza che rimanga posto per una notevole corrente di dispersione.

2° Abbassando la temperatura del fotomoltiplicatore da 20,5° C a 6,0° C, la corrente di fondo si è ridotta per un fattore 12 circa, passando da $5 \cdot 10^{-8}$ a $4{,}1 \cdot 10^{-9}$. Secondo la legge di Richardson, tale fattore dovrebbe essere dell'ordine di 10, in buon accordo col resultato sperimentale e senza ancora che rimanga posto per una sensibile corrente di dispersione.

Abbiamo quindi concluso che la corrente di dispersione nelle nostre condizioni non era certamente maggiore di qualche unità in 10^{-10} amp., il che rende significativa una misura di sensibilità in cc., fatta col criterio al quale abbiamo sopra accennato.

Per l'esecuzione pratica delle misure, abbiamo realizzato il segnale luminoso di riferimento con una lampadina elettrica di tipo micromignon alimentata con 2 volt di accumulatori, riducendone l'intensità luminosa mediante opportuni filtri ed uno schermo con foro di 3 mm. posto davanti al fotocatodo.

La figura 1 mostra per alcuni fotomoltiplicatori l'andamento di $\log R$ in funzione della tensione V_a applicata ai capi del partitore di alimentazione, alla temperatura ambiente di 20,5° C. Le tre curve contrassegnate con asterisco sono relative ad un segnale luminoso di intensità diversa da quello usato per le altre due. L'esame di queste curve suggerisce le conclusioni seguenti:

1° le fortissime differenze di sensibilità esistenti da tubo a tubo ad una determinata tensione possono almeno entro certi limiti essere compensate, regolando opportunamente la tensione applicata a ciascun tubo: da ciò deriva la possibilità di fare delle coincidenze tra diversi FM, senza dover ricorrere ad una selezione veramente critica dei tubi;

(2) G. C. Trabacchi, «Rend. Ist. Sup. Sanità», V, 644 (1942).

2° al crescere della tensione applicata la sensibilità cresce, mostrando però una tendenza alla saturazione. Il valore di saturazione è evidentemente uguale al rapporto N/n, tra il numero N di fotoelettroni emessi al secondo dal catodo per

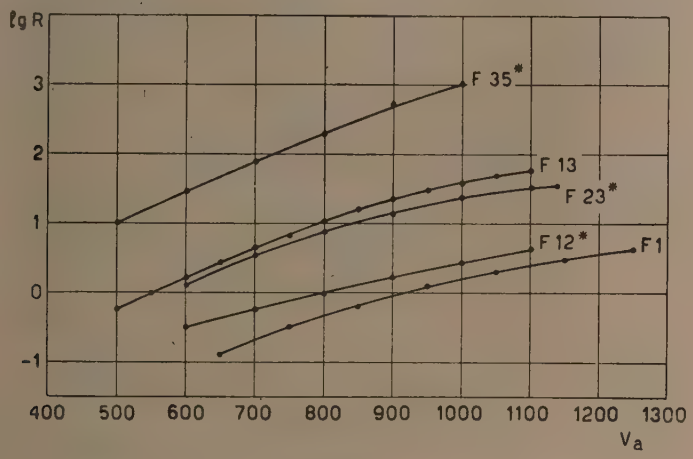


Fig. 1.

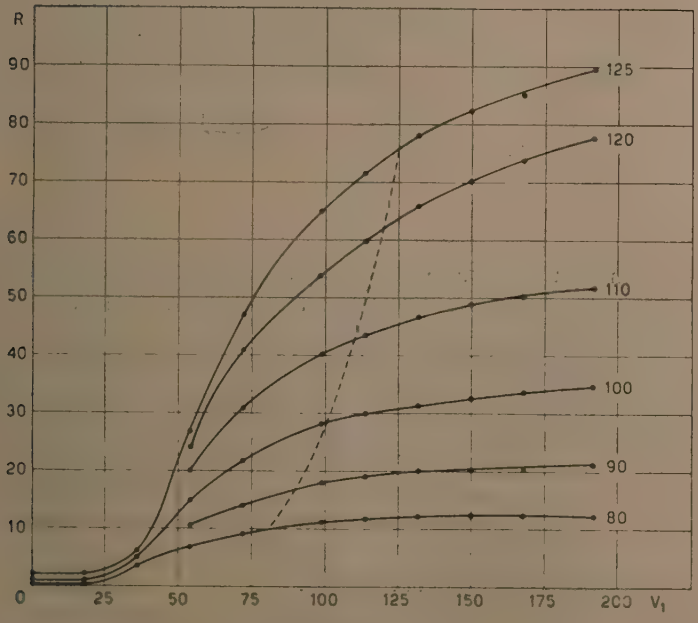


Fig. 2.

effetto del segnale e il numero n di elettroni emessi dallo stesso catodo e nelle stesse condizioni per effetto termoionico. Il fatto che il valore di saturazione non sia raggiunto per valori ammissibili della tensione applicata indica che l'emissione

termoionica dei vari dinodi è tutt'altro che trascurabile in confronto a quella del catodo.

In una seconda serie di misure, abbiamo studiato che effetto ha sulla sensibilità R del FM una variazione della tensione V_1 tra catodo e primo dinodo, per valori costanti della tensione V_d tra due qualsiasi dinodi successivi. La figura 2 contiene alcune curve tipiche ottenute in questa ricerca. L'aumento di R per un determinato valore di V_d è dovuto quasi esclusivamente ad un aumento della corrente di segnale, poichè la corrente oscura si mantiene pressochè indipendente da V_1: ciò è una conferma del fatto che al fondo contribuisce in modo essenziale l'emissione termoionica dei dinodi.

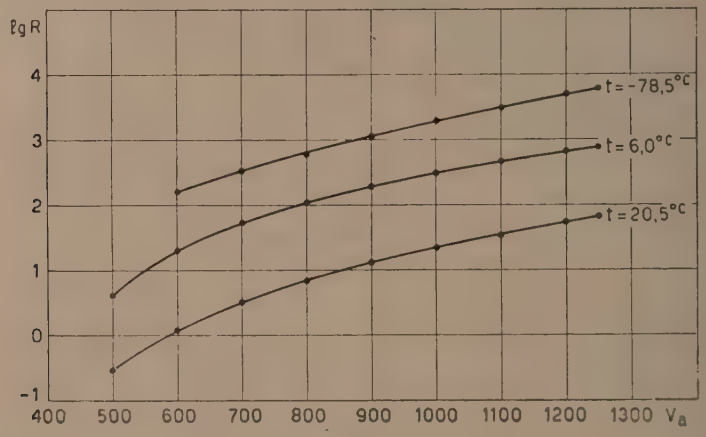


Fig. 3.

Quest'ultima può evidentemente ridursi solo abbassando la temperatura. La figura 3 mostra l'aumento di sensibilità che si può ottenere in tal modo, aumento dovuto ora quasi esclusivamente alla riduzione del fondo. Come si è già accennato, l'aumento di R corrispondente al salto di temperatura tra 20,5° C e 6,0° C è abbastanza in accordo con quanto prevede la legge di Richardson, mentre l'ulteriore aumento che si ha passando alla temperatura del CO_2 solido è molto minore del previsto. Ciò può forse spiegarsi in parte con la presenza di una corrente di dispersione dell'ordine di 10^{-10} amp. e in una parte osservando che sui dinodi si ha una continua dissipazione di calore dovuta al bombardamento elettronico, di modo che la temperatura effettiva di questi è probabilmente abbastanza più elevata della temperatura esterna.

L'esistenza di un effetto termico di questa specie è del resto confermata dalle misure, eseguite a —78,5° C, di R in funzione di V_1. Col solito segnale luminoso abbiamo trovato a —78,5° C delle curve di sensibilità analoghe a quelle della figura 2, con la differenza che per i maggiori valori di V_d, R raggiunge un massimo al crescere di V_1 per poi ricalare. Il calo è sostanzialmente dovuto ad un abbastanza rapido aumento della corrente di fondo.

Abbiamo allora sostituito al segnale luminoso le oscillazioni di un cristallo di naftalina delle dimensioni di $2 \times 1 \times 0{,}4\ cm^3$, irradiato con i raggi γ del Ms Th. La corrente di segnale è resultata in tal modo molto più piccola che col segnale luminoso, mentre il tempo di ciascuna misura, cioè il tempo di carica del condensatore (ora di 10^4 pF) in parallelo all'elettrometro è resultato assai più lungo. Come mostra la figura 4, le curve di sensibilità così ottenute sono del tutto analoghe a quelle fatte a temperatura ambiente.

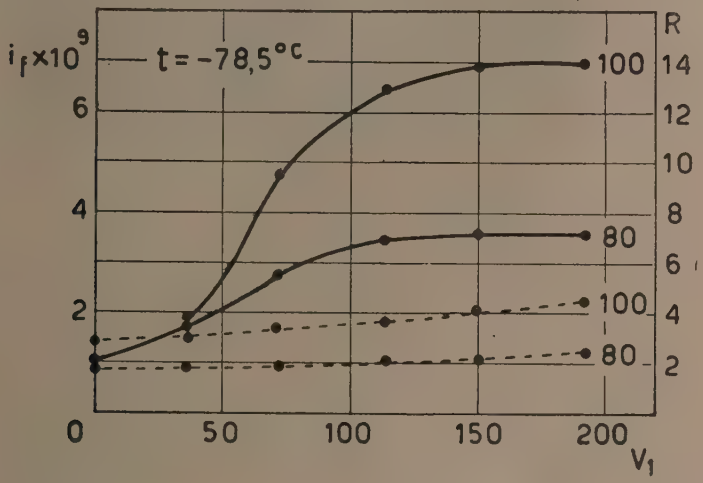


Fig. 4.

Questo fatto sembra potersi spiegare osservando che nel secondo caso il prolungarsi della corrente di segnale determina un riscaldamento dei dinodi e quindi un aumento temporaneo dell'emissione termoionica: con ciò, la corrente che si misura è in realtà maggiore della corrente di segnale vera e propria.

Vogliamo infine esprimere pubblicamente la nostra viva riconoscenza al prof. G. C. Trabacchi per il Suo costante interessamento e per la grande liberalità con cui ha sempre messo a nostra disposizione tutti i mezzi e gli strumenti necessari per il nostro lavoro.

Fisica. — *Su di un tipo di voltmetro a generazione per alte tensioni* (*). Nota di MARIO CHIOZZOTTO, presentata (**) dal Socio G. C. TRABACCHI.

Il problema di misurare in maniera comoda e sufficientemente precisa delle tensioni molto elevate, dell'ordine di diverse centinaia di chilovolt, non è di facile soluzione. I tipi comuni di misuratori a caduta ohmica non hanno dato risultati soddisfacenti, sia perchè uno strumento del genere rappresenta un carico non sempre trascurabile per l'apparato generatore di tensione, sia per la difficoltà di evitare l'effetto corona, e sopratutto perchè catene di resistenze di elevato valore, quali sono necessarie per un tale scopo, non sono stabili (1).

Lo spinterometro a sfere è una soluzione piuttosto primitiva che presenta evidenti svantaggi, e non sembra sia neppure molto corretta (2).

Più precisi, ma molto più complessi, sono i numerosi metodi che consentono di ricavare i valori della tensione dalla misura della deflessione di un fascetto di particelle cariche accelerato dalla tensione stessa e fatto passare in un campo elettrico o magnetico, oppure dalla misura della lunghezza d'onda di De Broglie con la diffrazione. Questi ultimi metodi, anche se atti a dare indicazioni di precisione molto elevata, rappresentano soluzioni complesse. In pratica possono servire come metodi di taratura o controllo di qualche apparecchio speciale, destinato a dare indicazioni della tensione con continuità ed a distanza dal generatore. Anche tipi di misuratori di tensione basati su azioni di attrazione elettrostatica sono di difficile realizzazione e poco sicuri nel funzionamento.

Il tipo di misuratore di alte tensioni che sembra abbia dato soddisfacenti risultati è il voltmetro rotante ad induzione descritto per la prima volta da Kirkpatrick e Miyake (3) e Gunn (4) nel 1932, e diffuso in seguito in numerose varianti su molti impianti ad alta tensione. Di questo tipo è anche il misuratore d'alta tensione realizzato nel nostro laboratorio per la registrazione continua a distanza della tensione di lavoro dell'impianto da 1100 chilovolt (5). Esso è una variante del tipo a rotore cilindrico descritto da Henderson e collaboratori (2). La parte rotante è costituita da un cilindro di bachelite di 40 centimetri di lunghezza e 10 di diametro sul quale sono fissate due lamine di alluminio di 40 centimetri

(*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisica dell'Istituto Superiore di Sanità di Roma.

(**) Nella seduta del 9 aprile 1949.

(1) Ved., per esempio, JENNINGS, SWARTZ, ROSSI, «R. S. I.», *15*, 64 (1944); HANNES ALFVÉN-SIGVARD EKLUND, «R. S. I.», *17*, 353 (1946). Numerosi tentativi inoltre condotti presso questo laboratorio nell'intento di sfruttare una catena di resistenze per misurare una tensione di 1100 chilovolt, hanno dimostrato che un sistema del genere non presenta le necessarie caratteristiche di costanza e stabilità.

(2) HENDERSON, GOSS, ROSE, «R. S. I.», *6*, 63 (1935); «Meador. Elec. En.», *53*, 942 (1934).

(3) KIRKPATRICK, MIYAKE, «R. S. I.», *3*, 1 (1932).

(4) ROSS, GUNN, «Phys. Rev.», *40*, 307 (1932).

(5) AMALDI, BOCCIARELLI, RASETTI, TRABACCHI, «Ric. Sc.», X, 1 (1939).

per 14, isolate tra loro ed in collegamento elettrico coi due semiassi del rotore. Questo collegamento è ottenuto tramite i due cuscinetti a sfere nei quali girano i semiassi e si è constatato sperimentalmente che questo tipo di collegamento è esente da difetti che possano alterare il funzionamento dell'apparecchio. È stata preferita questa soluzione piuttosto che introdurre l'uso di un collettore a spazzole già usato da Henderson e collaboratori per evitare gli inconvenienti già notati dagli Autori stessi. Un motore a corrente continua, calettato su un semiasse del rotore, provvede alla rotazione di questo. Una delle piastre d'alluminio è collegata direttamente al suolo, mentre l'altra va a terra con una grossa resistenza. Il principio sul quale lo strumento si basa è ben noto. La piastra isolata, in rotazione, si trova durante un semiperiodo esposta all'azione del campo elettrico che induce su di essa delle cariche, e durante il semiperiodo successivo viene invece ad essere schermata dall'azione della placca collegata direttamente a terra. Ciò

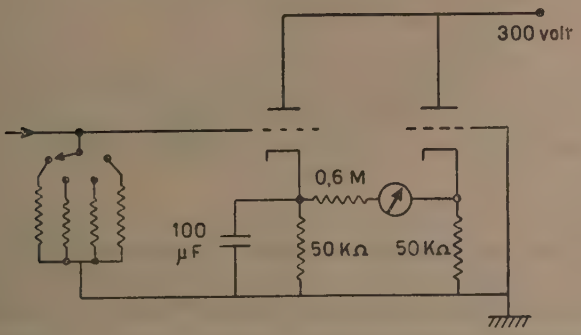


Fig. 1.

provoca un fluire alternativo di cariche lungo la resistenza di fuga, e dà quindi a monte di questa un potenziale oscillante periodicamente.

Questa tensione viene applicata alla griglia di un triodo montato a « cathode follower » in modo da amplificare in potenza l'impulso di ingresso. Al livellamento delle oscillazioni di tensione sul catodo provvede un condensatore di capacità opportunamente scelta in modo che la costante di tempo del condensatore e della resistenza catodica sia molto grande in confronto della frequenza dell'impulso d'ingresso. Ciò permette l'uso di un microamperometro, con opportuna resistenza in serie, come misuratore della tensione al catodo stesso. Per azzerare lo strumento di misura in assenza di campo elettrico, esso è stato bilanciato a ponte su un altro « cathode follower » eguale al primo, sfruttando così le due sezioni di un doppio triodo 6SL7-RCA. Con ciò si raggiunge inoltre lo scopo di sottrarre praticamente le indicazioni dello strumento dall'influenza di variazioni nella tensione di alimentazione delle valvole in modo da permettere l'uso di un piccolo alimentatore non stabilizzato.

In queste condizioni l'indicazione del microamperometro, quando il rotore giri in un campo elettrico, risulta funzione dell'intensità del campo e della frequenza di rotazione. Nonostante infatti che il circuito sia stato disegnato in modo

da dare una risposta praticamente indipendente dalla frequenza, a causa delle capacità parassite del circuito d'ingresso e della capacità del rotore stesso, le indicazioni del microamperometro dipendono dalla frequenza. A titolo di esempio si riportano alcune curve che rappresentano l'andamento della corrente nel microamperometro in funzione della frequenza di rotazione del rotore, per alcuni valori del campo elettrico.

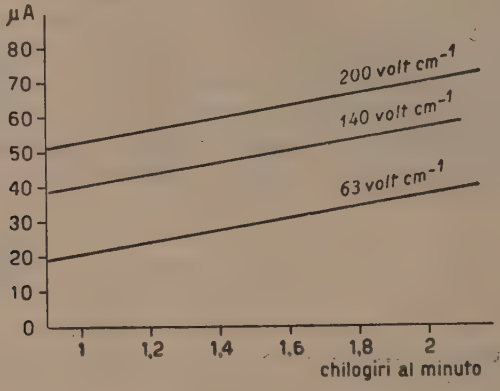


Fig. 2.

Dato lo scopo per il quale è stato studiato l'apparecchio, è stato sufficente, per ovviare all'inconveniente della variazione della risposta con la frequenza di rotazione del rotore, far girare questo con un motore a corrente continua. L'osservazione stroboscopica del moto ha dato conferma che non avvengono variazioni di velocità, almeno entro l' 1 %.

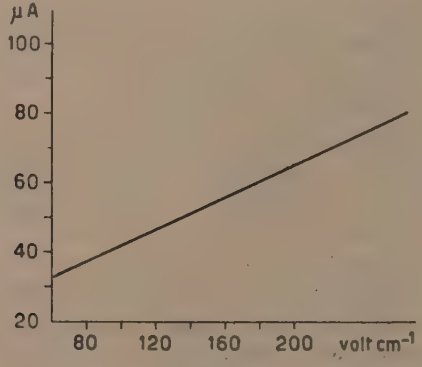


Fig. 3.

L'intervallo di valori dell'intensità di campo in cui l'apparecchio è usabile arriva a valori molto elevati senza presentare inconvenienti. In questo caso l'apparecchio è stato usato fino a campi di circa 3000 volt per centimetro. Nel caso di campi molto intensi è necessario però ridurre opportunamente l'ampiezza del

segnale che il rotore fornisce, per evitare che il « cathode follower » tagli l'onda in ingresso, uscendo quindi di caratteristica. Per far ciò basta ridurre opportunamente la resistenza di fuga, o schermare parzialmente il rotore con una rete metallica collegata al suolo [6]. A titolo di esempio si riporta una curva di taratura dello strumento, a velocità di rotazione costante.

Per lo scopo specifico per il quale l'apparecchio è stato costruito, esso viene montato a terra, nella sala che contiene l'impianto da 1100 chilovolt a distanza di circa quattro metri dall'involucro anticorona che termina superiormente il tubo acceleratore e la trasmissione al microamperometro viene fatta a distanza nella cabina di manovra sottostante all'impianto stesso. Dato che l'andamento del campo elettrico nelle vicinanze del rotore è lungi dall'essere ben conosciuto, per avere una taratura dello strumento quanto più possibile precisa, è preferibile ricorrere allo sfruttamento di alcune reazioni nucleari che presentino delle risonanze note e ben definite.

Fisica-Matematica. — *Su di un problema di propagazione termica, trattato col metodo degli operatori funzionali.* Nota di ORESTINA GARAVALDI, presentata(*) dal Socio G. GIORGI.

1. Un problema che presenta un certo interesse, non solo teorico, ma anche in vista di applicazioni tecniche, è quello che viene qui esposto, e del quale si dà la soluzione operazionale.

Si consideri un ambiente chiuso, delimitato da pareti piane di spessore uniforme, e di uniformi proprietà termiche (conduttività e calore specifico). La temperatura della superficie esterna di dette pareti sia costante ed assunta uguale a zero gradi. All'interno dell'ambiente, inizialmente pure a temperatura zero, si inizi, al tempo origine $t = 0$, uno svolgimento di calore *con legge nota qualsiasi*. Si tratta di determinare l'andamento temporale della temperatura dell'ambiente interno (supposta sempre uniforme) senza però trascurare l'esistenza, nella parete delimitante, di resistenze e capacità termiche distribuite lungo lo spessore delle pareti medesime.

(Come è ovvio, tale schematizzazione potrebbe assumersi a base, ad esempio, per la trattazione di qualche problema tecnico concernente un forno industriale).

Ammesso, come è abituale in casi del genere, che il sistema fisico in esame sia governato da leggi lineari, esso comporta una equazione differenziale lineare a derivate parziali. Particolarmente agevole, ed atta al calcolo numerico, si presenta in questo caso la soluzione ottenuta col metodo degli operatori funzionali, attraverso un'analogia elettrica.

Il problema in questione è formalmente analogo, difatti, a quello di un cavo elettrico con sole resistenze e capacità distribuite in maniera uniforme sulla sua

(6) HARNWELL, VAN VOOHRIS, « R. S. I. », *4*, 540 (1933).

(*) Nella seduta del 9 aprile 1949.

lunghezza s, chiuso a terra in corto circuito ad un estremo, e messo a terra attraverso un condensatore all'altro estremo, ove viene alimentato da una f. e. m.

In tale analogia, alle quantità di calore, temperature, resistenze e capacità termiche corrispondono rispettivamente quantità di elettricità, tensioni, resistenze e capacità elettriche. L'analogia elettrica è comoda perchè permette di partire senz'altro dalle cosidette *equazioni del trasduttore quadripolare*, con che il calcolo si abbrevia alquanto. L'interpretazione termica del risultato è ovvia.

2. Notazioni adoperate.

t = tempo [ora = h]

S = superficie complessiva della parete, [m^2]

s = spessore della parete (lunghezza del cavo nell'analogia elettrica) [m]

k = conduttività della parete, $\left[\frac{\text{Cal}}{m \times {}^\circ\text{C} \times h}\right]$

c = calore specifico riferito al m^3 del materiale costituente la parete, $\left[\frac{\text{Cal}}{m^3 \times {}^\circ\text{C}}\right]$

C = capacità termica della parete, per tutta la superficie e per 1 m di spessore, $C = c \times S$, $\left[\frac{\text{Cal}}{m \times {}^\circ\text{C}}\right]$

R = resistenza termica della parete, per tutta la superficie e per 1 m di spessore, $R = \frac{1}{kS}$, $\left[\frac{{}^\circ\text{C} \times h}{\text{Cal} \times m}\right]$

$T \equiv V_0$ = temperatura dell'ambiente interno (tensione al condensatore, nell'analogia elettrica) $T(t)$, [°C]

Q = quantità di calore svolta in totale a partire da $t = 0$, $Q(t)$, [Cal]

Q' = intensità dello svolgimento di calore, $Q' = \frac{dQ}{dt}$, $\left[\frac{\text{Cal}}{h}\right]$

H = capacità termica dell'ambiente interno, $H = \frac{q}{T}$, $\left[\frac{\text{Cal}}{{}^\circ\text{C}}\right]$

q = quantità di calore accumulato nell'ambiente interno, $q = HT$, [Cal]

I_0 = portata o corrente termica che attraversa la superficie interna della parete $\left[\frac{\text{Cal}}{h}\right]$

I_1 = portata o corrente termica che attraversa la superficie esterna della parete $\left[\frac{\text{Cal}}{h}\right]$

A = intensità dello svolgimento costante di calore nel caso particolare $\left[\frac{\text{Cal}}{h}\right]$

Δ = operatore di derivazione, $\Delta = \frac{d}{dt}$, $\left[\frac{1}{h}\right]$

Z = impedenza termica caratteristica, $Z = \sqrt{\frac{R}{C\Delta}}$, $\left[\frac{{}^\circ\text{C} \times h}{\text{Cal}}\right]$

$\gamma =$ operatore di propagazione, $\gamma = \sqrt{RC\Delta}$, $\left[\frac{1}{m}\right]$

$$\alpha \equiv \frac{H}{C}$$

$$\beta \equiv \frac{\alpha}{s} = \frac{H}{Cs}$$

$$v \equiv -i\gamma \qquad (i = \sqrt{-1})$$

$$\zeta \equiv vs \quad = -is\sqrt{RC\Delta}$$

$$\exp[x] \equiv e^x; \quad e \equiv 2{,}718\cdots$$

(Per le notazioni di carattere operazionale si seguirà il simbolismo introdotto da G. Giorgi) [1].

3. Nell'analogia elettrica di cui si è accennato, le *equazioni del trasduttore quadripolare* sono, com'è noto, le seguenti:

$$(1) \qquad \begin{cases} V_0 = V_1 \operatorname{Cosh} \gamma s + ZI_1 \operatorname{Senh} \gamma s \\ I_0 = \frac{V_1}{Z} \operatorname{Senh} \gamma s + I_1 \operatorname{Cosh} \gamma s . \end{cases}$$

Nel caso nostro, essendo il cavo in corto circuito al suo termine, è $V_1 = 0$, e le (1) si riducono a:

$$(2) \qquad \begin{cases} V_0 = ZI_1 \operatorname{Senh} \gamma s \\ I_0 = I_1 \operatorname{Cosh} \gamma s \end{cases}$$

ossia

$$\frac{I_0}{V_0} = \frac{\operatorname{Coth} \gamma s}{Z} .$$

Dovendo essere

$$\begin{cases} Q = q + \int_0^t I_0 \, dt = q + \frac{I_0}{\Delta} \\ q = HT \equiv HV_0 \end{cases}$$

si ricava successivamente

$$\frac{I_0}{\Delta} = \frac{q}{HZ\Delta} \operatorname{Coth} \gamma s$$

$$Q = q\left(1 + \frac{\operatorname{Coth} \gamma s}{HZ\Delta}\right)$$

ed inoltre, tenendo conto delle già citate espressioni di Z, γ, α, si perviene alla formola risolutiva finale:

$$(3) \qquad q(t) = \frac{\alpha\gamma}{\alpha\gamma + \operatorname{Coth} \gamma s} Q(t) .$$

(1) Vedi: G. GIORGI, *Sulla dipendenza funzionale delle variabili fisiche*. Toronto 1924 («Congr. Int. di Mat.»), traduzione dall'inglese di G. APRILE, «Boll. Tecn. Ist. Mil. Sup. delle trasmissioni», nn. 1 e 2 (1941).

Questa è un'espressione simbolica da valutare, ed in essa $Q(t)$ è *l'operanda*, il rimanente del 2° membro è *l'operatore*, mentre il primo membro esprime il risultato da esplicitare.

Ponendo $\gamma = vi$, essendo

$$\operatorname{Coth} \gamma s = -i \operatorname{cotg} vs$$

si ottiene

$$q(t) = \alpha \frac{v}{v\alpha - \operatorname{cotg} vs} Q(t)$$

e quindi, con $\zeta = vs$, $\beta = \frac{\alpha}{s}$

$$q(t) = \beta \frac{\zeta}{\beta\zeta - \operatorname{cotg} \zeta} Q(t). \tag{4}$$

Volendo dare evidenza alla temperatura T dell'ambiente interno, la (4) si può scrivere:

$$T(t) = \frac{\beta}{H} \cdot \frac{\zeta}{\beta\zeta - \operatorname{cotg} \zeta} Q(t). \tag{5}$$

Va ricordato che l'operando $Q(t)$ è generico, ossia può essere una qualsiasi *funzione fisica* (nel senso di G. Giorgi). Per arrivare alla valutazione nel caso generale, conviene però risolvere prima il *caso particolare* in cui sia

$$Q(t) = AJ(t) = A \times t \times 1(t) \qquad [Cal]$$

essendo cioè $J(t)$ la *funzione lineare unitaria* ossia la generatrice integrale seconda [2] dell'operatore fondamentale Δ, per la quale vale:

$$J(t) = \frac{1}{\Delta} 1(t) = \int_0^t 1(t)\, dt = t \times 1(t).$$

Si ricava così, contrassegnando con asterisco il detto caso particolare

$$T^*(t) = \frac{\beta}{H\Delta} \frac{A\zeta}{\beta\zeta - \operatorname{cotg} \zeta} 1(t) = \tag{6}$$

$$= \frac{A\beta}{H} \int_0^t \left\{ \frac{\zeta}{\beta\zeta - \operatorname{cotg} \zeta} 1(t) \right\} dt = \frac{A\beta}{H} \int_0^t \Phi(t)\, dt.$$

Per il calcolo di $\Phi(t) = \frac{\zeta}{\beta\zeta - \operatorname{cotg} \zeta} \cdot 1(t)$ si osservi che tale funzione altro non è che la generatrice integrale dell'operatore

$$f(\Delta) = \frac{\zeta}{\beta\zeta - \operatorname{cotg} \zeta} = \frac{F(\Delta)}{G(\Delta)}$$

(2) Ved. G. Aprile, *Appunti di calcolo operatorio funzionale*, ed. Pezzino, Palermo, p. 14 (1945).

la quale viene quindi data subito dallo *sviluppo di Heaviside* (3):

$$\Phi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(\Delta_n)}{\Delta_n G'(\Delta_n)} e^{\Delta_n t} \tag{7}$$

ove

$$G'(\Delta) = \frac{d}{d\Delta} G(\Delta) \quad , \quad e \equiv 2{,}718\cdots,$$

e dove le Δ_n sono degli *autovalori*, radici successive dell'*equazione trascendente di condizione*:

$$\beta\zeta - \operatorname{cotg}\zeta = 0.$$

Eseguendo i calcoli indicati dalla (7), che lo spazio non consente di esporre per esteso, si ottiene

$$\Phi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,\operatorname{sen}^2\zeta_n}{\beta\,\operatorname{sen}^2\zeta_n + 1} \exp\left[-\frac{\zeta_n^2}{RCs^2}\,t\right]. \tag{8}$$

Può scriversi pertanto, per le (6), essendo la serie (8) integrabile termine a termine:

$$T^*(t) = \frac{A\beta}{H}\int_0^t \Phi(t)\,dt = ARs \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,\operatorname{sen}^2\zeta_n}{\zeta_n^2(\beta\,\operatorname{sen}^2\zeta_n + 1)} \left\{1 - \exp\left[-\frac{\zeta_n^2}{RCs^2}\,t\right]\right\}. \tag{9}$$

Nonostante l'aspetto poco semplice, la [9] si presta bene al calcolo numerico, perchè la serie converge in pratica rapidamente. Per $t \to \infty$ è $T \to ARs$, poichè la sommatoria tende al valore 1, come può verificarsi col calcolo numerico. Fisicamente dev'essere del resto, appunto, $\frac{T}{Rs} = A$ a regime, ossia quando le temperature sono stabilizzate e non viene accumulato altro calore, talchè tutto il calore svolto si disperde all'esterno.

La (9) risolve dunque il caso particolare che sia $Q(t) = AJ(t)$. Nel caso generale in cui $Q(t)$, o la sua derivata $\frac{dQ}{dt} = Q'$, siano funzioni fisiche qualsiasi, si può osservare che dalla (5) può ricavarsi

$$T(t) = \varphi(\Delta)\frac{dQ}{dt} = \varphi(\Delta)\,Q'(t),$$

ove

$$\varphi(\Delta) = \frac{\beta}{H\Delta}\,\frac{\zeta}{\beta\zeta - \operatorname{cotg}\zeta},$$

e che la funzione generatrice integrale dell'operatore $\varphi(\Delta)$ è proprio la $\frac{T^*(t)}{A}$ data dalla (9) che discende appunto dall'ipotesi $\frac{Q'(t)}{A} = 1\,(t)$. Pertanto la $T(t)$,

(3) Vedi: K. W. WAGNER, *Operatorenrechnung*, Lipsia 1940, p. 72.

nel caso generico, può essere calcolata come segue, applicando una nota formula generale di valutazione [4]:

$$T(t) = A \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} T^*(t - \vartheta)\, Q'(\vartheta)\, d\vartheta$$

oppure, se la $Q'(t)$ è nota solo mediante un grafico, il calcolo può essere condotto con qualcuno dei noti metodi grafici o grafico-numerici [5] di valutazione. Con ciò il problema riesce risolto completamente, in modo che si presta abbastanza per eventuali applicazioni nella tecnica.

Chimica (Chimica fisica). — *Velocità ultrasonore e compressibilità adiabatiche in alcuni derivati benzenici bisostituiti isomeri* [*]. Nota di MARIO BACCAREDDA, presentata [**] dal Corrisp. G. NATTA.

In alcuni precedenti lavori [1] è stato riferito sui risultati delle misure della velocità di propagazione degli ultrasuoni in vari tipi di isomeri allo stato liquido. È stato messo in evidenza come la velocità di propagazione degli ultrasuoni e la compressibilità adiabatica, che si calcola da quella e dalla densità, possono essere messe in relazione con la struttura molecolare dei diversi isomeri.

Confrontando i diversi gruppi di isomeri in condizioni di temperatura alle quali essi presentano la stessa densità, si era osservato che la compressibilità nel caso degli idrocarburi saturi (eptani) risulta tanto maggiore quanto maggiormente è ramificata la molecola e che nel caso degli isomeri etilenici come pure degli isomeri biciclici saturi le forme cis risultano più compressibili delle forme trans. Viceversa, se il confronto è fatto ad eguali temperature, gli isomeri cis presentano minori compressibilità che non i trans.

È stata ora presa in esame una serie di isomeri bisostituiti del benzolo, in buona parte gentilmente fornitici dai Laboratori della Soc. A. C. N. A. – Montecatini, per interessamento del prof. A. Quilico, che vivamente ringrazio.

I vari gruppi di isomeri sono stati scelti tra quelli disponibili in modo che tutti i composti risultassero liquidi alla temperatura ordinaria o presentassero punto di fusione non troppo elevato, in modo da potere essere esaminati direttamente allo stato puro.

(4) Vedi: G. APRILE, op. cit., p. 28, form. [30]; WAGNER, op. cit., p. 14, form. (19 c).

(5) G. APRILE, *Valutazione grafica, mediante poligoni funicolari, di espressioni simboliche nel calcolo operatorio.* «L'Elettrotecnica», settembre 1948.

(*) Lavoro eseguito nel Centro di Chimica Industriale del C. N. R. presso l'Istituto di Chimica Industriale del Politecnico di Milano.

(**) Nella seduta del 12 marzo 1949.

(1) M. BACCAREDDA, A. GIACOMINI, questi «Rendiconti», ser. VIII, *1*, 401 (1946); M. BACCAREDDA, «Ricerca Scientifica e Ricostruzione», *16*, 662 (1946); M. BACCAREDDA, «Ricerca Scientifica e Ricostruzione», *17*, 1108 (1947).

TABELLA.

Sostanza	t (°C)	u (m. sec^{-1})	ρ (gr. cm^{-3})	$\beta \times 10^{12}$ (cm. gr.$^{-1}$ sec^{2})	$\frac{du}{dt}$ (m. sec^{-1} °C^{-1})
m. xilolo (*a*)	20	1343	0.864	64.2	
»	40	1261	0.848	74.3	— 4.1
»	60	1175	0.832	87.1	— 4.3
p. xilolo (*b*)	20	1334	0.861	65.3	
»	40	1247	0.844	76.3	— 4.3
»	60	1162	0.827	89.6	— 4.2
o. diclorobenzolo (*c*) . .	20	1296	1.306	45.6	
» . .	40	1229	1.285	51.5	— 3.3
» . .	60	1165	1.264	58.3	— 3.2
p. diclorobenzolo (*d*) . .	60	1138	1.247	61.9	
o. clorotoluolo (*e*) . . .	20	1318	1.079	53.3	
» . . .	40	1244	1.061	60.9	— 3.7
» . . .	60	1173	1.041	69.8	— 3.5
p. clorotoluolo (*f*) . .	20	1308	1.063	55.0	
» . .	40	1234	1.046	62.7	— 3.7
» . .	60	1160	1.026	72.4	— 3.7
o. nitrotoluolo (*g*) . .	20	1469	1.163	39.8	
» . .	40	1394	1.144	45.0	— 3.2
» . .	60	1325	1.124	50.7	— 3.4
m. nitrotoluolo (*h*) . .	20	1476	1.156	39.8	
» . .	40	1403	1.138	44.6	— 3.6
» . .	60	1332	1.120	50.3	— 3.5
p. nitrotoluolo (*i*) . . .	60	1335	1.121	50.1	

(*a*) Prodotto della Soc. C. I. B. A. $n_D^{20} = 1{,}4974$ (letteratura, dati più attendibili $Q_{20/4} = 0{,}8641$; $n_D^{20} = 1{,}4978$).

(*b*) Prodotto della Soc. A.C.N.A. $n_D^{20} = 1{,}4960$ (letteratura, c. s.: $Q_{20/4} = 0{,}8612$; $n_D^{20} = 1{,}4965$).

(*c*) Id. id. $n_D^{20} = 1{,}5515$ (letteratura, c. s.: $Q_{20/4} = 1{,}3048$; $n_D^{20} = 1{,}5510$).

(*d*) Id. id. p. f. 53°,0 (letteratura, c. s.: p. f. 53–54°).

(*e*) Id. id. $n_D^{20} = 1{,}5255$ (letteratura, c. s.: $Q_{20/4} = 1{,}0817$; $n_D^{20} = 1{,}5249$).

(*f*) Id. id. $n_D^{20} = 1{,}5211$ (letteratura, c. s.: $Q_{20/4} = 1{,}0697$; $n_D^{20} = 1{,}5202$).

(*g*) Id. id. $n_D^{20} = 1{,}5462$ (letteratura, c. s.: $Q_{20/4} = 1{,}1630$; $n_D^{20} = 1{,}5465$).

(*h*) Id. id. $n_D^{20} = 1{,}5465$ (letteratura, c. s.: $Q_{20/4} = 1{,}1571$; $n_D^{20} = 1{,}5467$).

(*i*) Id. id p. f. 53°,5 (letteratura, c. s.: p. f. 52–53°).

Segue: TABELLA.

Sostanza	t (°C)	u (m. sec^{-1})	ρ (gr. cm^{-3})	$\beta \times 10^{12}$ (cm. gr.$^{-1}$ sec^2)	$-\frac{du}{dt}$ (m. sec^{-1} °C^{-1})
o. toluidina (*l*)	20	1618	0.999	38.3	
»	40	1539	0.983	43.0	— 3.9
»	60	1458	0.967	48.7	— 4.0
m. toluidina (*m*) . . .	20	1594	0.990	39.8	
» . . .	40	1523	0.974	44.3	— 3.5
» . . .	60	1450	0.958	49.7	— 3.6
p. toluidina (*n*) . . .	60	1409	0.942	53.5	
o. cloroanilina (*o*) . . .	20	1506	1.209	36.5	
» . . .	40	1436	1.189	40.8	— 3.5
» . . .	70	1334	1.159	48.5	— 3.4
m. cloroanilina (*p*) . .	20	1550	1.217	34.2	
» . .	40	1482	1.197	38.1	— 3.4
» . .	70	1380	1.167	45.0	— 3.4
p. cloroanilina (*q*) . . .	70	1388	1.175	44.2	
o. cresolo (*r*)	25	1506	1.044	42.0	
»	30	1488	1.039	43.5	— 3.4
»	35	1472	1.035	44.6	
m. cresolo (*s*)	25	1483	1.030	44.1	
»	30	1463	1 026	45.6	— 3.5
»	35	1448	1.022	46.6	
p. cresolo (*t*)	25	1489	1.030	43.8	

(*l*) Prodotto della Soc. A C.N.A. $n_D^{20} = 1,5721$ (letteratura, c. s.: $\varrho_{20/4} = 1,000$; $n_D^{20} = 1,5727$).

(*m*) Id. id. $n_D^{20} = 1,5675$ (letteratura, c. s.: $\varrho_{20/4} = 0,9891$; $n_D^{20} = 1,5686$).

(*n*) Id. id. della Soc. Fraenkel u. Landau p. f. 43°,0 (letteratura, c. s.: p. f. 43–43°,7).

(*o*) Id. id. della Soc. A.C.N.A. $n_D^{20} = 1,5870$ (letteratura, c. s.: $\varrho_{20/4} = 1,2125$; $n_D^{20} = 1,5895$).

(*p*) Id. id. $n_D^{20} = 1,5937$ (letteratura, c. s: $\varrho_{20/4} = 1,2150$; $n_D^{20} = 1,5931$).

(*q*) Id. id. p. f. 70°,0 (letteratura, c. s.: p. f. 70–71°).

(*r*) Id. id. della Soc. Schering–Kahlbaum $n_D^{20} = 1,5460$ (letteratura, c. s.: $\varrho_{20/4} = 1,0482$; $n_D^{20} = 1,5453$).

(*s*) Id. id. della Soc. Erba $n_D^{20} = 1,5401$ (letteratura, c. s.: $\varrho_{20/4} = 1,0340$; $n_D^{20} = 1,5398$).

(*t*) Id. id. della Soc. Schering–Kahlbaum $n_D^{20} = 1,5376$ (letteratura, c. s.: $\varrho_{20/4} = 1,0344$; $n_D^{20} = 1,5395$).

Per la descrizione del dispositivo sperimentale, la cui parte elettrica è stata costruita presso l'Istituto Nazionale di Elettroacustica del Consiglio Nazionale delle Ricerche, rimando ad un precedente lavoro [2].

Nella tabella sono riportati per tutti i composti esaminati i valori delle velocità di propagazione degli ultrasuoni u (frequenza 4 MHz) a diverse temperature con i relativi coefficienti di temperatura $\frac{du}{dt}$, i corrispondenti dati dalla densità ρ allo stato liquido e le compressibilità adiabatiche β che si calcolano dalle velocità di propagazione e dalle densità.

Confrontando i risultati ottenuti alla stessa temperatura si osserva che le velocità ultrasonore variano nello stesso senso delle densità e le compressibilità in senso opposto passando da un isomero all'altro per tutte le coppie o terne di isomeri esaminate, salvo che nel caso dei nitrotoluoli, nei quali le velocità crescono e le compressibilità diminuiscono nell'ordine o.-m.-p., mentre in essi le densità crescono nell'ordine m.-p.-o. Nessuna deduzione di ordine generale è quindi possibile fare da questo confronto; le compressibilità del m. e del p. mostrano in genere piccole differenze tra loro: superiori quelle del p. negli xiloli, nelle toluidine, superiori quelle del m. nei nitrotoluoli, nelle cloroaniline e nei cresoli. La compressibilità dell'o. risulterebbe sensibilmente inferiore a quella del m. o del p. o di entrambe nei diclorobenzoli, nei clorotoluoli, nelle toluidine e nei cresoli, superiore invece nei nitrotoluoli e nelle cloroaniline; fatti questi non facilmente interpretabili nel loro insieme.

I dati riportati dimostrano che la regola proposta da Parthasarathy in base ad alcune sue misure e secondo la quale le velocità di propagazione degli o., sarebbero sempre maggiori di quelle dei m. e dei p. non è esatta; infatti nei composti ora esaminati si verifica l'opposto dei nitrotoluoli e nelle cloroaniline. La regola di Parthasarathy era del resto già stata messa in dubbio da Schaaffs [3].

Viceversa gli stessi risultati appaiono più facilmente interpretabili se si osservano, come negli altri casi citati, i rispettivi diagrammi delle velocità e delle compressibilità adiabatiche in funzione delle densità.

Essendo la variazione della velocità ultrasonora in funzione della temperatura praticamente lineare e scostandosi poco dalla stessa legge anche la variazione della densità, i diagrammi delle u in funzione delle densità, riportati, nella parte superiore della figura, risultano praticamente delle rette, per i campi di temperatura considerati. Si scostano invece più sensibilmente dalla legge lineare i diagrammi delle β in funzione della densità, riportati più in basso. Tuttavia nell'un caso come nell'altro è possibile estrapolare le rispettive curve in modo da rendere immediato il confronto a temperature alle quali gli isomeri presentano eguali densità anche nei casi in cui uno di essi, a causa della sua relativamente alta temperatura di fusione, sia stato esaminato ad una sola temperatura; ciò per il fatto che i coefficienti di temperatura delle velocità (di cui sono riportati i valori medii sperimentali per i rispettivi intervalli di temperatura nell'ultima colonna

(2) M. BACCAREDDA, A. GIACOMINI, loc. cit. (1).
(3) W. SCHAAFFS, « Ann. der Physik », *40*, 393 (1941).

della tabella) e delle densità risultano praticamente eguali per gli isomeri di uno stesso gruppo.

In particolare l'esame della figura mostra che per tutte le coppie o terne esaminate « ad eguali densità » le compressibilità adiabatiche degli isomeri m. e p. sono sempre più basse di quella dell'o.: la compressibilità adiabatica dell'isomero p. risulta all'incirca eguale a quella del m. negli xiloli, nei cresoli e nei nitrotoluoli, ne risulta inferiore nelle toluidine e ne risulta superiore nelle cloroaniline.

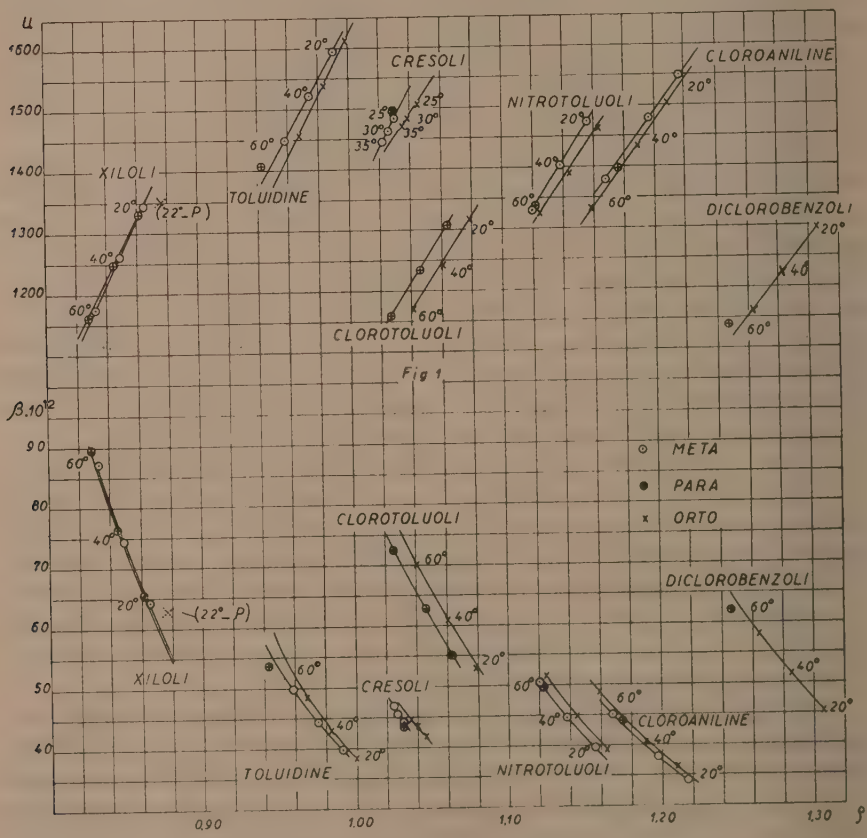


Fig 1

La maggiore compressibilità adiabatica ad eguali densità dell'isomero o. rispetto a quelle degli altri due isomeri è anche confermata da qualche altro dato della letteratura, relativo a misure di velocità ultrasonore. Così i valori di $u = 1352$ e $\beta = 62{,}4$ per l'o. xilolo alla temperatura di 22 °C ($\rho = 0{,}877$) determinati da Parthasarathy [4] ed i cui punti rappresentativi sono pure riportati nei diagrammi della figura confermano la regola di cui sopra. Anche i valori riportati dallo stesso autore per il m. e l'o. diclorobenzolo non contraddicono quanto sopra, almeno per quanto riguarda i valori relativi; è da notare che i prodotti esaminati

(4) S. Parthasarathy in: E. Hiedemann, *Ultraschallforschung*, pp. 228 230, Berlin (1939).

dall'autore indiano si discostano maggiormente che non i nostri nei valori della densità da quelli più attendibili della letteratura. Altri dati dello stesso Parthasarathy e di altri autori non sono riportati perchè i prodotti da essi esaminati non risultano, in base alle loro caratteristiche fisiche, sufficientemente puri.

Si osserva che il fatto ora dedotto che gli isomeri o. presentano compressibilità più elevate che non gli isomeri m. e p. appare logico nei riguardi delle conclusioni cui aveva portato lo studio delle velocità ultrasonore negli isomeri etilenici, tenute presenti le relative configurazioni che la stereoisomeria classica aveva a suo tempo attribuito ai diversi isomeri e le affinità strutturistiche tra le diverse classi di isomeri che essa aveva stabilito e che i metodi chimico-fisici di indagine moderni (momenti dipolari, analisi roentgenografica, ecc.) hanno più tardi confermato.

Infatti fin dal principio del secolo era stata messa in evidenza da Werner [5] e da altri sperimentatori [6] la corrispondenza di varie proprietà fisiche (punti di fusione, punti di ebollizione, densità, indici di rifrazione e rifrazioni molecolari, solubilità, costanti di dissociazione, ecc.) tra gli isomeri cis e o. da una parte e tra gli isomeri trans e p. dall'altra; tale corrispondenza veniva anzi spesso utilizzata per decidere in casi dubbi circa l'assegnazione della struttura (cis o trans, o. o p.) ad un determinato composto.

In base alle determinazioni della velocità ultrasonora risulta ora che, a parità di densità, alla maggiore compressibilità dei composti cis rispetto ai trans corrisponde anche una maggiore compressibilità dei composti o. rispetto ai p., ciò in accordo con le reciproche analogie strutturistiche delle due classi di isomeri.

D'altra parte la minore compressibilità degli isomeri m. e p. rispetto agli o. trova riscontro nell'analogia che si osserva frequentemente in molte altre proprietà fisiche negli isomeri m. e p.

Quando sopra conferma la stretta dipendenza della velocità ultrasonora e della compressibilità adiabatica dalla struttura molecolare e il contributo che può dare la loro determinazione nello studio di quest'ultima.

CONCLUSIONI. – La determinazione a diverse temperature delle velocità ultrasonore in alcune coppie e terne di isomeri bisostituiti del benzolo allo stato liquido (m. e p. xilolo, o. e p. diclorobenzolo, o. e p. clorotoluolo, o., m. e p. nitrotoluolo, o., m. e p. toluidina, o., m. e p. cloroanilina, o., m. e p. cresolo) ed il calcolo delle rispettive compressibilità adiabatiche in base alle velocità e alle densità dimostrano che, se si confrontano i diversi gruppi isomeri a temperature alle quali essi presentano eguali densità, le compressibilità adiabatiche degli isomeri o. esaminati risultano maggiori di quelle dei corrispondenti isomeri m. e p.

Data l'analogia strutturistica tra gli isomeri o. e cis da una parte e tra gli isomeri p. e trans dall'altra, tale risultato è da mettere in relazione con quello già ricavato dallo studio degli isomeri etilenici, che, nelle stesse condizioni di densità, presentano compressibilità più elevate nei composti cis che non nei composti trans.

(5) A. WERNER, *Stereochemie*, p. 212, Jena (1904).
(6) Vedi: K. FREUDENBERG, *Stereochemie*, pp. 749-752, Leipzig (1933).

Chimica. — *Sulla preparazione del fenil-etil-diclorosilano* (*). Nota di Luigi Riccoboni e Mario Zotta, presentata (**) dal Corrisp. G. Semerano.

Come è noto i clorosilani bisostituiti (R_2SiCl_2; R = radicale alchilico o arilico) trovano largo impiego come materiali di partenza nella preparazione di molti tipi di siliconi. Essi infatti, già all'atto della idrolisi, dànno luogo alla formazione di composti di condensazione risultanti dalla eliminazione di una molecola d'acqua per ogni molecola di composto primitivo e conseguente formazione del silicone ad anello esatomico (ad atomi di silicio e di ossigeno alternati) di composizione $\left(\begin{matrix}R_1\\R_2\end{matrix}\!\!>\!SiO\right)_3$.

Riscaldando questi prodotti di idrolisi primaria in presenza di ossigeno la condensazione prosegue con successivo distacco di radicali alchilici (sviluppo di aldeide); in presenza di HCl, invece, si allontanano radicali arilici (eliminazione di benzene). In entrambi i casi però, attraverso lo stabilirsi di nuovi ponti siloxanici, si arriva a materiali di aspetto simile alle resine artificiali, ai quali però la presenza delle catene silicio–ossigeno conferisce una eccezionale stabilità termica.

Va inteso ovviamente che le proprietà chimico–fisiche e tecnologiche dei prodotti ottenuti variano con la natura del radicale R unito al silicio, col rapporto fra il numero di valenze impegnate tra silicio e radicali organici e tra silicio e ossigeno, ovverossia con le condizioni e la durata del trattamento termico subìto.

Per quanto riguarda il tipo di radicale, a parità di rapporto R/silicio, nel caso in cui R = radicale arilico si ottengono sostanze dotate di elevata costante dielettrica, piccolo fattore di perdita anche a temperatura elevata (250° C.), però di basse proprietà meccaniche (scarsa flessibilità e limitata aderenza); se invece R = radicale alchilico, diminuiscono alquanto le proprietà isolanti, però le proprietà meccaniche risultano ottime (impiegabilità come vernici).

La presenza nella molecola della sostanza base di un radicale alchilico e di uno arilico rende pertanto possibile, col parziale allontanamento dell'uno o dell'altro o di entrambi, l'ottenimento di tutta una gamma di prodotti dotati di proprietà variabili col mutare delle condizioni di condensazione e in genere rispondenti nel modo più soddisfacente alle esigenze sopratutto elettromeccaniche di rivestimento ed impregnazione di complessi sia rotanti sia statici, per i quali si prevedano temperature di esercizio anche superiori ai 200° C.

Fra i diclorosilani di più semplice composizione il fenil-etildiclorosilano è uno dei composti più interessanti e più vantaggiosamente utilizzabili allo scopo (1).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica-fisica dell'Università di Padova.

(**) Nella seduta del 9 aprile 1949.

(1) Cfr. J. F. Hyde e R. C. De Long, « J. Am. Chem. Soc. », *63*, 1194 (1941); J. F. Hyde, U.S. 2.385.466 ottobre (1945); J. F. Hyde, U.S. 2.371.050 marzo (1945).

Nel corso di ricerche intese appunto a precisare le condizioni più favorevoli per l'ottenimento da questo prodotto di sostanze dotate di determinate caratteristiche tecniche, poichè non risultava dalla letteratura che fosse stato portato alcun perfezionamento al metodo di preparazione già proposto da Kipping [2] nel 1907, fu ritenuto utile ricercare eventuali condizioni che permettessero di rendere tale procedimento più economico e di resa più elevata.

PARTE SPERIMENTALE. - Secondo il procedimento di Kipping si prepara dapprima, con reazione tipo Grignard in soluzione eterea, l'etiltriclorosilano da bromuro di etile e tetracloruro di silicio. A 100 gr. di questo prodotto ben raffreddato si aggiunge poi lentamente un piccolo eccesso (1,1 : 1 mole) di bromuro di fenilmagnesio, il tutto ancora in soluzione eterea. Dopo aver fatto bollire a ricadere la miscela di reazione, il precipitato di sali di magnesio, divenuto in tal modo più cristallino, viene facilmente filtrato. Il liquido viene distillato una prima volta fino a 240° e con un vuoto di 50 mm. In seguito viene frazionato ripetutamente a pressione ordinaria raccogliendo il feniletilsiliciodicloruro fra 228°-232°. Si ottengono 40-50 gr. di prodotto con una resa dal 36 al 40%, valutata sulla quantità di etiltriclorosilano impiegata.

Nella scelta del nostro metodo di lavoro ci siamo invece preoccupati in primo luogo di ridurre al minimo la quantità di etere necessaria. A tale scopo si è preparato inizialmente il triclorofenilsilicio [$Si(C_6H_5)Cl_3$] da $SiCl_4$ e C_6H_5MgCl dato che questo reattivo di Grignard è ottenibile secondo P. Schorigin [3] per azione diretta di C_6H_5Cl su Mg in autoclave a 160° con una resa del 70% in assenza completa di etere. Vennero impiegati 50 gr. di trucioli di magnesio attivati con iodio e 200 gr. di clorobenzene anidro; l'autoclave era di rame, munita di agitatore. La massa di reazione, gialla polverulenta, venne rapidamente portata in un pallone con 200 cc. di benzene, in cui è solo parzialmente solubile; vennero aggiunti poi lentamente 250 gr. di $SiCl_4$, sciolti in 400 gr. di benzene sempre agitando energicamente. Dopo circa 10 ore di permanenza a temperatura ambiente e 4 ore a bagno maria a 90°, il prodotto di reazione venne filtrato e dette per distillazione 80 gr. di $C_6H_5SiCl_3$ e 20 gr. di $(C_6H_5)_2SiCl_2$. Il residuo commisto a sostanze resinose non venne ulteriormente frazionato.

In un pallone, munito di efficente agitatore, di imbuto a rubinetto e di refrigerante a ricadere, vennero posti 117 gr. di $C_6H_5SiCl_3$ (= 0,55 mole) sciolti in 200 cc. di etere anidro.

Venne quindi aggiunta una soluzione di C_2H_5MgBr preparata da 0,61 gr. atomi di magnesio e dalla quantità equivalente di C_2H_5Br e ciò allo scopo di avere le 0,55 mole richieste per la reazione con $C_6H_5SiCl_3$, quando si tenga conto della resa del 90% riscontrata da Gilman, Zoellner e Dickey [4] nella preparazione del bromuro di etilmagnesio.

Poco dopo l'inizio dell'aggiunta ha luogo la progressiva formazione di un precipitato bianco gelatinoso. L'aggiunta fu effettuata in un periodo di circa due

(2) « J. Chem. Soc. London », *91*, 215 (1907).
(3) B. *64*, 2588 (1931).
(4) « J. Am. Chem. Soc. », *51*, 1585 (1929).

ore, sempre agitando energicamente. Il prodotto di reazione venne lasciato una notte in riposo e poi riscaldato a bagnomaria per dieci ore: con ciò la massa di sali di magnesio progressivamente cristallizza separandosi in uno strato molto bianco e pesante dal sovrastante liquido giallo chiaro. Impiegando un dispositivo a doppia campana, il prodotto della reazione, preventivamente raffreddato, venne filtrato su setto di vetro poroso in completa assenza di umidità. Il liquido filtrato, cui vennero aggiunti circa 200 cc. di etere anidro di lavaggio della massa salina, venne distillato in pallone Cleisen. L'etere venne eliminato prima a pressione ambiente e le ultime porzioni ad un vuoto finale di 30 mm; portato successivamente il vuoto a 13 mm, si raccolse una prima frazione a 70–110° e una seconda nell'intervallo 110–118°. La prima frazione, ridistillata impiegando una colonna di Widmar, dette 74,25 gr. di prodotto distillante a 13 mm nell'intervallo 96–102°. La seconda frazione, distillata nelle medesime condizioni, dette 12 gr. di prodotto nell'intervallo 103–115°. Il primo prodotto presentava all'idrolisi un titolo in cloro corrispondente ad un contenuto praticamente del 100% in fenil-etildiclorosilano, il cui punto di ebollizione è 100° a 13 mm secondo J. F. Hyde e R. C. De Long [5]. Il secondo prodotto (103-115°), denunciante già dall'odore la presenza di difenile, dette un titolo in cloro che, attribuito tutto al composto $C_6H_6 \cdot C_2H_5 \cdot SiCl_2$, corrispondeva ad un contenuto del medesimo in ragione del 79% (9 gr.).

Pur limitandoci a considerare solamente come utile la prima frazione, la cui purezza è certamente superiore a quella del prodotto finale di Kipping, dato che, per un intervallo di temperatura circa identico, la distillazione è stata condotta a 13 mm in luogo di 760, risulta quindi una resa, riferita alla quantità di $C_6H_5SiCl_3$ impiegata, pari a 65%.

Va fatto presente inoltre che il procedimento su riferito presenta un certo interesse anche per il fatto che il feniltriclorosilano, che in questo caso rappresenta il prodotto primario, è ottenibile con buone rese per sintesi diretta inviando ad adeguata temperatura vapori di clorobenzene sia su leghe silicio-rame [6], come pure su leghe silicio-ferro [7].

Per una giustificazione, almeno qualitativa, del risultato ottenuto, si può far presente che, pur ammettendo approssimativamente eguale la tensione del cloro nei due composti $C_6H_5SiCl_3$ e $C_2H_5SiCl_3$ a causa della relativa piccola influenza dei due gruppi C_6H_5 e C_2H_5 sull'eccesso di altri tre atomi di cloro ancora presenti, rispetto alla molecola di $SiCl_4$, deve venir considerata la notevole diversità esistente nella attività dei due composti di Grignard che si debbono impiegare per giungere al medesimo prodotto finale $C_2H_5C_6H_5SiCl_2$.

Il comportamento chimico (facilità di formazione, tendenza all'idrolisi, ecc.) dei due composti di Grignard parla in favore di una maggiore reattività del composto etilico, e ciò del resto risulta in accordo con la posizione dei due radicali nella scala di « elettronegatività », quale è stata proposta da Kharasch

(5) « J. Am. Chem. Soc. », *63*, 1194 (1941).

(6) E. G. Rochow, « J. Am. Chem. Soc. », *67*, 963 (1945); E. G. Rochow e W. F. Gilliam, « J. Am. Chem. Soc. », *67*, 1772 (1945).

(7) L. Riccoboni e M. Zotta, « J. Soc. Chem. Industry », *67*, 235 (1948).

e Collaboratori [8] in base al comportamento idrolitico rispetto HCl di composti organomercurici asimmetrici. Sembra quindi logico ritenere che la preparazione del composto bisostituito da quelli monosostituiti già isolati debba compiersi con maggiore facilità usando il derivato di Grignard etilico e il triclorofenilsilano. Il risultato ottenuto nella descritta preparazione indica l'opportunità di un esame dettagliato della stabilità relativa dei composti organosilicici. È nostra intenzione dedicare a questo argomento ulteriori ricerche.

Chimica biologica. — *Dosaggio separato dei piridin nucleotidi e della* N_1*–metilnicotinamide dei tessuti mediante l'azione della nucleosidasi* [*]. Nota di ARTURO BONSIGNORE, presentata [**] dal Corrisp. U. LOMBROSO.

Piridin nucleotidi ossidati (DPN e TPN) e N_1–metilnicotinamide, composti contenenti un N piridinico quaternario, dànno, in ambiente alcalino in presenza di acetone, origine ad un composto intensamente fluorescente che è stato utilizzato per la determinazione di tali composti nell'urina [1] e nei tessuti [2].

In una serie di precedenti ricerche ci si è presentata la necessità di dosare separatamente i due composti tanto più che è stata da noi prospettata una relazione metabolica tra di essi [3].

In un primo tempo la titolazione separata dei due composti è stata da noi eseguita utilizzando la proprietà dei piridin nucleotidi di trovarsi nei tessuti parte in forma ridotta e parte in forma ossidata, mentre l'N_1–metilnicotinamide (come è risultato da prove di carico e di incubazione *in vitro* in varie condizioni sperimentali) non ha tale proprietà. Pertanto, la fluorescenza del prodotto di condensazione acetonica veniva da noi attribuita sia ai piridin nucleotidi ossidati, sia all'N_1–metilnicotinamide; dosando dopo trattamento ossidativo di Robinson con solfato cerico [2] (e quindi trasformazione dei piridin nucleotidi ridotti in ossidati) per differenza ottenevamo il valore separato dell'N_1–metilnicotinamide e dei piridin nucleotidi, prendendo come base di riferimento le cifre fornite dalla letteratura sulle rispettive proporzioni dei piridin nucleotidi ridotti ed ossidati. Tale tecnica ci ha permesso di giungere ad interessanti conclusioni relative alla cospicua sintesi di piridin nucleotidi nel fegato di ratto in seguito a trattamento con nicotinamide e alla contem-

(8) M. S. KHARASCH e M. W. GRAFFLIN, « J. Am. Chem. Soc. », *47*, 1948 (1925); « Science », *58*, 1510 (1923); KHARASCH e W. MARKER, « J. Am. Chem. Soc. », *48*, 3130 (1926); KHARASCH e A. L. FLENNER, « J. Am. Chem. Soc. », *54*, 674 (1932); KHARASCH, O. REINMUTH e F. R. MAYO, « J. Chem. Educat. », *11*, 82 (1934).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Biologica dell'Università di Genova.

(**) Nella seduta del 12 marzo 1949.

(1) J. V. HUFF e W. A. PERLZWEIG, « J. Biol. Chem. », *167*, 157 (1947).

(2) J. ROBINSON e N. LEVITAS, F. ROSEN, W. A. PERLZWEIG, « J. Biol. Chem. », *170*, 653 (1947).

(3) A. BONSIGNORE e C. RICCI, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », *24*, 171 (1948).

poranea eliminazione urinaria di N_1-metilnicotinamide, nonchè alla dimostrazione che la N_1-metilnicotinamide non dimostra capacità particolari di accumulo in qualche tessuto; infatti dopo un rapido aumento che avviene nel fegato come in tutti gli altri tessuti e nel sangue, subito dopo la sua somministrazione per via parenterale agli animali da esperimento, rapidamente si ha un ritorno ai valori di partenza, di solito prima della seconda ora dal trattamento.

Tuttavia abbiamo potuto osservare che l'azione ossidante del solfato cerico può talvolta influire sulla formazione del composto fluorescente tanto da non poter avere valori sicuramente utilizzabili quando si trattava di dimostrare *in vitro* od *in vivo* l'eventualità di una trasformazione dei piridin nucleotidi in N_1-metilnicotinamide o viceversa.

Ricordiamo a questo proposito che l'ipotesi a cui noi siamo arrivati attraverso numerose esperienze è che la N_1-metilnicotinamide rappresenti uno dei principali prodotti di demolizione dei piridin nucleotidi.

Oggetto della presente Nota è quello di riferire come noi siamo pervenuti alla separazione esatta dei due derivati piridinici con metodo relativamente semplice utilizzando l'azione nucleosidasica che distacca la parte piridinica dal resto della molecola dei piridin nucleotidi. È precisamente a tale azione nucleosidasica che era attribuibile quella rapida demolizione del composto dosabile come N_1-metilnicotinamide da noi riscontrata nel 1947 e non inibita dai comuni inibitori delle ossidazioni. Tale mancata inibizione che già allora ci fece dubitare trattarsi di N_1-metilnicotinamide dobbiamo oggi considerarla come una dimostrazione che DPN^{asi} e TPN^{asi} non sono inibite da tali inibitori, mentre l'inibitore più attivo si è rivelato la nicotinamide stessa.

Poichè invece il derivato N_1-metilato della nicotinamide non si demolisce quando viene incubato *in vitro* a 38°, noi abbiamo pensato che in base a tale differente comportamento poteva essere effettuata la titolazione separata dei due composti e cioè in un primo tempo il dosaggio dei due composti contemporaneamente ed in un secondo tempo dosaggio dopo il manifestarsi dell'azione nucleosidasica con conseguente demolizione dei piridin nucleotidi, per differenza si sarebbe ottenuto il valore della N_1-metilnicotinamide.

In una serie di esperienze abbiamo dimostrato che l'azione nucleosidasica del fegato di ratto, al quale per ora sono limitate le nostre esperienze, si manifesta sia in poltiglie, sia in fettine, e ancora maggiormente in omogeneizzati; la maggior rapidità dell'azione nucleosidasica in omogeneizzati si spiega, ed è in perfetto accordo, con quanto osservato da altri autori precedentemente e che cioè tale azione si manifesta appena si inizia la rottura dell'integrità cellulare, condizione che indubbiamente si verifica al massimo negli omogeneizzati di fegato ottenuti con un omogenizzatore tipo Waring.

Riportiamo in tabella i risultati ottenuti e che dànno la dimostrazione esatta di come si può giungere ad una precisa determinazione dei piridin nucleotidi e della N_1-metilnicotinamide con una tecnica che è basata sulla reattività dell'azoto piridinico quaternario comune ad entrambi i composti.

TABELLA I.

Esperienze eseguite sopra omogeneizzati di fegato di ratto (rapporto fegato fresco; acqua usata per omogeneizzare 1 : 20. Le prove contenevano 8 cc. di omogeneizzato. Volume finale dopo le aggiunte di DPN e di N_1-metilnicotinamide, e dopo la interruzione dell'azione enzimatica, con acido tricloroacetico cc. 11. I dosaggi del composto fluorescente di condensazione acetonica sono stati eseguiti sopra 1/20 delle prove. Tutti i valori sono espressi in unità di fluorescenza. Temperatura di incubazione 38°. Gas aria).

Prova	Aggiunta	Quantità aggiunta	Prima della azione nucleosidasica *a*	Dopo l'az. nucleotid. *b*	*a*–*b* DPN+TPN	*b* N_1-metilnic.
Fegato	nessuna	—	5	0	5	0
»	N_1-metilnic.	17	23	17	6	17
»	»	8,5	13	8	5	8
»	»	4,25	9	4	5	4
»	nessuna	—	3	0	3	0
»	DPN	3	6	0	6	0
»	DPN	1,5	4,5	0	4,5	0
»	DPN+	3	21	15	6	15
»	N_1-metilnic.	15				
»	»	15	19	15	4	15

TABELLA II.

Composizione delle prove come nella tabella I. Valori espressi in gamma di piridin nucleotidi ossidati e in gamma di N_1-metilnicotinamide.

DPN aggiunto	N_1-metilnic. aggiunta	Dopo 1h azione nucleosidasica		Ritrovato secondo il calcolo dopo incubazione	
		DPN+TPN	N_1 metilnic.	DPN+TPN	N_1 met.
42	—	0	0	100%	—
21	—	0	0	100%	—
—	92	0	89	—	96%
42	92	0	89	104%	96%

Chimica biologica. — *Deidrogenazione dei grassi epatici da perfrigerazione.* Nota di STEFANO BOCCHIOTTI e SANDRO PONTREMOLI, presentata (*) dal Corrisp. U. LOMBROSO.

Mayer e Schaeffer (1) nel 1914 studiando le variazioni del tasso lipidico dei tessuti in animali sottoposti con bagno a 9 gradi C. ad un abbassamento della temperatura interna (30 gradi C.) trovarono un notevole aumento dei fosfolipidi epatici. Questo innalzamento scompariva nel giorno seguente ed i valori di tale frazione raggiungevano la norma; l'animale scelto per queste esperienze era il cane.

Nel 1923 l'Artom (2) studiando le variazioni del tasso lipidico epatico in animali stiroidati, trovò che i fosfatidi diminuivano costantemente e considerevolmente. Questi risultati orientavano sempre più a considerare la frazione fosfatidica quale agente della combustione dei grassi.

Più tardi Zummo (3) si proponeva di risolvere il quesito del perchè animali di specie diversa, nutriti con uguale tipo di cibo, avevano un grasso a punto di fusione ben preciso per ogni specie: dato che apposite ricerche avevano dimostrato anche la possibilità di un deposito di grasso eterogeneo, quando ad un animale dimagrito si somministrava all'improvviso grande quantità di tale grasso; e del perchè la qualità del grasso di ogni singolo animale veniva a variare quando si variavano le condizioni ambientali in cui l'animale viveva, e precisamente si variava la temperatura esterna pur mantenendo costante il tipo di alimentazione. A questo proposito lo Zummo studiò gli effetti della variazione della temperatura esterna sul punto di iodio dei grassi di deposito di ratti (dopo un digiuno di 72 ore) a cui era somministrata una stessa dieta ricca di idrati di carbonio e priva di lipidi. I ratti erano divisi in due gruppi e sottoposti rispettivamente ad una temperatura vicino allo 0 gradi nel I° gruppo; e vicino ai 30 gradi nel II° gruppo. Egli osservò che si formavano notevoli quantitativi di grasso con un punto di iodio molto differente (del 15 %, 25 %) a seconda che gli animali erano vissuti alla temperatura di 0 gradi o di 30 gradi.

Proseguendo, l'Autore somministrò a ratti della stessa specie, tenuti a digiuno da 72 ore, grassi di una precisa qualità a forte contenuto di acido oleico (olio di oliva) o scarsissimi di tale acido grasso (sego di bove) e dopo esposizione a 0 gradi circa, e a 30 gradi circa, come nella esperienza precedente, studiò il punto di iodio dei grassi di deposito. Egli osservò che, tra animali vissuti a bassa temperatura, e quelli vissuti ad alta, vi era sempre una differenza del punto di iodio come nei precedenti, indipendentemente dal tipo di alimentazione usata.

Dal complesso di queste ricerche viene in modo chiaro dimostrata la particolare influenza che la temperatura esterna ha nel determinare la struttura dei

(*) Nella seduta del 9 aprile 1949.

(1) MAYER e SCHAEFFER, « J. Phjsiol. Pathol. gen. », 1914, XVI, 325.

(2) C. ARTOM, « Arch. Sc. Biol. », 1923, V, 22.

(3) C. ZUMMO, « Arch. Fisiol. », 1930, XXXI, 189.

grassi di deposito e nel contempo che l'organismo reagisce contro l'introduzione di grassi eterogenei per renderli corrispondenti alla specificità individuale in stretta correlazione alle condizioni ambientali.

Rimaneva da studiare dove poteva svolgersi questa modificazione dei doppi legami dei grassi alimentari o di quelli di origine endogena (dai glucidi). Giova a questo proposito ricordare le esperienze di Lombroso e di De Frisco [4] che ci additano il fegato come un organo in cui i processi di saturazione e desaturazione sono attivi, senza per altro escludere la presenza anche in altri tessuti di attività deidrogenanti. Essi infatti somministrarono a cani digiunanti grasso di bove, cioè ad alto punto di fusione e povero di grassi insaturi, e sacrificarono l'animale nel periodo di assorbimento. Sui vari campioni del fegato ridotto in poltiglia, e posto in autolisi asettica, i valori del punto di iodio, attraverso oscillazioni varie, raggiungevano infine una cifra quasi costante vicina al solito percentuale (100/115). Lo stesso risultato ottennero somministrando a cani digiunanti olio di lino a basso punto di fusione e costituito da acidi grassi con due doppi legami. Anche in questi casi nei campioni terminali del fegato ridotto in poltiglia e posti in autolisi asettica, il valore del punto di iodio raggiungeva limiti vicini al solito percentuale (110).

Queste ricerche dimostrerebbero che il fegato agisce con molta efficacia sui grassi modificando il loro punto di iodio, sia nel senso di aumentare, sia nel senso di ridurre il numero dei doppi legami, e ciò in modo da condurre ad uno stato pressochè costante, pure partendo da grassi alimentari assai diversi sotto questo punto di vista.

Considerando questi risultati, conoscendo d'altra parte come la bassa temperatura abbia un effetto ipermetabolico violento, che tutto induce a ritenere dovuto a combustione dei grassi mobilizzati nella lotta contro il freddo [Schaeffer e Pollak [5], Kaiser e Dell [6], Kaiser [7]], ci è sembrato interessante controllare gli effetti sopra i detti legami dei grassi epatici dell'animale sottoposto a perfrigerazione.

Le nostre esperienze furono eseguite su cavie; di queste otto vennero usate quale controllo, dodici invece servirono nell'esperienza da perfrigerazione.

Gli animali venivano immersi in acqua fredda per cinque minuti e quindi si introducevano in un frigidaire (parte inferiore) dove la temperatura raggiungeva un valore tra i due e i quattro gradi. Dopo trenta minuti venivano rapidamente sacrificati con un colpo alla nuca, si estraeva il fegato, e asportata la vescichetta lo si introduceva in quattro o cinque volumi di alcool a 95°.

Si omogeinizzava in frullino elettrico e si sottoponeva a ebollizione a ricaduta per trenta minuti. Si filtrava, si distillava, si riprendeva il residuo con etere di petrolio; si rifiltrava, si distillava nuovamente ed il residuo accuratamente pesato serviva per determinare il punto di iodio seguendo la tecnica di Wiss, che consiste nello sciogliere il grasso con tetracloruro di carbonio e aggiungere tricloruro di iodio in soluzione acetica.

(4) U. LOMBROSO, «Boll. Soc. Biol. Sper.», 1927, VII, 765.
(5) SCHAEFFER, POLLAK, 1938, «C. R. Soc. Biol.», CXXIV, 867.
(6) KAISER, DELL, «C. R. Biol.», 1937, CXXXVI, 698.
(7) KAISER, «C. R. Biol.», CXXVI, 678.

I dati sperimentali ottenuti sono riportati dalla seguente tabella:

DATI SPERIMENTALI.

Cavie normali				Cavie sottoposte a perfrigerazione			
N.	Peso gr.	Numero di Iodio	Media	N.	Peso gr.	Numero di Iodio	Media
1	310	76		1	280	139	
2	270	77		2	260	141	
3	310	81		3	340	143	
4	380	76		4	290	129	
5	300	80		5	350	138	
6	290	77		6	240	143	
7	210	76		7	325	130	
8	270	71		8	310	133	
				9	240	131	
				10	190	138	
				11	340	129	
				12	350	143	
			$77 \begin{matrix} +4 \\ -6 \end{matrix}$				$135 \begin{matrix} +8 \\ -6 \end{matrix}$

Dopo le cavie, abbiamo eseguito l'esperienza sul cane, per controllare se questo alto punto di iodio raggiunto nel grasso di fegato rappresentasse un fenomeno transitorio al quale il tessuto stesso del fegato reagisse in seguito, così come era stato visto dopo ingestione di grassi eterogenei.

Due esperienze eseguite, pur non ritenendo risolto il quesito, ci dimostrerebbero una relativa costanza di questi doppi legami del fegato di cani perfrigerati che si manteneva in esperienze di poltiglia in autolisi asettica dopo 80 ore su un valore costante di circa 130, mentre in quelli normali il numero di iodio è di circa 75/80.

Concludendo quindi: dalle ricerche descritte risulta che i grassi estraibili dal fegato di cavie alimentate normalmente a dieta vegetariana e con crusca, presentano un punto di iodio molto stabile con variazioni in più o in meno limitatissime ($+4$ -6). Se l'animale è sottoposto a freddo si ha un improvviso accrescersi dei doppi legami che diventano del 60 % e più, superiore a quello riscontrato normalmente.

Scienza dell'Alimentazione. — *Sull'assorbimento delle albumine e globuline del siero di sangue* (*). Nota di CESARE ARDY e UGO DACHÀ, presentata (**) dal Corrisp. U. LOMBROSO.

Il problema riguardante la forma sotto cui vengono assorbiti i protidi introdotti con l'alimentazione è ancora discusso e non completamente risolto.

Infatti la teoria classica che tutte le proteine, prima di essere assorbite debbano essere degradate nella digestione idrolitica sino ad aminoacidi, va accolta con delle riserve. Vi sono infatti molti argomenti che dimostrano come, seppure normalmente le molteplici attività enzimatiche dell'apparato gastroenterico esplichino il compito di denaturare le proteine e togliere loro il compito di antigene, e sebbene la mucosa intestinale sia particolarmente resistente a lasciarsi attraversare da materiale ad altissimo peso molecolare, però in alcune condizioni, anche protidi intieri possano attraversare la barriera intestinale. I fenomeni allergici che si manifestano in alcuni individui od animali che hanno ingerito particolari proteine, dimostrano infatti che l'assorbimento intestinale dell'Azoto può anche avvenire, seppure eccezionalmente, sotto forma di proteine integre.

Questa infatti è l'unica interpretazione che si può dare, al lume delle odierne conoscenze, all'insorgere delle reazioni anafilattiche che si manifestano dopo ingestione di particolari corpi proteici. Tale assorbimento è anche sperimentalmente dimostrabile.

Ratner e Gruehl (1) osservarono ad esempio che il 50 % di un lotto di cavie poteva essere sensibilizzato dalla somministrazione per os di latte di vacca; e che il 25 % di un altro lotto di cavie sensibilizzato per iniezione intraperitoneale dello stesso antigene, presentava uno schok anafilattico dopo ingestione di quel latte. Wilson e Walzer (2) iniettarono sottocute a bambini che non avevano mai mangiato uova, siero di sangue di individui che presentavano allergia verso il bianco d'uovo; dei bambini così trattati una larga parte presentò manifestazioni anafilattiche dopo l'ingestione di bianco d'uovo.

Anche Barnes e Bueno (3) ottennero manifestazioni allergiche introducendo tireoglobulina nello stomaco di cavie, precedentemente sensibilizzate con queste proteine.

Alexander, Shyrley e Allen (4) dopo aver dato in pasto a cani bianco d'uovo, poterono dimostrare con reazioni precipitanti la presenza delle proteine intiere dell'uovo nella linfa del dotto toracico, non in quello della vena porta.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisiologia Umana dell'Università di Genova.
(**) Nella seduta del 9 aprile 1949.
(1) B. RATNER e H. L. GRUEHL, « J. Clin. Invest. », *13*, 517 (1934).
(2) S. J. WILSON e M. WALZER, « Am. J. Dis. Child. », *50*, 49 (1935).
(3) B. O. BARNES e J. G. BUENO, « Am. J. Physiol. », *103*, 570 (1933).
(4) H. L. ALEXANDER, K. SHIRLEY e D. ALLEN, « J. Clin. Invest. », *15*, 163 (1936).

McKhann, Green, Eckles e Davies [5] osservarono che nell'immunizzazione dei bambini contro il morbillo con somministrazione orale di proteine placentari, si dimostrarono più attive le proteine a maggior peso molecolare mentre gli amino acidi prodotti dalla loro idrolisi totale erano del tutto inefficaci.

E non soltanto i fenomeni allergici sono stati utilizzati per dimostrare che la vecchia teoria non è completamente accettabile. Anche altre disposizioni sperimentali conducono a queste conclusioni:

Si tratta delle esperienze di Omi (1909), di Messerli (1913) di Sarzana (1933) e di uno di noi (1938–1946) eseguite su cani operati di fistola intestinale alla Vella.

Omi [6] studiando l'assorbimento intestinale del siero di sangue di cane, di bove e di cavallo, notò, nello spazio di mezz'ora, un'assorbimento di siero di sangue di cane sino al 25 %, mentre non ottenne alcun assorbimento con siero di sangue di bove e solo un accenno con quello di cavallo.

Messerli [7] studiò l'assorbimento di siero di sangue (non indica di quale animale), di caseina; di gliadina, emoglobina e peptone e notò assorbimento dell'N del siero in misura corrispondente a quella del peptone e in misura molto superiore all'assorbimento con caseina. Secondo Messerli l'assorbimento di siero sarebbe costante per ogni dieci minuti consecutivi e non sarebbe influenzato dall'aggiunta di amino acidi al siero.

Sarzana [8] non ottenne, sempre sperimentando sul cane, alcun assorbimento con siero di sangue di bove, mentre invece notò che si assorbiva la caseina.

Dachà [9] studiando l'assorbimento intestinale di sieri di sangue (di bove e di cane) notò che avviene l'assorbimento dell'N del siero di sangue di cane e non di quello di bove e che, normalmente, l'assorbimento dell'N del siero di sangue di cane è un fenomeno rapido in quanto, prolungando la durata dell'esperienza oltre 30′ non si ottengono variazioni apprezzabili dell'N assorbito. In qualche caso prolungando l'esperienza oltre la mezz'ora si ottenne una escrezione maggiore di N, dovuta forse all'N del succo enterico secreto. Successive esperienze [10] eseguite con la reintroduzione nell'ansa alla Vella del siero di sangue estratto dopo una prima introduzione, dimostrarono che non si ottiene un'ulteriore assorbimento dell'N e che pertanto l'assorbimento di N del siero di sangue, quando avviene, è un fenomeno rapido e non progressivo; il chè fa supporre che si esaurisca una precisa frazione del contenuto azotato del siero di sangue, che è assorbibile dalla mucosa intestinale.

(5) C. F. McKhann, J. A. W. Davies, A. A. Green, C. E. Eckles, «Ann. Int. Med.», *9*, 388 (1935).

(6) K. Omi, «Pflügers Arch.», *126*, 428 (1909).

(7) H. Messerli, «Bioch. Ztsft.», *54*, 446 (1913).

(8) G. Sarzana, «Boll. Soc. It. Biol. Sper.», *8*, 1230–1232 (1933).

(9) U. Dachà, «Boll. Soc. It. Biol. Sper.», *13*, 175 (1938); «Atti Soc. Sc. Lettere di Genova», *3*, 190 (1938).

(10) U. Dachà, «Boll. Soc. It. Biol. Sper.», 23, 267 (1947); «L'Informatore Medico», sez. clin. scient., *1*, 183 (1946).

L'assorbimento del siero di sangue fece supporre al Lombroso [11] che l'N assorbito rappresentasse un materiale diverso dalle proteine specifiche del siero e che potesse essere dovuto alla presenza in esso di peptidi su cui potesse agire l'enzima erepsinico. Infatti, in analogia con precedenti ricerche di McGee e Emery [12] anche nostre ricerche personali [13] eseguite su un idrolizzato di caseina (Amigen) hanno dimostrato che l'N peptidico si assorbe in misura maggiore e con velocità superiore dell'N aminico.

Nelle presenti ricerche ci siamo proposti di studiare il fenomeno dell'assorbimento intestinale di siero di sangue di cane, sempre esperimentando con ansa alla Vella di cane, nei riguardi delle frazioni albuminica e globulinica del siero stesso, allo scopo di poter avere qualche dato più preciso su tale argomento.

TECNICA. – Le esperienze vennero condotte come segue:

10 cc di siero di sangue di cane venivano introdotti nell'ansa alla Vella di altro cane, previamente lavata con soluzione fisiologica a 37° (disponevamo di due animali operati in tal modo) e vi erano mantenuti per 30′; trascorso tale periodo di tempo si effettuavano ripetuti lavaggi dell'ansa con soluzione fisiologica a 37° gradi; il liquido di lavaggio era mescolato con il siero che era spontaneamente uscito dall'ansa dopo 30′. Su questo liquido, e su 10 cc dello stesso siero di sangue, un cui campione era stato introdotto nell'ansa, si praticavano i seguenti dosaggi:

1° determinazione dell'N totale;
2° determinazione dell'N albuminico;
3° determinazione dell'N residuo.

L'N globulinico veniva calcolato per differenza fra il totale e l'albuminico addizionato al residuo. L'N totale veniva dosato con il metodo di Kjeldahl. L'N albuminico con il metodo di Howe modificato da Robinson, Price e Hogden [14] e successiva determinazione con il micro–Kjeldahl; l'N residuo con il micro–Kjeldahl dopo precipitazione delle proteine con acido tricloroacetico. Notiamo per inciso che, pur a conoscenza del più recente metodo di Majoor [15] per la determinazione dell'N albuminico, abbiamo usato il metodo di Howe, modificato come è stato detto, avendoci esso dato sempre risultati costanti.

Riportiamo nella tabella i risultati ottenuti in 4 esperienze; nella colonna dell'N introdotto i numeri indicano i milligrammi di N delle varie frazioni contenuti in 10 cc di siero. Nella colonna « N estratto » i numeri indicano i milligrammi di N delle varie frazioni contenute nel siero fuoruscito dall'ansa dopo 30′ più il liquido di lavaggio. Nella terza colonna è riferito l'assorbimento percentuale.

Dalle nostre esperienze risultano ancora confermate le precedenti citate ricerche sull'assorbimento intestinale di siero di sangue di cane in ansa alla Vella di cane.

(11) U. LOMBROSO, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », *13*, 489–530 (1938).
(12) L. C. MCGEE & F. S. EMERY, « Proc. Soc. Exper. Biol. Med. », *45*, 475 (1940).
(13) U. DACHÀ e C. ARDY, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », in corso di stampa.
(14) H. W. ROBINSON, J. W. PRICE, C. G. HOGDEN, « J. Biol. Chem. », *120*, 481–498 (1937).
(15) C. L. H. MAJOOR, « Yale J. Biol. Med. », *18*, 419 (1946).

Tabella.

Numero esperienza	Azoto introdotto				Azoto estratto				Assorbimento percentuale			
	N totale	N albuminico	N globulinico	N non proteico	N totale	N albuminico	N globulinico	N non proteico	N totale	N albuminico	N globulinico	N non proteico
1ª	124	79	39	6	106	63	35	8	14 %	20 %	10 %	—
2ª	99	66	30	3	90,2	56,3	29,9	4	8,8 %	14 %	—	—
3ª	112	63	41	7	98	54	38	6	12 %	14 %	7 %	14 %
4ª	125	80	34	7	102	66	30	6	15 %	17 %	13 %	14 %

Risulta inoltre che la percentuale di N albuminico del siero di sangue assorbito è superiore, in qualche caso in misura notevole, a quella dell'N globulinico.

Le cifre di N albuminico assorbito debbono considerarsi in realtà ancora superiori a quelle riportate nella nostra tabella se si tiene presente che nel succo enterico, in ripetute esperienze, non abbiamo mai riscontrato presenza di N globulinico in quantità apprezzabili, ma soltanto N albuminico e N non proteico.

Quindi l'assorbimento reale dell'N albuminico del siero di sangue è certamente avvenuto in misura superiore a quella indicata, dato che le cifre di N albuminico estratto dall'ansa comprendono anche, in varia misura, frazioni di N albuminico appartenenti al succo enterico secreto dall'ansa durante l'esperienza.

Geologia. — *Stratigrafia del deposito quaternario della grotta Marilisa da Schio nei Colli Berici (Vicenza).* Nota (*) di Piero Leonardi, presentata (**) dal Corrisp. Giambattista Dal Piaz.

Uno dei più interessanti problemi relativi alla stratigrafia dei depositi quaternari di alcune grotte è rappresentato dal fatto che in qualche luogo vennero rinvenuti associati in uno stesso strato resti fossili di specie pleistoceniche (specialmente *Ursus spelaeus* Blum.) e cocci fittili neo–eneolitici o anche più recenti, che sono indubbiamente olocenici.

Questo fenomeno si presenta anche nel deposito che fu oggetto di un recente scavo ad opera dello scrivente e i risultati delle ricerche hanno messo chiaramente

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Geologia dell'Università di Padova e compreso nel programma del Centro Studi di Petrografia e Geologia del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 9 aprile 1949.

in luce il processo di rimaneggiamento cui è dovuta la curiosa associazione di resti così discordanti.

La *Grotta Marilisa da Schio* (1) è situata sul ripido pendio sottostante al pittoresco eremo di S. Cassiano presso Lumignano. La bocca della caverna si apre in un « riparo sotto roccia » il cui suolo è costituito da uno strato di terra grassa ricca di cocci (Strato A).

La grotta, abbastanza ampia (41 metri di lunghezza), è preceduta da una piccola anticamera e da un arcone denominato « volta delle marmotte », e divisa in tre cavità largamente comunicanti, la « sala della cupola » al centro, la « sala degli orsi » a destra, e la « sala del camoscio » a sinistra.

La sala centrale ha il suolo ricoperto da enormi massi provenienti da un franamento della vòlta. Quest'ultima e le pareti sono in gran parte rivestite da concrezioni, che, specialmente nella sala del camoscio, assumono talora forme graziosissime. Nella sala degli orsi le pareti presentano, in alcuni punti più sporgenti, superfici fortemente levigate, analoghe a quelle scoperte da O. Abel nella Drachenhohle di Mixnitz in Austria, e anch'esse con molta probabilità dovute allo sfregamento della pelliccia degli orsi spelei, le cui ossa si trovano sparse sul suolo della grotta, specialmente in quella sala che appunto per questi fatti abbiamo denominato « degli orsi ». La scoperta ha un notevole interesse, trattandosi, per quanto so, del primo esempio di questo fenomeno finora segnalato in Italia.

Nel « talus » antistante alla bocca e nel deposito di riempimento è stata scavata finora una trincea lunga una decina di metri e larga da un metro a un metro e mezzo, profonda in qualche punto fino a m. 2.50. Non si è ancora riusciti a raggiungere il fondo roccioso della grotta.

Il deposito, nell'interno della cavità, consta di due complessi ben distinti. Il primo, più antico (G), comprende la più gran parte del deposito stesso ed è costituito da un materiale sabbioso dalla tinta giallastra molto chiara, quasi bianca nella parte superficiale (G'), poi man mano più scura verso il basso (G''), contenente gran quantità di massi calcarei spesso enormi caduti dalla vòlta, e, nella parte più alta, poche ossa di orso speleo, gatto selvatico e cinghiale, che, come già dissi, si rinvengono anche in superficie tra i sassi, dove questo deposito affiora, assieme a resti di camoscio (finora mai segnalato nei Berici), marmotta e tasso. Siccome in questa formazione non venne finora rinvenuto alcun frammento fittile, riteniamo che, per i resti fossili che contiene, essa possa riferirsi con molta probabilità al Pleistocene.

Gli scavi finora eseguiti assieme al Conte Alvise da Schio permettono di stabilire che una parte di questo deposito, la più superficiale e più prossima alla parete esterna della grotta, è stata asportata da acque torrentizie, che, penetrando probabilmente nella grotta da un inghiottitoio sovrastante alla sala degli orsi, si scavarono una specie di alveo nel deposito pleistocenico.

(1) La grotta è dedicata alla maggiore delle bambine del Conte Alvise da Schio, proprietario del fondo in cui essa si apre, il quale, appena scoperta la grotta – finora completamente ignorata – mi invitò gentilmente a visitarla, e, riconosciutone l'interesse, a procedere allo scavo regolare del deposito, assumendosi tutte le spese relative e partecipando personalmente alle ricerche. Mi è grato qui esprimergli la mia viva gratitudine per il suo illuminato mecenatismo.

Il materiale così asportato venne poi sostituito da un complesso terroso bruno (B–C–D) contenente associati ossa di orso speleo e di marmotta (di quest'ultima si sono rinvenuti quattro bei crani) strappate al deposito pleistocenico asportato e cocci fittili introdotti nella grotta assieme al terriccio e derivanti probabilmente dal dilavamento del pendio sovrastante. Ciò spiega la curiosa coesistenza – cui sopra accennai – dell'orso speleo e dei cocci fittili in vari depositi, che ha provocato in addietro vivaci polemiche.

Mentre questo deposito terroso veniva deposto nell'interno, all'imbocco della caverna si andava formando una specie di conoide a doppia pendenza costituita da pietrisco calcareo minuto e da argilla gialla (E–F) proveniente in parte dall'esterno attraverso la bocca della grotta, in parte probabilmente da una fenditura

Fig. 1. – Sezione stratigrafica del deposito di riempimento della Grotta Marilisa Da Schio, condotta trasversalmente all'asse principale della cavità. Spiegazione delle lettere nel testo.

che attraversa la vòlta dell'anticamera, ed infine su tutto il complesso olocenico in prossimità della bocca sia internamente che all'esterno si formava uno strato di terra nera grassa dovuto in gran parte a materiali di dilavamento del pendio sovrastante all'imbocco, in parte forse ad un insediamento umano dell'Età del Ferro (strato A).

Gli scavi finora condotti hanno fornito interessante materiale paleontologico, tra cui notevoli particolarmente i resti del camoscio, e la bella serie di crani e mandibole di marmotta, ma si è rivelata invece piuttosto povera (almeno nella parte esplorata finora) di materiali paletnologici.

Soltanto lo strato più superficiale (A) è risultato ricco di materiali fittili, che da un primo sommario esame risultano riferibili all'Età del Ferro e forse anche all'Età del Bronzo (una fusarola e frammenti di vasi con prese a tubercolo di vario tipo e cordone rilevato parallelo all'orlo), ed ha fornito assieme ad alcune lamette silicee, ad un raschiatoio ed a varie scheggie atipiche, una minuscola punta silicea triangolare dalla fine scheggiatura di tipo eneolitico.

1.

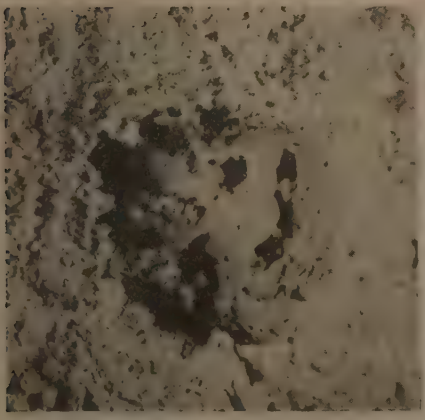
2.

Fig. 1. – L'imbocco della Grotta Marilisa Da Schio (a sinistra) sotto la grande parete strapiombante di S. Cassiano. La bocca della Grotta Elisa si apre un po' più a destra, alla fine del muro a secco, dietro un cespuglio. All'estrema destra un'altra piccola cavità anonima e priva di interesse perchè non contiene alcun deposito.

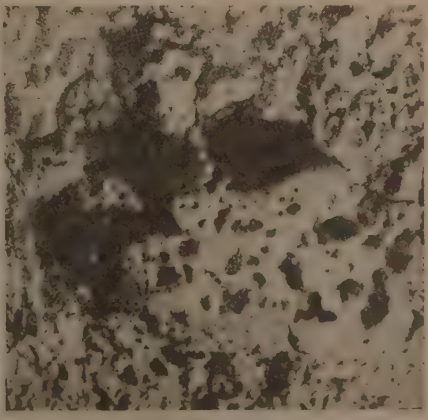
(Foto Co. Alvise da Schio).

Fig. 2. – Veduta interna della Grotta Marilisa. A destra l'ingresso; di fronte una parete parzialmente levigata dal vello degli orsi spelei.

(Foto Co. Alvise Da Schio).



3.



4.

Figg. 3 4. - Due sporgenze delle pareti della Grotta Marilisa levigate dallo sfregamento del vello degli orsi spelei. La roccia, molto ruvida e porosa, risulta in corrispondenza di queste sporgenze lucida come uno specchio. In alcuni punti (per esempio a sinistra in basso della figura di destra) le superfici levigate sono coperte parzialmente da incrostazioni stalattitiche.

(Foto Co. Alvise da Schio).

Dagli altri strati olocenici provengono soltanto un bel punteruolo d'osso (strato B), un caratteristico bulino d'angolo (al limite fra E, F, G alla base del complesso olocenico) e un certo numero di schegge atipiche. È dubbio se quest'ultimi manufatti siano in giacitura primaria, oppure fluitati e provenienti assieme alle ossa di orso dal deposito pleistocenico asportato, dato che essi per la loro tipologia potrebbero anche essere paleolitici [2], e che negli strati B–F non è stato trovato finora alcun indizio sicuro di insediamento umano.

Lo stesso però si deve dire anche del complesso supposto pleistocenico, dal quale proviene finora soltanto una scheggia di selce atipica.

Probabilmente comunicante con la Grotta Marilisa da Schio è un'altra cavità, assai più piccola, che apre la sua bocca a pochi metri di distanza da quella della prima. Anche in questo caso l'orificio era quasi completamente otturato dal deposito interno, e perciò la grotta era finora passata inosservata e fu scoperta dallo scrivente durante la campagna di scavo e denominata *Grotta Elisa.*

Si tratta di una cavità ellissoidale per buona parte riempita da un deposito terroso bruno analogo a quello degli strati B–D della Grotta Marilisa, e molto probabilmente anch'esso proveniente attraverso quella dallo stesso inghiottitoio.

Anche nella Grotta Elisa, con un primo scavo di assaggio, si è constatata la coesistenza negli stessi strati di ossa di orso speleo e marmotta e di frammenti fittili olocenici. Anche in questo caso evidentemente i resti pleistocenici sono in giacitura secondaria e il deposito deriva con molta probabilità dal rimaneggiamento del complesso G della Grotta Marilisa e dal dilavamento di insediamenti umani dell'Età del Ferro e forse del Bronzo del sovrastante pendio.

Mineralogia. — *Sulla presenza del radicale solforico in alcuni nesosilicati* (*). Nota di GIORGIO MARINELLI, presentata (**) dal Corrisp. G. CAROBBI.

In questi ultimi decenni si sono moltiplicate le ricerche e quindi le conoscenze sulla possibilità di sostituzione isomorfa dei vari elementi nei reticoli cristallini e, collateralmente, sono state formulate ed elaborate varie ipotesi sulle probabili leggi che dovrebbero regolare la distribuzione dei costituenti minori nei minerali.

Recentemente G. Carobbi [1] proponeva un sistema cristallochimico degli ioni basato sulla grandezza del raggio ionico e, poichè la vicinanza di tali raggi per

(2) In particolare il bulino d'angolo è molto simile ad un esemplare proveniente dal deposito paleolitico di Grotta Romanelli in Puglia (vedi R. VAUFREY, *Le paléolithique italien*, p. 89, fig. 27 N° 40.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia, Petrografia e Geochimica dell'Università di Firenze e compreso nel programma del Centro Studi per la Mineralogia del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 9 aprile 1949.

(1) G. CAROBBI, *Proposte per un sistema cristallochimico degli ioni.* « Atti Acc. Sc. Lett. ed Arti di Modena ». V, VII, 1947.

due elementi rappresenta la constatazione che essi possono occupare generalmente in un cristallo posizioni reticolari equivalenti, questa grandezza serve molto bene come indice della somiglianza di comportamento cristallochimico.

La costruzione di tale sistema permetterebbe quindi la previsione dei rapporti di isomorfismo ed offrirebbe inoltre il notevole vantaggio di essere indipendente da ogni particolare ipotesi sulla natura dei fenomeni cristallochimici.

Nel sistema proposto dal Carobbi trovano posto, nella prima delle colonne, anche Si^{+4} e S^{+6}. L'esistenza delle silico–apatiti, dimostrata da D. Mc Connel [2] e tra queste dell'ellestadite, per la quale si ammette la vicarianza $Si^{+4} + S^{+6} = 2\,P^{+5}$, dove però non sono rispettati i rapporti stechiometrici $Si^{+4} : S^{+6} = 1 : 1$, consente l'ipotesi di una vicarianza diretta tra Si^{+4} e S^{+6}.

Inoltre A. Gatterer [3] segnala la presenza spettrografica nella titanite di Ylöjärvi in Finlandia di rimarchevole quantità (recht nennenswerten Betrag) di solfo; benchè esso possa essere presente come solfuro nel minerale (A. Michel [4] per la sintesi della titanite usa solfuro di calcio), almeno in parte esso potrebbe essere come SO_4 sostituente il gruppo SiO_4.

Sulla base di questi dati preesistenti ed in considerazione della relativa vicinanza dei raggi ionici tra Si^{+4} (0,41 Å) e S^{+6} (0,34 Å) e della loro proprietà di coordinare tetraedricamente l'ossigeno, ho creduto utile iniziare una serie di ricerche sui silicati naturali per accertare se in questi era presente una qualche quantità di ione solforico come sostituente del radicale silicico.

Data la grandissima diffusione dei silicati nella litosfera, lo studio della distribuzione in essi del gruppo SO_4 aumenterebbe molto le nostre conoscenze sulla geochimica del radicale solforico.

Per questa prima ricerca ho scelto un certo numero di silicati appartenenti al tipo con struttura a tetraedri isolati, avendo cura di eseguire le determinazioni su singoli cristalli accuratamente selezionati ed il più possibile trasparenti, onde evitare errori eventualmente derivanti da eterogeneità nei campioni.

Un esame accurato dei metodi analitici per la dosatura dell'ione solforico ed alcune prove eseguite mi hanno fatto orientare verso il comune metodo della precipitazione con cloruro di bario. Metodo di gran lunga più esatto, trattandosi di piccole quantità, sarebbe stato quello della dosatura spettrografica (una volta accertata l'assenza di S^{-2}) usando il metodo dell'eccitazione ad alta frequenza del campo, recentemente introdotto da A. Gatterer [3], ma tale impianto non è ancora pronto nell'Istituto di Mineralogia di Firenze.

Mi riprometto in seguito di controllare spettrograficamente i dati riportati nella presente Nota ed estendere con tale metodo la ricerca dell'ione solforico ad altri gruppi di silicati.

Il metodo analitico seguito è stato il seguente. Un grammo circa di minerale in polvere e secco veniva fuso con 5 gr. di Na_2CO_3 purissimo (nel quale erano

(2) D. Mc Connel, *The substitution of* SiO_4 *and* SO_4 *groups for* PO_4 *groups in the apatite structure; ellestadite, the end member.* « Am. Mineral. », *22*, p. 977 (1937).

(3) A. Gatterer, *Zur Spektrochemie der Metalloide* F, Cl, Br, J, S, Se. « Spectrochimica Acta », III, 2, p. 214 (1948).

(4) A. Michel, « Bull. Soc. Min. », *15*, p. 254 (1892).

state ripetutamente dosate le tracce di SO_4 presenti) e dopo la fusione la massa veniva lisciviata con acqua (bidistillata su idrato di bario con apparecchio completamente in vetro). Separati gli ossidi e carbonati indisciolti, il liquido veniva acidificato con HCl esente da SO_3, quindi portato a secco per insolubilizzare la silice. Dopo aver eliminato, nel filtrato, le ultime tracce di silice, la soluzione acidificata e bollente veniva trattata con cloruro di bario. Il precipitato filtrato, lavato e calcinato, veniva ripreso con poche gocce di acido solforico diluito, seccato e nuovamente calcinato per evitare una eventuale parziale riduzione del solfato a solfuro.

Per verificare l'esattezza del metodo, in questo caso particolare di dosatura di quantità molto piccole, sono state eseguite le prove ora descritte.

1° Data la difficoltà di avere carbonato sodico assolutamente esente da SO_4 (il nostro, purissimo per analisi [5], ne conteneva gr. 0,0012 in 5 gr., ossia 0,021 %) e constatato che tracce di solfo potevano provenire dal gas (cfr. W. F. Hillebrand [6] p. 232) e dai reattivi, per ogni dosatura sono state ripetute in parallelo tutte le operazioni analitiche fondendo i soliti 5 gr. di carbonato sodico ed usando le identiche quantità di reattivi; nella quarta colonna della tabella I vi sono le correzioni da portare ai risultati analitici.

2° È stata controllata al microscopio la purezza del $BaSO_4$ pesato.

3° È stato accertato che nel precipitato non vi erano incluse quantità ponderabili di $BaCl_2$.

4° Sono stati ripresi due spettri d'arco, con elettrodi di carbone purissimo, uno del precipitato calcinato ed uno delle ceneri di filtro. Oltre al bario ed agli elementi contenuti in tracce spettrografiche anche nelle ceneri del filtro, lo spettro ha rivelato tracce minime di Na, Sr, Pt. Il platino è dovuto naturalmente al crogiuolo, il sodio alla persistenza di tracce minime di NaCl dopo il lavaggio e lo stronzio è una impurezza del $BaCl_2$ reattivo.

Per maggior sicurezza il precipitato è stato fuso con carbonato sodico e sono stati dosati separatamente BaO e SO_3 ottenendo valori pienamente concordanti con i precedenti. È perciò confermata la purezza del precipitato.

5° Per avere la sicurezza che il solfo dosato come $BaSO_4$ non si trovasse nel minerale anche solo parzialmente allo stato di S^{-2}, sono stati eseguiti su ogni campione dei saggi scaldando in crogiuolo di platino ricoperto da una carta all'acetato di piombo un gr. circa di minerale in polvere con HF e H_2SO_4 purissimi, privi di S^{-2}. Solamente nei campioni n. 3 e n. 12 è stato riscontrato un leggero annerimento.

È stata allora ripetuta l'analisi di questi due campioni fondendo con carbonato sodico e nitrato potassico e si sono avuti valori di SO_4 maggiori di quelli ottenuti senza l'impiego di ossidanti. Mentre infatti per il campione n. 3 si era ottenuto in media gr. 0,0163 di $BaSO_4$, nella prova con ossidante si è avuto gr. 0,0171 e nel n. 12, invece di gr. 0,0148, si è ottenuto gr. 0,0154.

(5) Sono state eseguite 5 analisi su *dieci* grammi di Na_2CO_3 anidro, ottenendo le seguenti quantità di $BaSO_4$: 0,0060 – 0,0059 – 0,0059 – 0,0058 – 0,0058 gr.

(6) W. F. HILLEBRAND, *The analysis of silicate and carbonate rocks.* «U. S. Geological Survey, Bull.», *700* (1919).

TABELLA I.

N.	Campione gr.	$BaSO_4$ gr.	SO_4 gr.	Correzione per SO_4 contenuto in (1) gr. 5 Na_2CO_3 ecc.	SO_4 effettivamente presente nel minerale, gr.	SO_4 %	
1	0,9973	0,0133	0,0054	0,0013	0,0041	0,41	
2	0,9897	0,0097	0,0040	0,0014	0,0026	0,26	
3	0,9962	0,0165	0,0068	0,0014	0,0054	0,54	0,54
3′	0,9981	0,0162	0,0067	0,0012	0,0055	0,55	
3″	1,0042	0,0166	0,0068	0,0015	0,0053	0,53	
4	0,9955	0,0052	0,0021	0,0014	0,0007	0,07	
5	0,9517	0,0046	0,0019	0,0015	0,0004	0,04	0,05
5′	0,9973	0,0045	0,0018	0,0013	0,0005	0,05	
6	0,9957	0,0154	0,0063	0,0023 (2)	0,0040	0,40	0,40
6′	0,9891	0,0149	0,0061	0,0022 (2)	0,0039	0,40	
7	0,9964	0,0146	0,0060	0,0019 (2)	0,0041	0,41	
8	0,9972	0,0041	0,0017	0,0014	0,0003	0,03	0,03
8′	0,9986	0,0042	0,0017	0,0014	0,0003	0,03	
9	0,9991	0,0061	0,0025	0,0013	0,0012	0,12	
10	0,9965	0,0072	0,0030	0,0014	0,0016	0,16	
11	0,9721	0,0068	0,0028	0,0012	0,0017	0,17	
12	0,9923	0,0148	0,0061	0,0014	0,0047	0,47	

N. 1 Granato demantoide – Francia (Val Malenco) – n. 10112/499 (3). Piccoli cristalli con {110}, di colore verde pallido, limpidissimi.

N. 2 Granato andradite – La Coscia Mortigliano (Isola d'Elba) n. 2629/370 E. Due cristalli grigiastri, translucidi, con il solo rombododecaedro; nel calcare metamorfico di contatto.

N. 3 Granato grossularia – Perda Nedda (Sardegna) – n. 10149/499. Piccoli cristalli con {110} e {211}, oppure granuli irregolari; giallo rossastri, limpidissimi.

N. 4 Epidoto – Carinzia – n. 10226/502. Cristalli di colore verde scuro trasparenti, allungati secondo *y* in un talcoscisto.

N. 5 Epidoto – Arendal (Norvegia) – n. 10216/502. Monocristallo verde cupo, allungato secondo *y* e striato; non terminato.

N. 6 Topazio – Fazenda do Funil (Minas Geraes – Brasile) – n. 13538/496. Frammenti di un grosso cristallo limpidissimo, giallo paglierino del peso di 151 Kg.

N. 7 Topazio – Minas Geraes (Brasile) – n. 9942/496. Cristallo di circa 3 grammi, giallo carico.

N. 8 Olivina – Isola Katani (Massaua) – n. 9844/480. Granuli verde oliva, limpidi, provenienti da tufi di magmi basici.

N. 9 Olivina – Maiori (Salerno) – n. 9856/480. Granuli verde oliva limpidi, provenienti da tufi di magmi basici.

N. 10 Cianite – Val Calanca – n. 9923/495. Grosse lamine di colore azzurro pallido con quarzo interposto.

N. 11 Cianite – Moravia – Grosse lamine bianche madreperlacee.

N. 12 Andalusite (Chiastolite) – Bretagna – Cristallo con tipica croce di inclusioni carboniose.

(1) gr. 5 di Na_2CO_3 contenevano gr. 0,0012 di SO_4 (cioè 0,02 %), piccole quantità ne contenevano anche gli altri reagenti.

(2) Gli alti valori delle correzioni, ottenuti dalle prove in bianco, per i due campioni di topazio, sono dovuti a ZnO, NH_4Cl, $CaCl_2$, Na_2CO_3, usati, oltre ai reagenti già descritti, per l'insolubilizzazione della silice e per la separazione dei fluoruri.

(3) Numero de l'inventario del Museo dell'Istituto di Mineralogia dell'Università di Firenze.

È stata poi effettuata la prova seguente. Nel crogiuolo di platino ricoperto da una carta all'acetato di piombo, è stata riscaldata con HF e H_2SO_4 una soluzione di solfuro sodico contenente una quantità di solfo pari a quella dosata come $BaSO_4$ nell'analisi del minerale; l'annerimento della cartina è stato molto superiore.

Queste prove fanno ritenere per certo che, quando sono presenti nel minerale tracce di solfuri, se anche una piccola parte di S^{-2} viene ossidata a S^{+6} durante la fusione senza KNO_3 e durante le successive manipolazioni analitiche, ciò non modifica i risultati ottenuti.

Dopo eliminate tutte le possibili cause di errori analitici, occorre anche precisare che tutti i campioni analizzati erano stati osservati al microscopio; pertanto resta escluso che eventuali inclusioni di solfati possano essere stati presenti in essi in quantità ponderabili.

Nella tabella I sono riportati i risultati ottenuti, che mostrano per la prima volta in modo sicuro la presenza costante del radicale solforico in vari silicati.

La diversità di genesi dei campioni analizzati ed il basso numero di questi non permettono certamente di formulare conclusioni geochimiche di carattere generale; si può però trarre dai dati esposti qualche considerazione.

Nelle numerose analisi di rocce magmatiche riportate da F. W. Clarke [7] il solfo dosato viene spesso totalmente considerato dagli autori come proveniente da solfuri. Anche K. Rankama [8] trovando nel residuo della silice di rocce piccole quantità di $BaSO_4$ e di $PbSO_4$, ritiene tale solfo come derivato dall'ossidazione di S^{-2}; in base ai dati di questa ricerca si può invece, per la prima volta e con fondatezza, supporre che parte di tale solfo sia invece imboscato nei silicati come S^{+6}.

Altra considerazione di un certo interesse si può fare sul topazio. Di questo tipico minerale pneumatolitico sono stati analizzati due campioni provenienti dalla stessa zona; il n. 6 è però un frammento di un grosso cristallo limpido del peso di 151 kg., mentre il n. 7 è un cristallo di poco meno di 3 gr.; il contenuto pressochè eguale di radicale solforico nei due campioni fa ritenere che le eccezionali condizioni di formazione del grosso cristallo non abbiano per nulla influito nella sostituzione del Si^{+4} con S^{+6}.

In base a questa prima serie di ricerche si può anche ritenere per certo che la possibilità di sostituzione isomorfa del silicio con il solfo esavalente è molto limitata; molto probabilmente ciò dipende dal forte scarto di valenza ed in generale dalla poca affinità del loro comportamento chimico e dal basso indice di somiglianza derivante dalla non eccessiva vicinanza dei rispettivi raggi ionici; si può però senz'altro affermare che Si^{+4} e S^{+6} possono essere vicarianti negli edifici cristallini di alcuni silicati.

Le ricerche dovranno essere estese ad un maggior numero di minerali per poter giungere a deduzioni di qualche valore geochimico, ma resta fin d'ora accertato che i nesosilicati sono dei diluitori del radicale solforico nella litosfera.

(7) F. W. CLARKE, *The data of geochemistry.* «U. S. Geol. Survey, Bull.», 770 (1924).

(8) K. RANKAMA, *On the composition of the residue from silica in rock-analysis.* «Bull. Comm. Géol. de Finlande», *126*, p. 3 (1939).

Biologia (Biochimica). — *Il metabolismo batterico del glicerolo e dei suoi derivati.* - III. *Comportamento di alcuni* « *Mycobacteria* » (*). Nota di EUGENIO BONETTI e MASSIMO ALOISI, presentata (**) dal Socio G. VERNONI.

In una serie di Note precedenti [1-3] abbiamo illustrato le caratteristiche del metabolismo batterico nei riguardi di alcuni substrati tra loro affini imperniando lo studio sul metabolismo del glicerolo e di alcuni suoi esteri ed eteri. L'oggetto principale di questo studio era quello di dimostrare la diversa possibilità di attacco del substrato a seconda che la sua catena tricarboniosa presenti o meno due gruppi ossidrili vicinali. Si è veduto inoltre quale importanza abbia la presenza dell'ione fosforico e l'esterificazione con radicale fosforico nell'ossidazione della molecola del glicerolo e dei glicerofosfati.

Ci siamo serviti per quelle ricerche di numerose specie batteriche patogene e non patogene. Escludemmo allora di proposito il gruppo degli acido–resistenti, sia per il diverso loro tasso respiratorio (sopra a tutto riguardo ai patogeni) in confronto di altri schizomiceti, sia per potere ripetere omogeneamente su di essi le prove metaboliche sopra dette.

In questa Nota riferiamo appunto sui risultati ottenuti circa la utilizzazione in via ossidativa del glicerolo, dei suoi derivati e di altri composti da parte dei germi del gruppo dei tubercolari e di comuni altri acido-resistenti. Il problema poteva considerarsi in questo caso particolarmente interessante data la nota (anche se non assoluta) esigenza dei germi in questione rispetto al glicerolo nei terreni di coltura, fatto reso noto per la prima volta da Nocard e Roux [4] nel 1887. Del resto ricerche in proposito erano state condotte in varia guisa da altri autori: tutti hanno trovato che il glicerolo non è sostituibile affatto con altra sorgente idrocarbonata nei terreni sintetici per gli acido–resistenti patogeni o lo è solo in via molto ristretta (Kondo [5], Braun [6], Loebel, Shorr e Richardson [7], Cutinelli [8], Christophersen [9], Bloch [10] e altri). Secondo Braun mentre acido–resistenti non patogeni possono crescere rigogliosamente anche in presenza di diversi altri glucidi, per i patogeni il glicerolo può essere solo sostituito dai sali dell'acido acetico. Secondo Bloch e altri tale

(*) Ricerche eseguite presso il Centro di Studi per la Fisiopatologia del C. N. R. in Roma.
(**) Nella seduta del 12 marzo 1949.
(1) E. BONETTI e M. ALOISI, « Boll. Soc. It. Biol. Sper. », *22*, 752 (1946).
(2) E. BONETTI e M. ALOISI, « Atti Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. II, 701 (1947).
(3) M. ALOISI, e E. BONETTI « Ricerca Scient. e Ricostr. », *17*, 863 (1947).
(4) NOCARD e ROUX, « Ann. Ist. Pasteur », *1*, 19 (1887).
(5) S. KONDO, « Biochem. Zeitschr. », *156*, 147 (1925).
(6) H. BRAUN, « Klin. Wochenschr. », *14*, 703 (1935).
(7) R. O. LOEBEL, E. SHORR e H. B. RICHARDSON, « J. Bacter. », *26*, 139, 167 (1933).
(8) C. CUTINELLI, « Boll. Ist. Sier. Mil. », *19*, *88*, 141, 146 (1940).
(9) J. CHRISTOPHERSEN, « Vorratspl. u. Lebensmittelforsch. », *5*, 372 (1912) (cit. da BLOCH).
(10) H. BLOCH, « Schweizer. Zeitschr. f. Path. u. Bakter. », *47*, 589 (194).

rimpiazzo può esser fatto anche dal glucosio. Interessanti sono a questo proposito le ricerche del Cutinelli che dimostrano come gli acidi grassi, che riescono tuttavia a incrementare notevolmente la respirazione dei tubercolari patogeni, non possono sostituire la glicerina nei terreni di coltura. Così altre sostanze sono state trovate dal Bernheim [11] che agiscono in modo analogo. Molti degli autori citati hanno anche eseguito prove respirometriche su *Mycobacteria* in presenza o meno di glicerolo. Citiamo per esempio i dati di Loebel e collaboratori [7] secondo cui la respirazione del *M. tuberculosis* in terreno di Long [12] (simile al Sauton) è dovuta per i 4/5 alla ossidazione della glicerina e solo per 1/5 a quella dei costituenti azotati. Del resto è noto che questi possono essere sostituiti anche da sali ammonici di acidi organici [13]. Ebina e Nakamura [14] hanno trovato in generale che mentre non esistono differenze sensibili nella respirazione tra ceppi virulenti ed altri meno virulenti, queste si trovano fra specie patogene e non patogene nel senso che è più alta, *in vitro*, la respirazione dei *Mycobacteria* non patogeni. L'entità della respirazione varia anche con l'età della coltura. Secondo Franke e Schillinger [15] la respirazione dei germi acido-resistenti diminuisce in genere col crescere della loro acido-resistenza. Studi biochimici più particolareggiati su differenti specie di *Mycobacterium* sono stati compiuti da Edson [16] e Edson e Hunter [17].

DATI SPERIMENTALI. – Abbiamo usato le seguenti specie e ceppi di *Mycobacteria* [18]:

Myc. tubercolosis hominis (H 522, Forlanini)
» » » *bovis* (Vallée, Forlanini)
Myc. avium (Forlanini)
Myc. phlei (Timothy grass bacillus, Forlanini).

Tali micobatteri erano coltivati in terreno di Sauton per un periodo variabile a seconda delle specie (in genere 15–30 giorni per le specie patogene, 7–10 giorni per il timoteo). Le sospensioni batteriche erano ottenute prelevando il velo batterico dal terreno liquido, pesandolo in modo da avere un orientamento per la densità da raggiungere (circa 40 mg di peso fresco per cc) ed omogeneizzandolo in mortaio con soluzione fisiologica. La sospensione veniva lavata e centrifugata tre volte con sol. fisiol. e infine portata alla concentrazione voluta dopo preliminare saggio del valore di azoto (Kjeldahl). I dati respirometrici che daremo si riferiscono infatti a 1 mg di azoto batterico. Essi sono stati ottenuti col metodo manometrico di Warburg. In tutto il complesso delle numerose prove si è adoperata ogni volta

(11) F. BERNHEIM, « J. Bakter. », *41*, 387 (1941).
(12) E. R. LONG e L. L. FINNER, « Am. Rev. Tuber. », *16*, 523 (1927).
(13) A. BOQUET, « C. R. Soc. Biol. », *138*, 340 (1944).
(14) T. EBINA e T. NAKAMURA, « Tohoku J. Exp. Med. », *31*, 60 (1937) « Ber. u. ges. Phys. u. exper. Pharm. », *103*, 308.
(15) W. FRANKE e A. SCHILLINGER, « Biochem. Zeitschr. », *316*, 313 (1943).
(16) N. L. EDSON, « Biochem. J. », *41*, 145 (1947).
(17) N. L. EDSON e G. J. E. HUNTER, « Biochem. J. », 37, 563 (1943); *41*, 139 (1947).
(18) Ringraziamo particolarmente il prof. M. Morellini dell'Istituto Carlo Forlanini per avere messo a nostra disposizione l'ampia collezione di acido-resistenti da lui raccolta.

una quantità di germi corrispondente in media a circa mg 0,4 di N con rarissimi massimi di circa 0,6 mg e altrettanto rari minimi di circa 0,2 mg. I dettagli sulle condizioni sperimentali delle singole prove verranno dati a capo di ciascuna tabella riassuntiva.

Da principio abbiamo esaminato la respirazione dei germi su riferiti di fronte ai substrati già usati precedentemente e cioè: glicerolo, α– e β–glicerofosfato di sodio, α– e β–metil etere del glicerolo, etandiolo, monometiletere dell'etandiolo, aceton–glicerolo. La tabella I riassume i risultati ottenuti.

TABELLA I.

Respirazione dei vari *Mycobacteria* in presenza di diversi substrati. Metodo diretto di Warburg. Sospensione batterica 1 cc, tampone PO_4 M/15 pH 7,2 1 cc; substrato M/25 0,3 cc (concentrazione finale M/250); soluzione fisiologica fino a volume totale di 3 cc. Nel pozzetto centrale NaOH 10 % 0,2 cc. I valori riportati si riferiscono al consumo di O_2 per 1 ora e per mg di N batterico (Q_{O_2}/N). Essi corrispondono alla media di diverse prove proseguite ognuna per almeno due ore. Gas = aria ; Temp. = 38° C.

Substrato M/250	*Myc. tuberc. hominis*	*Myc. tuberc. bovis*	*Myc. avium* (1)	*Myc. phlei timoteo*	*Osservazioni*
Assente	57	36	23	91	Q_{O_2}/N. I valori corrispondenti ai substrati rappresentano l'extraconsumo dovuto alla presenza del substrato. I decimali sono stati arrotondati.
Glicerolo	29	1	16	38	
α–glicerofosfato . .	23	0	0	20	
β–glicerofosfato . .	16	0	0	3	
α–metilglicerolo . .	20	0	0	36	
β–metilglicerolo . .	24	0	12	78	
Etandiolo	0	0	0	0	
Etandiolo metiletere	0	0	0	0	
Aceton–glicerolo . .	7	0	0	5	

(1) Colture non giovani; da colture più giovani del *Myc. avium* si hanno di regola valori più elevati (v. in seguito).

Questi dati, mentre confermano in linea generale quanto abbiamo trovato con altri germi, e cioè che la forma α del glicerofosfato è utilizzata (dal *Myc. tub. hominis* e dal *Myc. phlei*) meglio della forma β, dimostrano che i *Mycobacteria* sono capaci di ossidare il β–metiletere del glicerolo quanto ed anche meglio (*M. phlei*) del glicerolo stesso. Supponendo per questi germi, come abbiamo dimostrato per gli altri, che il sistema enzimatico responsabile della ossidazione degli eteri metilici del glicerolo non sia quello stesso che attacca il glicerolo e l'α–glicerofosfato, tale risultato non è sorprendente. Non è improbabile che si tratti qui di una specifica capacità di attacco di questi germi verso il β–metiletere del glicerolo, capacità che avremo occasione di dimostrare meglio nei successivi esperimenti. Va però qui ricordato che Bloch, Matter e Suter [19] hanno studiato, insieme a

(19) H. BLOCH, E. MATTER e E. SUTER, « Am. Rev. Tuber. », *55*, 540 (1947).

diversi esteri ed eteri del glicerolo, anche il suo etere metilico nella sola forma α. Contrariamente ai nostri dati essi concludono che tale composto non esercita alcun effetto sulla respirazione bacillare (*Myc. tub. hominis*). Siccome il metanolo si è dimostrato loro del tutto indifferente riguardo alla respirazione dei germi, gli AA. suddetti concludono anche che non si verifica una idrolisi dell'etere perchè questa sarebbe stata segnalata dall'effetto positivo del glicerolo liberato.

Si trattava intanto di analizzare, qualora fosse stato possibile, l'importanza della fosforilazione nel processo ossidativo del glicerolo e i suoi derivati. Abbiamo anche qui allestito le seguenti prove:

1° respirazione in presenza dei substrati con tampone PO_4 e con tampone diverso non contenente ioni $-PO_4$ (trietanolamina)[20]; 2° dimostrazione di una eventuale assunzione di radicali fosforici durante la respirazione in presenza dei substrati; 3° dimostrazione di una liberazione di radicali fosforici durante la respirazione in presenza di substrati e in ambiente inizialmente privo di fosforo inorganico.

Diciamo subito che queste prove hanno dato in genere tutte esito negativo. D'altra parte la relativa modestia del tasso respiratorio di queste specie di germi implicitamente rendeva non facile apprezzare variazioni ioniche nel corso dell'esperimento.

In queste e nelle successive prove sperimentali abbiamo eliminato quei substrati che non si erano dimostrati utilizzabili nelle nostre condizioni e cioè l'etandiolo, il suo etere metilico e l'acetonglicerina.

Riportiamo a titolo di esempio nella tabella II i risultati ottenuti col *Myc. tuber. hominis* e col *Myc. phlei* (timoteo).

TABELLA II.

Q_{O_2}/N in presenza di tampone PO_4 e in presenza di tampone alla trietanolamina (M/15, ph 7,2); condizioni analoghe alle precedenti.

Substrato M/250	*Myc. tuberc. hominis*		*Myc. phlei* (timoteo)		*Osservazioni*
	Tampone PO_4	Tampone trietanol.	Tampone PO_4	Tampone trietanol.	
Assente	57	60	91	75	I decimali sono stati arrotondati.
Glicerolo	29	21	38	11	
α glicerofosfato . . .	23	18	20	22	
β-glicerofosfato . . .	16	10	3	4	extra Q_{O_2}
α metilglicerolo . . .	20	13	36	7	
β metilglicerolo . . .	24	28	78	14	

(20) Già altre volte abbiamo avuto occasione di usare questo tampone studiato da uno di noi (ALOISI) e che si è dimostrato assai buono in quanto la trietanolamina non è di regola metabolizzata da tessuti o cellule batteriche. Per pH = 7,2 : g 0,995 di trietanolamina (M/15) + 52,2 cc. di HCl n/10 + H_2O fino a 100 cc. Si controlla al potenziometro.

Tabella III.

Extra Q_{O_2}/N di *Mycobacteria* in presenza di vari substrati con tamponi diversamente costituiti allo scopo di determinare l'influenza della qualità ionica del mezzo. Su 3 cc di volume totale dove erano sospesi i germi, 1 era costituito da tampone alla trietanolamina M/15 pH 7,2; a questo si aggiungeva, a seconda dei casi, nessun altro tampone, o tampone fosforico (Na o K) M/15 pH 7,2 (1 cc), o KCl M/15 (1 cc); si portava a 3 cc col substrato e con soluzione fisiologica. Le altre condizioni come nelle prove precedenti.

Substrato M/250	*Myc. tuberc. hominis*				*Myc. tuberc. bovis*				*Myc. avium*				*Myc. phlei*			
	Trietanolamina	Trietanolamina + $Na_2HPO_4+NaH_2PO_4$	Trietanolamina + $K_2HPO_4+KH_2PO_4$	Trietanolamina + KCl	Trietanolamina	Trietanolamina + $Na_2HPO_4+NaH_2PO_4$	Trietanolamina + $K_2HPO_4+KH_2PO_4$	Trietanolamina + KCl	Trietanolamina	Trietanolamina + $Na_2HPO_4+NaH_2PO_4$	Trietanolamina + $K_2HPO_4+KH_2PO_4$	Trietanolamina + KCl	Trietanolamina	Trietanolamina + $Na_2HPO_4+NaH_2PO_4$	Trietanolamina + $K_2HPO_4+KH_2PO_4$	Trietanolamina + KCl
Assente	60	45	43	48	36	37	31	29	84	108	101	80	75	98	109	86
Glicerolo	21	10	12	9	9	2	1	4	97	50	38	30	11	23	31	22
α-glicerofosfato	18	6	14	10	3	—	2	4	23	12	7	21	22	8	21	18
β-glicerofosfato	10	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	5	2	—	13
α-metilglicerolo	13	3	4	2	1	4	—	4	4	8	8	2	7	8	25	26
β-metilglicerolo	28	8	15	17	3	2	2	6	45	45	48	43	14	14	68	103

Nonostante quanto abbiamo osservato più sopra sembrerebbe doversi dedurre, dalla tabella II, che mentre per il *M. tub. hominis* non si trova in effetti alcuna sensibile diversità fra la respirazione in presenza dei fosfati o in assenza di questi, per il *M. phlei* invece la presenza di fosfati sembrerebbe una condizione necessaria all'andamento delle operazioni biochimiche che stanno alla base della respirazione, sopra a tutto di fronte ad alcuni substrati (glicerolo, suoi eteri metilici). Ma tale constatazione contrastava col fatto che furono tutte negative le prove intese a dimostrare o una assunzione di radicali fosforici dall'ambiente quando questi vi fossero presenti, o una eliminazione di tali radicali (idrolisi fosfatasica dei glicerofosfati quale abbiamo visto accompagnare o precedere l'ossidazione dei glicerofosfati da parte di altri germi [3] in un mezzo che ne fosse inizialmente privo [21].

Questo contrasto ci ha spinti a rigorosamente controllare se l'incremento notevole che subisce la respirazione del *M. phlei* in presenza di tampone PO_4 fosse realmente dovuto agli ioni $-PO_4$ o agli altri ioni che nel tampone sono necessariamente presenti e cioè gli ioni sodio e potassio (per quanto il primo fosse largamente presente come soluzione fisiologica). A questo scopo abbiamo istituito altre ricerche in cui si ponevano tutti i germi di fronte ai substrati in mezzi contenenti:

a) tampone privo di ioni fosforici (trietanolamina);

b) tampone alla trietanolamina + altro tampone esclusivamente formato da sali sodici dell'H_3PO_4;

c) tampone alla trietanolamina + altro tampone esclusivamente formato da sali potassici dell'H_3PO_4;

d) tampone alla trietanolamina + KCl.

Con queste prove si poteva quindi stabilire se l'incremento della respirazione fosse dovuto 1° a $H_2PO_4^-$ e HPO_4^{--}; 2° a Na^+; 3° a K^+; 4° alla contemporanea presenza dei precedenti (lo ione Cl era largamente presente in queste come in tutte le prove precedenti).

I risultati sono riassunti nella tabella III.

Appare evidente da questi dati che l'incremento respiratorio osservabile in presenza di tamponi PO_4 nei confronti di alcuni substrati e che è proprietà si può dire esclusiva del *Myc. phlei*, non dipende dalla presenza degli ioni $-PO_4$, nè dal catione Na, bensì dal catione K. Ciò è dimostrabile particolarmente nei confronti degli eteri metilici del glicerolo ed in modo evidente, tanto da assumere qui l'entità caratteristica dei fenomeni di « attivazione enzimatica » nei confronti del β-metilglicerolo.

Questo dato ci sembra particolarmente interessante e sarà oggetto di un più approfondito studio. Dobbiamo fin d'ora dire che altri ceppi di *Mycobacteria* non patogeni del tipo *phlei* e che hanno un'origine analoga, cioè sono stati isolati da materiale vegetale, dimostrano un comportamento analogo. Non possedendo però alcuni di essi una sicura classificazione omettiamo per ora di riportare i dati corrispondenti che devono essere anche completati.

(21) Della attività fosfatasica del b. tubercolare (umano) si è occupato B. Borghi che l'ha trovata assai scarsa. B. BORGHI, « Bioch. e Terapia Sper. », *20*, 411 (1933).

Biologia. — *La formazione degli organi di senso nella larva delle Ascidie semplici* (*). Nota di MARIA PIERA CEAS, presentata (**) dal Socio G. COTRONEI.

Le larve delle Ascidie semplici posseggono due organi di senso, posti nella vescicola cerebrale; lo *statolite*, organo di senso statico, costituito da una macchia pigmentata portata da una cellula peduncolata, e la *macchia oculare*, costituita da più granuli anch'essi pigmentati.

Durante lo sviluppo del germe il differenziamento degli organi di senso segue le seguenti tappe:

1° *Nell'uovo indiviso prima della segmentazione.* – Abbiamo alcuni dati di Dalcq (1932) (1): frammenti di uovo vergine derivati da sezioni latitudinali e sviluppatisi sino a larva, 11 su 31 presentarono macchie pigmentate; le larve derivate dai frammenti ottenuti secondo sezioni meridiane presentarono macchie pigmentate in 8 casi su 25. Come si vede, le percentuali nei due tipi di operazione sono abbastanza simili e da esse non sembra che si possa ricavare alcuna conclusione circa la localizzazione degli organi di senso.

2° *Nell'uovo indiviso dopo la fecondazione.* – Berrill (1941) (2), in una raffigurazione di disposizioni dei territori presuntivi della larva, localizza il territorio delle macchie pigmentate nella metà anteriore dell'uovo, immediatamente sotto l'equatore. Con esperimenti di merogonia, Reverberi (1937) (3) ottenne i seguenti risultati: i frammenti animali ottenuti con tagli equatoriali o subequatoriali si svilupparono in larve di cui 14 senza macchia pigmentata e 9 con macchie pigmentate; i frammenti vegetativi ottenuti con tagli equatoriali o sopraequatoriali dettero larve di cui 6 con macchie pigmentate e 6 senza; i frammenti ottenuti con tagli meridiani dettero larve con macchie pigmentate in 9 casi e senza macchie in 5 casi.

Da questi dati il Reverberi non trasse conclusioni circa una localizzazione precisa del territorio in considerazione.

3° *Allo stadio di 2 blastomeri.* – I risultati sono dedotti dallo sviluppo delle larve derivate dai blastomeri separati: le mezze larve presentano sempre uno o due *ocelli* (Cohen & Berrill, 1936) (4): lo *statolite*, invece, manca sia nei semiembrioni destri che nei sinistri (Chabry, 1887 (5), Cohen & Berrill 1936). Questi Autori

(*) Lavoro eseguito nel Centro di Studio per la Biologia del C. N. R. presso la Stazione Zoologica di Napoli sotto la direzione del prof. G. Reverberi.

(**) Nella seduta del 9 aprile 1949.

(1) A. DALCQ, *Etudes des localisations germinales de l'oeuf vierge d'Ascidie par des expériences de mérogonie.* « Arch. Anat. Micr. », vol. 28, p. 223 (1932).

(2) N. J. BERRILL, *Growth patterns in lower animals.* « Proc. III Growth Symp. » (1941).

(3) G. REVERBERI, *Ricerche sperimentali sulla struttura dell'uovo fecondato delle Ascidie.* « Comm. Pont. Acad Sci. », vol. I, p. 135 (1937).

(4) A. COHEN & N. J. BERRILL, *The development of isolated blastomeres of the Ascidian egg.* « J. Exp. Zool. », vol. 74, p. 91 (1936).

(5) L. CHABRY, *Contribution à l'embryologie normale et tératologique des Ascidies simples.* « J. Anat. et Physiol. », vol. 23, p. 167 (1887).

ritengono che l'interpretazione da darsi a questo risultato debba essere la seguente: il territorio presuntivo dello statolite sarebbe situato medialmente; ora, nella costituzione della semilarva, il cervello non prende la forma di vescicola, ma forma un ammasso pieno e la cellula destinata a dare lo statolite diventerebbe semplicemente una cellula banale della formazione neurale.

Per ciò che concerne l'*ocello*, Chabry (1887), che si è occupato diffusamente di esso, ha potuto notare che nei semiembrioni destri esso (talvolta suddiviso in diverse macchie pigmentate) occupa una posizione rivolta verso il fianco sinistro; nei semiembrioni sinistri invece esso occupa una posizione prossima al fianco destro. Chabry però non dice se la percentuale dei semiembrioni destri con organo di senso sia superiore a quella dei semiembrioni sinistri.

4° *Nello stadio di 4 blastomeri.* – Chabry, uccidendo la cellula anteriore destra, ha ottenuto larve che mancano quasi sempre della macchia pigmentata; al contrario, uccidendo la cellula anteriore sinistra, le larve portano macchie pigmentate con una certa frequenza. Da questi risultati Chabry conclude che a questo stadio il territorio presuntivo delle macchie pigmentate è localizzato nella cellula anteriore destra. Il fatto che talvolta i semiembrioni sinistri portano organi pigmentati è spiegato da Chabry con l'ammissione che in causa dell'uccisione di un blastomero le potenze di quelli superstiti sono modificate sì che si producono territori che altrimenti non si produrrebbero. In conclusione Chabry ammette: che il territorio presuntivo delle macchie pigmentate è localizzato nel blastomero anteriore destro; che tale territorio è presente anche nel blastomero anteriore sinistro, ma che in condizioni normali esso è inibito dalla presenza del corrispondente destro; che in condizioni sperimentali la macchia pigmentata possa svilupparsi dal blastomero sinistro. Cohen & Berrill (1936) ritengono, invece, che la posizione della macchia pigmentata nella metà destra della larva sia secondaria. Il territorio presuntivo è mediano anteriore; durante la trasformazione dell'epitelio da cubico in pavimentoso esso verrebbe a portarsi sul fianco destro. Rose (1939) [6], separando, allo stadio IV, i blastomeri anteriori da quelli posteriori, ha ottenuto, per sviluppo dei primi, in 22 casi su 24, larve con più macchie pigmentate (fino a 9); dai blastomeri posteriori, invece, ha ottenuto larve sempre prive di macchie pigmentate. Dunque allo stadio IV, secondo queste ultime ricerche, l'organo di senso sembrerebbe localizzato nella metà anteriore del germe.

5° Per lo *stadio di 8 blastomeri*, abbiamo i seguenti dati: *a*) separando i 4 blastomeri anteriori dai 4 posteriori si hanno i medesimi risultati che si hanno dallo stesso tipo di operazione allo stadio IV (Chabry, 1887; Conklin, 1905 [7]; Rose, 1939); *b*) i risultati delle operazioni di separazione del quartetto animale da quello vegetativo (Tung, 1934 [8]; Rose, 1939; von Ubisch, 1940 [9]; Reverberi & Min-

(6) S. M. ROSE, *Embryonic induction in the Ascidia*. « Biol. Bull. », vol. 77, p. 216 (1939).

(7) E. G. CONKLIN, *Mosaic development in Ascidian eggs*. « J. Exp. Zool. », vol. 2, p. 145 (1905).

(8) T. C. TUNG, *Recherches sur les potentialités des blastomères chez Ascidiella scabra*. « Arch. Anat. Micr. », vol. 30, p. 381 (1934).

(9) L. VON UBISCH, *Weitere Untersuchungen über Regulation und Determination im Ascidienkeim*. « Roux. Arch. », vol. 140, p. 1 (1940).

ganti, 1946[10]) sono concordi per quanto concerne il differenziamento delle macchie pigmentate: precisamente, tanto le larve « animali » quanto quelle « vegetative » sono sempre prive di organi sensoriali. Tung (1934) su 34 casi non ottenne che un caso dubbio con organi di senso; ruotando di 180 il quartetto animale su quello vegetativo, ottenne lo sviluppo delle macchie pigmentate in 13 casi su 81. Vandebroek (1938)[11] sostiene che allo stadio VIII l'induttore dell'organo sensoriale si trovi nei blastomeri vegetativi posteriori.

6° *Allo stadio di 16 blastomeri.* – Vandebroek, mediante le combinazioni delle quattro zone $\alpha, \delta, \beta, \nu$ in cui distingue il germe, ha ottenuto organi di senso solo in quei casi in cui siano contemporaneamente presenti la zona δ (corrispondente alla porzione in cui sono localizzati i plasmi neurali) e β (corrispondente ai blastomeri posteriori vegetativi induttori).

D'altra parte Rose (1939) con alcune combinazioni di blastomeri ha ottenuto i risultati seguenti:

Vegetativi anteriori (A 5.1, A 5.2) + animali anteriori (a 4.2) = 12 casi con macchia pigmentata su 13.

Dai quali dati si dovrebbe dedurre che allo stadio VIII e XVI il differenziamento delle macchie sensoriali è strettamente legato alla presenza dei blastomeri vegetativi anteriori. Nelle combinazioni seguenti Rose ottenne rispettivamente:

Vegetativo anteriore (A 4.1) + animale posteriore = 15 casi con macchia pigmentata su 56.

Vegetativi anteriori (A 5.1, A 5.2) + animale posteriore (a 4.2) = 1 caso con macchia pigmentata su 9.

La percentuale dei casi nella seconda combinazione è, come si vede subito, molto minore che non nella prima combinazione. Da questi risultati dovrebbe dedursi che i blastomeri vegetativi anteriori sarebbero capaci di indurre la formazione delle macchie pigmentate anche da territori non presuntivi. Tuttavia il numero degli esperimenti effettuati è troppo scarso per poter permettere una tale conclusione: Reverberi & Minganti (1947)[12], ripetendo il primo tipo di combinazioni – due vegetative anteriori + due animali posteriori – su un totale di 49 embrioni non hanno ottenuto alcuna larva con tessuto neurale e organi di senso. Ugualmente col trapianto in un germe dello stadio VIII di due blastomeri animali posteriori (2 *b* 4.2) al posto dei due animali anteriori (2 *a* 4.2), su 48 casi non ebbero mai larve con organi di senso.

Dai dati bibliografici che precedono sembra che il differenziamento degli organi di senso nelle larve delle Ascidie semplici segua un meccanismo diverso

(10) G. Reverberi & A. Minganti, *Risultati di esperimenti di isolamento dei quartetti animale e vegetativo dell'uovo di Ascidiella aspersa allo stadio di otto blastomeri.* « Boll. Zool. », vol. 13, p. 99 (1946); *Le potenze dei quartetti animale e vegetativo isolati di Ascidiella aspersa.* « Pubbl. Staz. Zool. Napoli », vol. 20, p. 135 (1946).

(11) G. Vandebroek, *Inductieverschijnselen in de ont wikkeling van de Ascidienkiem.* « Natuurwet. Tijdschr. », vol. 20, p. 234 (1938).

(12) G. Reverberi & A. Minganti, *La distribuzione delle potenze nel germe delle Ascidie allo stadio di 8 blastomeri analizzata mediante la combinazione e i trapianti di blastomeri.* « Pubbl. Staz. Zool. Napoli », vol. 21, p. 1 (1947).

da quello delle altre formazioni. Precisamente, sembra che esso segua le stesse linee di differenziamento che sono tipiche per il cervello; il quale, perchè possa differenziarsi dal territorio competente, ha bisogno di una induzione da parte di un altro territorio del germe.

Allo scopo di verificare queste supposizioni e al fine di apportare un maggior contributo a questa questione, ho eseguito alcune esperienze già fatte dagli Autori precedenti, e altre originali:

1° Separazione allo stadio IV e VIII delle metà anteriori dalle metà posteriori. Totale 86 operazioni; nei casi in cui le macchie pigmentate sono presenti, esse sono localizzate nelle metà anteriori. I risultati si distribuiscono come segue:

Stadio	porzioni del germe	Totale Semiembioni	N. macchie pigmentate						
			0	1	2	3	4	5	6
IV	Metà anteriore	50	20	14	13	1	2	—	—
	» posteriore	50	—	—	—	—	—	—	—
VIII	Metà anteriore	36	8	13	6	4	4	—	1
	» posteriore	36	—	—	—	—	—	—	—
TOTALE METÀ ANTERIORI . . .		86	28	27	19	5	6	—	1

Da questi dati risulterebbe dunque che dopo la seconda segmentazione il territorio degli organi di senso è localizzato nella porzione anteriore del germe.

2° Eliminazione di uno dei blastomeri vegetativi anteriori allo stadio VIII:

Uccisione del blastomero	Operazioni	N. macchie pigmentate			
		0	1	2	3
Vegetativo anteriore destro	49	—	32	16	1
Vegetativo anteriore sinistro	12	7	5	—	—
TOTALE . . .	61	7	37	16	1

Poichè, in complesso, in queste larve le macchie pigmentate praticamente si formano sempre, si deve dedurre che nello stadio VIII il territorio presuntivo è localizzato nella porzione animale. Pertanto non può ritenersi esatta la localizzazione subequatoriale indicata da Berrill (1941).

3° Uccisione di un blastomero animale anteriore (destro o sinistro) allo stadio VIII. Su 99 casi ho avuto i seguenti risultati:

Uccisione del blastomero	Operazioni	N. macchie pigmentate			
		0	1	2	3
Animale anteriore destro	52	43	9	—	—
Animale anteriore sinistro	47	20	26	1	—
Totale . . .	99	63	35	1	—

Da questi risultati si dedurrebbe che allo stadio VIII il territorio presuntivo delle macchie pigmentate è posto più probabilmente nel blastomero animale anteriore destro.

Concludendo possiamo dire che:

1° Nell'uovo prima e dopo la fecondazione e prima della segmentazione, la localizzazione del territorio presuntivo degli organi di senso non è definita.

2° Alla seconda segmentazione il territorio è localizzato nella porzione anteriore.

3° Allo stadio VIII il territorio presuntivo è probabilmente localizzato nel blastomero animale anteriore destro.

4° Perchè possa differenziarsi, il territorio deve subire l'attività induttrice dei blastomeri vegetativi anteriori.

Biologia. — *Autofecondazione e fecondazione incrociata nelle «Ascidie»* (*). Nota di Margherita Maria Esposito Sue, presentata (**) dal Socio G. Cotronei.

Il problema dell'autosterilità nelle *Ascidie*, nonostante le numerose ricerche, di cui alcune molto moderne (Morgan 1945), non ha trovato fino ad ora una soluzione soddisfacente.

Notevoli contributi teoretici sono stati apportati ad esso dalle recenti acquisizioni sulle sostanze specifiche (gamoni) delle uova e degli spermi. Al proposito è da richiamare che Montalenti e Schartau (1941) hanno mostrato che anche negli elementi germinali maturi dei Cordati (Ciclostomi) sono presenti delle sostanze specifiche che interagiscono mutualmente; è probabile che su questa via s'abbiano ad ottenere buoni risultati. Delle indicazioni preziose al proposito sono state fatte recentemente da Tyler (1948).

Le prime esperienze con estratti di uova nelle *Ascidie* allo scopo di studiare i fattori che impediscono l'autofecondazione furono fatte da Fuchs (1925) e da

(*) Lavoro eseguito nel Centro di Studio per la Biologia del C. N. R. presso la Stazione Zoologica di Napoli, per suggerimento e sotto la direzione del prof. G. Reverberi.

(**) Nella seduta del 9 aprile 1949.

Morgan (1938, 1940). Fuchs, con acqua di uova e con estratti delle stesse, riuscì ad aumentare, nella fecondazione incrociata, il potere fecondante degli spermi. Esperimenti analoghi con estratti di varie specie di uova e di spermi furono fatti da Morgan; l'acqua di uova dello stesso individuo (self-egg water) diminuirebbe l'autofecondazione.

Peltrera, nel 1940, notava che le esperienze sino ad allora condotte erano state dedicate quasi esclusivamente allo studio dalla funzione della membrana dell'uovo e che era stata trascurata l'importanza dello sperma nelle interazioni che avvengono all'atto della fecondazione. A tale scopo pensò di comparare il potere fecondante della miscela di sperma di due individui con il potere fecondante delle sospensioni singole. Risultò che dopo circa 13 ore la miscela è quasi completamente inattiva mentre le singole sospensioni mantengono il loro potere fecondante fino ed oltre le 30 ore. Inoltre risultò che le poche uova fecondate dalla miscela presentavano una irregolarità nei solchi di segmentazione.

I risultati principali finora raggiunti sul problema dell'autosterilità delle *Ascidie* possono compendiarsi come segue (Morgan, 1905-45; Plough, 1930-33; Fuchs, 1914; 25):

1° l'autosterilità non è comune a tutte le specie di *Ascidie*. Secondo Morgan in *Cyntia* può aversi ugualmente autosterilità e autofecondazione; in *Molgula* l'autofecondazione è fisiologica.

2° In *Ciona* l'autosterilità è un fatto normale, ma non è completa. Come già altri Autori, Plough (1930) trova che la varietà napoletana è parzialmente autofertile mentre quella di Woods Hole non lo è affatto.

3° Il blocco all'autofecondazione sarebbe dato dalle cellule testali che si trovano tra la superficie dell'uovo e il cortex, o da sostanze prodotte da queste cellule.

Con lo scopo di inquadrare il problema dell'autosterilità dell'uovo delle *Ascidie* nei nuovi reperti della fisiologia della fecondazione, ho ritenuto essenziale avere una sicura base di partenza, e cioè conoscere con precisione il valore quantitativo dell'autofecondazione nelle diverse specie di *Ascidie*. Queste ricerche fatte solo in parte dagli Autori precedenti, furono eseguite da me a Napoli nel periodo agosto-novembre e cioè per 4 mesi, alla temperatura di 18°-20°. Esse furono portate sul seguente materiale: *Ciona intestinalis, Ascidia malaca, Phallusia mamillata, Ascidiella aspersa* e *Ascidia mentula*.

Nelle tabelle seguenti sono riferiti in sintesi i dati più essenziali ricavati; le percentuali si riferiscono al tasso di uova fecondate.

Come si vede, *Ciona intestinalis, Ascidia malaca* e *Ascidiella aspersa* sono parzialmente e diversamente autosterili: la più autosterile è *Ciona*.

Da altre osservazioni non riportate nelle tabelle risulterebbe inoltre che le percentuali di uova autofecondabili diminuirebbero nella stagione autunnale rispetto alla estiva; ma su ciò verranno dati in seguito dati più significativi.

Confrontando i dati della tabella con quelli ottenuti da Morgan su *Ciona* (0; 0,8; 0,4%) rimane confermato ciò che l'Autore asseriva circa la diversità tra i ceppi atlantici e quelli mediterranei. Sarà opportuno far notare che in un

caso l'autofecondazione in *Ciona* mi riuscì nell' 80 % delle uova: ciò, sebbene raramente, fu notato anche da altri Autori.

Viceversa in *Ascidiella aspersa*, in un caso, solo il 7 % delle uova si sviluppò per autofecondazione.

Specie	N. esper.	Fecondazioni incrociate (controlli)			Autofecondazioni		
		N. uova	N. uova svilupp.	% uova svilupp.	N. uova	N. uova autofec.	% uova autofec.
Ciona intestinalis	41	10600	10244	96,5	11000	1512	12,6
Ascidia malaca	21	5500	5253	95	5100	1130	20,35
Phallusia mamillata . . .	15	3700	3241	87,7	3800	3337	87,3
Ascidiella aspersa	5	579	550	94,4	552	472	75,3
Ascidia mentula	4	800	612	76,5	800	668	83,7

Stabilite le percentuali di fecondazione nelle diverse specie di *Ascidie* cercai di vedere se fosse possibile di aumentare tali percentuali mediante l'impiego di varie sostanze. Morgan nel 1904 aveva fatto al proposito un gran numero di esperimenti adoperando, come fu detto, estratti di uova, estratti di spermi, etere ecc.; in alcuni esperimenti riuscì ad elevare le percentuali di uova autofecondate fin quasi al livello delle percentuali ottenute con la fecondazione incrociata. Trattando per quattro ore le uova di *Ciona* con epatopancreas di *Callinectes*, e privandole così della loro membrana, ottenne il 100 % di autofecondazione; lo stesso risultato fu ottenuto col trattamento con acqua di mare acidificata (Morgan 1941). Esperimenti sistematici di Plough (1932) con acqua di mare con pH da 7,5 ad 8,5 (ottenuto con HCl e NaOH) mostrarono che a pH normale di acqua di mare – circa 8,2 – si ha la massima percentuale di autofecondazione.

Ripetendo su *Ciona* le esperienze degli Autori precedenti modificando il pH dell'acqua di mare – pH 7,9 – 8,4 (normale) – 9–9,5 – ho veduto, come Plough che la percentuale più alta di autofecondabilità si ha a pH 8,4.

Furono condotte, successivamente, alcune esperienze di autofecondazione con «acqua di uova» desunta da uova mature di *Arbacia*; quest'acqua è ricca di fertilizina.

I risultati ottenuti furono i seguenti: su 20 esperimenti solo in 3 casi la percentuale di autofecondazione, bassissima in acqua di mare normale, salì notevolmente.

Ecco i risultati dei 3 esperimenti positivi:

ESPERIMENTO	Fecondaz. incrociata (controlli) %	Autofecondazione		
		in acqua di mare %	in acqua di uova di *Arbacia* e lavaggio %	in acqua di uova di *Arbacia* %
1° 16 novembre 1948 . . .	100	10	100	98
2° 19 novembre 1948 . . .	98	16	44	80
3° 19 novembre 1948 . . .	98	1	1	57

Nel secondo degli esperimenti più sopra riportati fu notato che il 4° lotto (uova autofecondate in acqua di uova di *Arbacia*), dopo più di tre ore, aveva uova che cominciavano appena a dividersi.

Ritengo che questi risultati siano troppo scarsi per una conclusione sicura: intendo riprendere queste esperienze nell'epoca primaverile e cioè quando le condizioni di maturazione delle uova sono nel loro momento migliore.

CONCLUDENDO. – *a*) Il fenomeno dell'autosterilità varia nelle diverse specie di *Ascidie*: è massimo in *Ciona*; seguono *Ascidia malaca, Ascidiella aspersa*.

b) Le percentuali di autofecondabilità in *Ciona* diminuiscono per pH 7,9; 9; 9,5; il massimo di autofecondabilità si ha a pH 8,4.

c) Acqua di uova di *Arbacia*, e cioè ricca di fertilizina, sembra aumentare l'autofecondabilità.

Biologia. — *Sullo sviluppo dei blastomeri isolati dell'uovo di «Ascidia» allo stadio II* (*). Nota di ARMANDO PISANÒ, presentata (**) dal Socio G. COTRONEI.

Lo studio dei fattori della segmentazione e dei poteri regolativi dei primi due blastomeri dell'uovo di *Ascidie* ha costituito l'oggetto di relativamente poco numerose ricerche. Le conclusioni a cui s'è arrivati, al riguardo, non sono sempre concordi e possono così riassumersi: mentre alcuni autori in base allo sviluppo di larve incomplete o malformate, ritengono che tale uovo allo stadio II sia un uovo strettamente a « mosaico » (Chabry 1887(1), Conklin 1905-06-11(2), Berrill 1932(3),

(*) Le presenti ricerche furono eseguite nella Stazione Zoologica di Napoli con un contributo concessomi dal C. N. R., Comitato per la Biologia. Al prof. Reverberi che mi fu prodigo di consigli e suggerimenti esprimo la mia gratitudine. Il lavoro è stato redatto nell'Istituto di Biologia dell'Università di Siena.

(**) Nella seduta del 9 aprile 1949.

(1) L. M CHABRY, *Contribution à l'embriologie normale et tératologique des Ascidies simples.* « Journ. Anat. et Phys. », vol. 23 (1887).

(2) E. G. CONKLIN, *Organization and cell-lineage of the Ascidian egg.* « Journ. Acad. Nat. Sc. Philadelphia », vol. 13 (1905); *Mosaic development in Ascidian egg.* « Journ. exp. zool. », vol. 2 (1905); *Does half of an Ascidian egg give rise to a whole larva?* « Roux Arch. », vol. 21 (1906); *The organization of the egg and the development of singles blastomeres of Phallusia mamillata.* « Journ. exper. zool. », vol. 10 (1911).

(3) N. J. BERRILL, *The mosaic development of the Ascidian egg.* « Biol. Bull. », vol. 63 (1932).

Cohen e Berrill 1936 [4]) altri autori in causa di risultati diversi sostengono, invece, che esso è regolativo (Driesch 1895[5], Crampton 1897 [6], Schmidt 1931[7]). Comunque, poichè quasi tutte le osservazioni sono state portate solo su uno dei blastomeri essendo stato l'altro – per le modalità tecniche adoperate (scuotimento, ecc.) – distrutto, ho ritenuto utile studiare il comportamento e lo sviluppo di ambedue i blastomeri separati dello *stesso* uovo. Il problema ha un'importanza capitale per quanto riguarda, specialmente, la determinazione dei palpi, del cervello e degli organi sensoriali, oltre, beninteso, la forma totale della larva.

Nell'uovo di *Ascidia* il primo piano di segmentazione ripartisce i vari plasmi germinativi in modo qualitativamente e quantitativamente eguale nei due blastomeri. Precisamente si ha: nella parte posteriore dell'uno e dell'altro blastomero metà del plasma organoformativo della musculatura e del mesenchima (corrispondente alla semiluna gialla); nella parte anteriore, in zona equatoriale, il plasma corrispondente al sistema nervoso e sotto di esso – in zona subequatoriale – la corda; l'ectoderma ha sede nell'emisfero superiore, l'endoderma in quello inferiore.

Ora, se i blastomeri isolati si sviluppano secondo un deciso carattere a mosaico, dovranno dare delle emilarve destre o sinistre, con numero incompleto di palpi, con metà cervello e con numero ridotto di organi di senso; se invece nello sviluppo dei blastomeri entrano in gioco fattori di regolazione, le larve, a parte la grandezza, dovranno risultare normali, con organi più piccoli ma morfologicamente ben conformati.

Le esperienze furono condotte su uova di *Ascidia malaca*, *Phallusia mamillata*, *Ciona intestinalis*, nei mesi da luglio a ottobre.

I principali risultati raggiunti possono così compendiarsi:

I piani di segmentazione (Reverberi 1932 [8]) cadono nei blastomeri isolati, nello stesso modo che nei blastomeri uniti: vale a dire la segmentazione è tipicamente parziale.

Col secondo solco (3° dell'uovo) i quattro blastomeri possono disporsi o in due piani secondo una forma tetraedrica, oppure in un piano come i quattro blastomeri di un uovo normale. Tale diversità, anche tra blastomeri dello stesso uovo, non dipende dal momento in cui fu effettuata la dieresi.

La comparsa del terzo solco (4° normale) porta alla formazione di otto cellule, la cui rispettiva posizione differisce da quella presentata dai blastomeri dell'uovo normale; la disposizione nei due pezzi separati può, anche, essere diversa secondo le condizioni determinatesi in ciascuno dei blastomeri al precedente stadio.

Con la terza segmentazione ciascun pezzo presenta un micromero.

(4) Cohen & Berrill, *The development of isolated blastomeres of the Ascidian egg*. « Journ. exper. Zool. », vol. 74 (1936).

(5) H. Driesch, *Von der Entwiklung einzelner Ascidienblastomeren*. « Roux Arch. », vol. I (1895).

(6) H. E. Crampton, *The ascidian half-embryo*. « Ann. New York Ac. Sc. », vol. 10 (1897).

(7) G. A. Schmidt, *Die Entwiklung der Palpen bei Ascidienhalbeilarven*. « Arch. Zool. Ital. », vol. 16 (1931).

(8) G. Reverberi, *Studi sperimentali sull'uovo di Ascidie*. « Pubbl. Staz. Zool. Napoli », vol. 12 (1932).

La gastrulazione in causa della inconsueta disposizione dei blastomeri avviene in modo anomalo; a fine processo la gastrula appare più o meno piriforme o triangolare. Le larve che derivano dai due blastomeri sono completamente avvolte dalla membrana testale, con una parte cefalica più o meno rotondeggiante nella

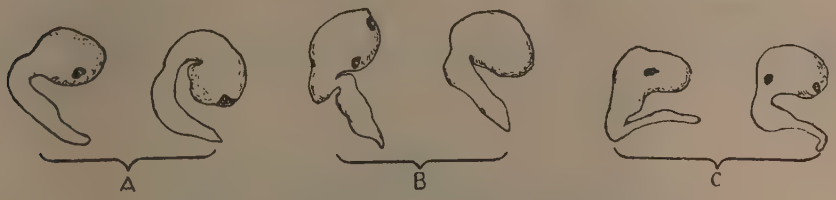


Fig. 1. – Coppie di larve sviluppatesi dai primi due blastomeri isolati.

A = Ambedue le forme larvali mostrano un organo di senso.
B = La forma larvale che è a sinistra mostra due organi di senso, mentre quella destra ne è priva.
C = La forma larvale di sinistra mostra un organo di senso, quella destra ne mostra due.

quale spiccano uno o due organi di senso. La presenza di questi non è però costante, come pure incostante è la loro posizione. La metà posteriore della larva è costituita da un'appendice a forma di codina più o meno ricurva. I palpi mancano sempre (fig. 1).

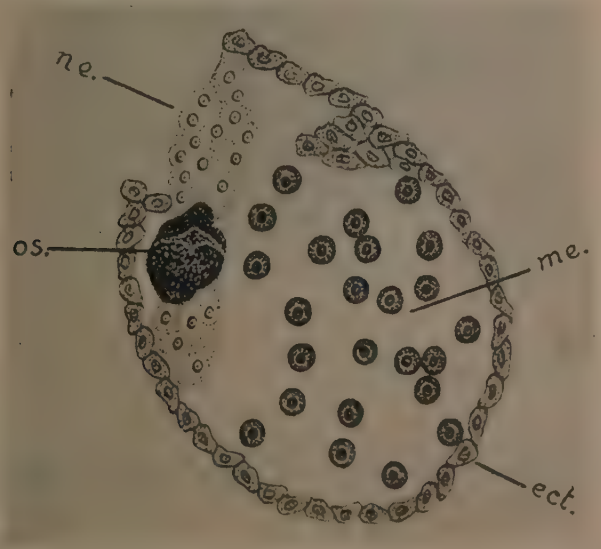


Fig. 2.

Ect. = ectoderma, ne. = tessuto nervoso, os. = organo di senso, me. = mesenchima.

All'epoca in cui i controlli erano larve natanti, molte delle forme larvali mostrarono un notevole movimento della codina o una intensa fibrillazione.

Come può giudicarsi dalla figura 1, in base all'aspetto esterno non è certo assolutamente possibile asserire che dai blastomeri isolati si ottengano larve complete; ma d'altra parte il risultato raggiunto non autorizza neppure a sostenere che le forme larvali sviluppatesi siano delle tipiche emilarve.

Lo studio delle sezioni conferma tale osservazione.

Il *materiale neurale*, come risulta dalle caratteristiche istologiche, certamente si differenzia; tuttavia non è possibile fare una distinzione tra cervello e midollo spinale. Manca la tipica cavità e talvolta parte della massa neurale sporge all'esterno per una soluzione di continuità dell'epitelio (fig. 2). Per lo più è a contatto con

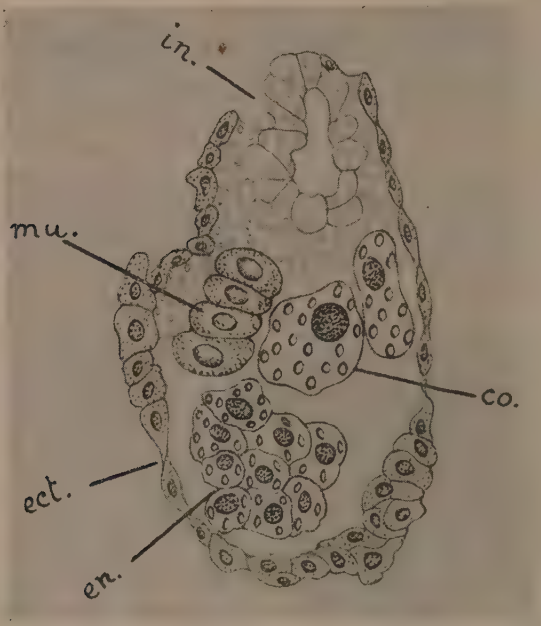


Fig. 3.

Ect. = ectoderma, en. = endoderma, co. = corda, mu. = musculatura, in. = intestino.

la massa delle cellule endodermiche o fiancheggia l'intestino quando c'è; ma può trovarsi a contatto di cellule mesenchimali o addirittura fiancheggiare la corda.

L'*endoderma* è presente in maggiore o minore quantità e non sempre riesce a formare l'intestino. Da notare, anzi, che tale organo, mentre può essere presente (fig. 3) con tutte le sue caratteristiche nella larva sviluppatasi da un blastomero, in quella originatasi dall'altro può mancare del tutto. Si trova in punti non determinati e lo si può seguire soltanto per poche sezioni. Quando non è ricoperto da tessuto epidermico, l'endoderma mostra di essere capace di riordinare le proprie

cellule che assumono allora una forma piuttosto allungata, diventano strette e rimangono aderenti l'una all'altra.

Non ho potuto riconoscere assolutamente la presenza di *palpi*; piccoli rilievi apparentemente ad essi simili che talvolta osservavo nelle forme larvali viventi, all'esame microscopico risultavano di assai diversa natura. Erano magari duplicature epidermiche o rilievi dovuti a piccole ernie dei tessuti interni.

Il numero delle *cellule muscolari* varia, ma è sempre inferiore a quello normale; esse possono circondare la corda (fig. 4) oppure rimanere ad essa adagiate in un sol lato.

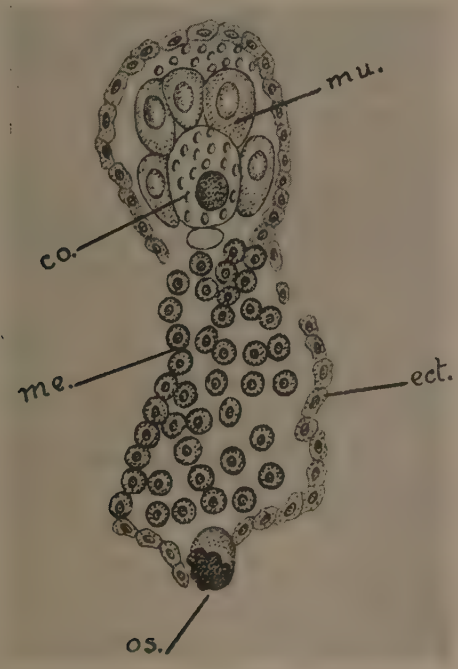


Fig. 4.

Ect. = ectoderma, me. = mesenchima, co. = corda, os. = organo di senso, mu. = musculatura.

La *corda* è sempre presente con un numero vario di cellule, giace nella parte più allungata della larva e sporge nella regione cefalica soltanto con qualche cellula. Nei tratti privi di cellule muscolari è a diretto contatto con altri tessuti, mai all'esterno.

Come già accennato, gli *organi di senso*, quando presenti, si ritrovano in un punto qualsiasi della parte cefalica della forma larvale. In qualche caso l'organo vero e proprio è costituito da pochi granuli di pigmento. Non mi risulta che tali organi, come nella larva normale, siano alloggiati nella cavità del cervello, ma possono rimanere localizzati in un punto della massa neurale. L'occhio può sporgere all'esterno (fig. 4).

Le forme larvali derivate dai singoli blastomeri isolati *posseggono, dunque, tutti i tessuti e gli organi* (nervoso, musculatura, intestino, ecc.) *seppure malformati, di una larva normale*; ma la loro struttura è disordinata e in certi casi addirittura caotica. Dobbiamo quindi ritenere che *ciascun blastomero, pur possedendo tutti i materiali organoformativi, sia incapace di riordinarli e dare un organismo in cui le varie strutture siano coordinate in un tutto veramente armonico.* Con questa limitazione si può però affermare che le *larve derivate dai singoli blastomeri sono ben più complete delle emilarve* similmente derivate dai blastomeri isolati delle forme tipiche non regolative.

Dall'insieme di queste osservazioni scaturisce logica una domanda: perchè i blastomeri pur possedendo tutti i plasmi organoformativi non son capaci di riordinarli per dare un tutto armonico, ed arrestano le loro capacità ad uno sviluppo più o meno perfetto dei singoli organi? La risposta a mio avviso è da ricercarsi non in una deficienza di materiale o in una vera impossibilità di regolazione, ma nelle modalità di segmentazione.

È vero che i territori organoformativi alla comparsa del primo solco son egualmente ripartiti nelle due metà dell'uovo e perciò presenti in ambedue i blastomeri; ma con la dieresi vengono ad essere eliminate quelle condizioni specifiche e necessarie (ad esempio lo scivolamento dei blastomeri superiori sugli inferiori, ecc.) per la formazione degli organi normali in sede normale. Si ricorderà infatti che, a dieresi compiuta, i piani di divisione cadono orientati, nei singoli blastomeri, come se questi facessero ancora parte dell'uovo intero. La posizione rispettiva dei blastomeri che si formano allo stadio 4° sarà quindi necessariamente del tutto diversa dal normale; basterà tener presente al riguardo, come venga praticamente annullato il tipico scivolamento dei blastomeri superiori sugli inferiori ed il contatto dei due blastomeri diagonalmente opposti (stadio 8° normale). Anche i movimenti gastrulari morfogenetici verranno falsati, come pure, i rapporti tra territorio e territorio.

L'uovo di *Ascidia* allo stadio 2° è stato paragonato per la distribuzione dei plasmi organoformativi a quello di Anfiosso; è noto, però, che i blastomeri isolati di questo dànno delle larve normali. A che cosa dunque deve ascriversi la divergenza dei risultati tra i due tipi di uova? È molto probabile che entrino in gioco per grande parte i processi di segmentazione e di gastrulazione dell'uovo.

Ciò fa ritenere assai probabile che qualora si potesse modificare sperimentalmente il tipo di segmentazione parziale dei blastomeri isolati di *Ascidia*, sottoponendoli ad esempio ai raggi ultravioletti ovvero trattandoli con soluzioni contenenti opportuni sali (litio, ecc.), si potrebbero ottenere larve complete.

Su ciò verrà riferito in seguito.

Biologia. — *A proposito dell'origine interrenale del tessuto midollare della gonade negli Anfibi e negli Uccelli* (*). Nota di ENRICO VANNINI, presentata (**) dal Corrisp. U. D'ANCONA.

Datano ormai da alcuni anni le osservazioni organogenetiche, effettuate dapprima su girini di *Rana* e subito dopo estese all'embrione di pollo (1), che mi condussero a sostenere la derivazione del tessuto midollare della gonade dal blastema dell'interrenale. Prospettai allora che tale parentela di origine embriologica potesse forse essere posta in relazione con la ben nota assomiglianza chimica e funzionale, che esiste fra gli ormoni elaborati dalle gonadi e dai tessuti derivati dall'interrenale (2).

Questi reperti han suscitato qua e là qualche dissenso, o per lo meno contro di loro è stato sollevato qualche dubbio, che non mi sembra però determinato da nessun dato contrastante di osservazione embriogenetica, ma solamente da presupposti teorici desunti dalle opinioni organogenetiche finora prevalenti. L'unico autore, che abbia compiuto una parziale revisione delle mie osservazioni morfologiche, è infatti il Papi (3) dell'Istituto di Zoologia dell'Università di Pisa, diretto dal prof. M. Benazzi; e i suoi reperti, su un materiale diverso da quello da me usato (ibridi intersessuati di *Triton cristatus* ♀ × *T. vulgaris* ♂) sono una piena conferma di quanto io stesso ho veduto nei girini delle rane.

Io sto ora ultimando una serie di ricerche sullo sviluppo dell'abbozzo della gonade nell'embrione dei Mammiferi (cavia); e posso dire che le condizioni riscontrate, pur presentando interessanti differenze rispetto a quelle degli Anfibi e degli Uccelli, dimostrano anche in questo materiale una strettissima parentela di origine embriologica fra il blastema interrenale ed il tessuto midollare della gonade.

Prima di rendere noti questi nuovi miei reperti, ho ritenuto opportuno, nella presente Nota, precisare o ribadire alcuni punti delle mie osservazioni precedenti; spero così di evitare in futuro eventuali malintesi, che potrebbero derivare soprattutto dalla diversa terminologia comunemente usata per indicare porzioni omologhe dell'abbozzo della gonade nei vari gruppi di Vertebrati.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia e Anatomia comparata dell'Università di Padova, diretto dal prof. Umberto D'Ancona, con un sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 9 aprile 1949.

(1) E. VANNINI, *Sull'origine interrenale dei cordoni della rete e dei corpi grassi durante lo sviluppo delle gonadi e sulla partecipazione dell'interrenale ai processi di intersessualità giovanile nella «Rana agilis»*. « Atti Accad. d'Italia », vol. XIII, p. 731 (1942); E. VANNINI, *Sull'origine interrenale del tessuto midollare della gonade nell'embrione di pollo*. « Atti Accad. d'Italia », vol. XIV, p. 493 (1943).

(2) È superfluo ricordare che dal blastema dell'interrenale deriva, in tutti i Vertebrati, il tessuto omologo alla corteccia surrenale dei Mammiferi. Tale tessuto non elabora soltanto i veri e propri ormoni steroidi corticosurrenali (corticosterone, desossicorticosterone), ma, per lo meno nei Mammiferi, anche altri ormoni androgeni, estrogeni e progestativi.

(3) F. PAPI, *Osservazioni sulla struttura delle gonadi di tritoni ibridi, in riferimento alla genesi del tessuto midollare*. « Atti Soc. Toscana Sc. Nat. », vol. LIV (1947).

Sarà anzitutto necessario definire esattamente cosa si deve intendere per « tessuto midollare », nella gonade degli Anfibi e degli Amnioti.

Per gli Anfibi, sono oramai universalmente conosciute le indagini del Witschi (da molte parti confermate), che dimostrano come l'abbozzo primitivo delle gonadi sia suddiviso in un tessuto corticale ed uno midollare, dei quali il primo, formato dalla parete peritoneale ed includente precocemente i gonociti primordiali, è un territorio potenzialmente ovarico, mentre il secondo, costituito dapprima da sole cellule somatiche, è un territorio potenzialmente testicolare. I gonociti si differenziano successivamente in ovogoni e in ovociti se rimangono localizzati nel territorio corticale, mentre il tessuto midollare regredisce, scavandosi e riducendosi a tappezzare le ampie lacune così formatesi nel centro delle ovaie; i gonociti stessi si orientano invece verso la gametogenesi maschile, qualora emigrino entro il tessuto midollare, determinando così la regressione del territorio corticale (4).

Che negli Amnioti l'abbozzo primitivo delle gonadi consti ugualmente di un territorio corticale ed uno midollare, è assai evidente da tutte le descrizioni embriogenetiche, e per l'embrione di pollo è stato chiaramente dimostrato dalle ricerche del Witschi e della Dantschakoff (5). Difficoltà possono nascere però dalla nomenclatura differente. Il territorio corticale, che come negli Anfibi compare prima del tessuto midollare, generalmente viene denominato « epitelio germinale », ed è formato da un tratto di parete peritoneale costituito da cellule somatiche assai alte inframezzate da gonociti primordiali. Quello che io chiamo qui tessuto midollare, comunemente viene indicato con il nome di « cordoni sessuali primari » o « cordoni midollari ».

Tutte le indagini più recenti – comprese quelle effettuate con iniezioni precoci di ormoni estrogeni o androgeni (6) – conducono ad ammettere che pure negli Amnioti abbia un valore potenzialmente femminile il territorio corticale della gonade, ed un valore potenzialmente maschile il tessuto midollare. Quando le gonadi si differenziano in ovaie, si nota infatti un considerevole ispessimento dell'epitelio germinale, determinato in gran parte dalla moltiplicazione dei gonociti in esso contenuti, con formazione dei così detti « cordoni sessuali secondari » o « cordoni corticali di Pflüger », i cui elementi germinali saranno destinati a generare gli ovociti; i cordoni sessuali primari frattanto regrediscono, trasformandosi nella così detta zona midollare dell'ovaia. Quando le gonadi si differenziano in testicoli, è viceversa l'epitelio germinale che ben presto regredisce senza formare evidenti cordoni corticali, mentre invece i cordoni midollari, colonizzati abbondantemente dagli elementi germinali, si accrescono ulteriormente differenziandosi in tubuli seminiferi (7).

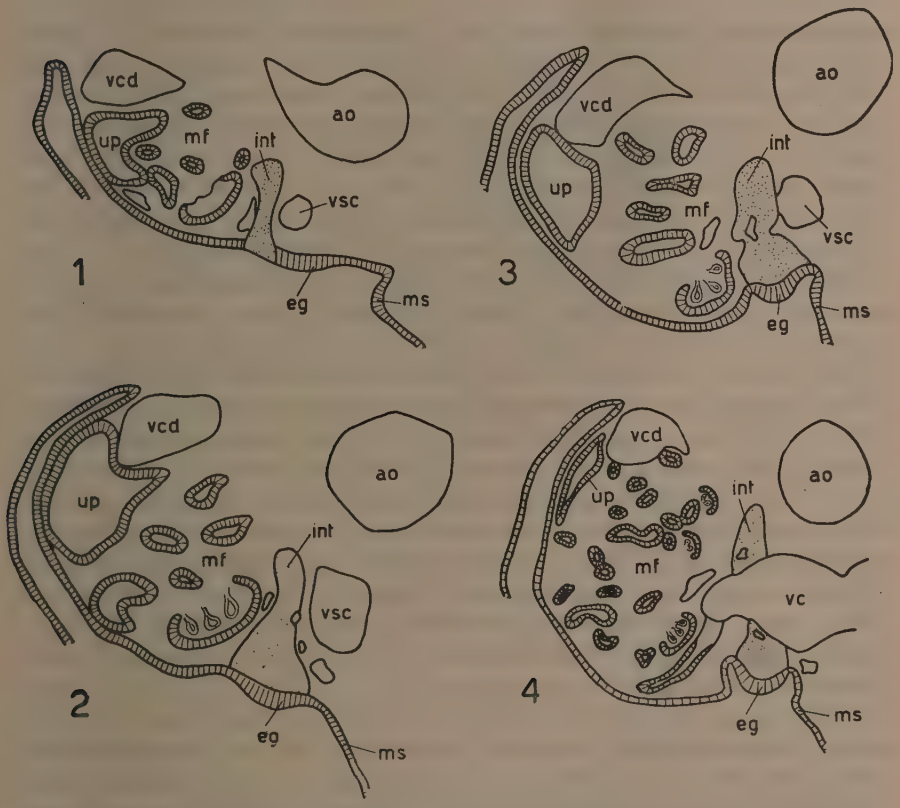
(4) E. Witschi, *Bestimmung und Vererbung des Geschlechts bei Tieren.* « Handb. der Vererb. », Bd. II (1929).

(5) E. Witschi, *Origin of asymmetry in the reproductive system of birds.* « Amer. Journ. Anat. », vol. LVI, p. 119 (1935); V. Dantschakoff, *Der Aufbau des Geschlechts beim höheren Wirbeltier.* Fischer, Jena (1941).

(6) E. Wolff, *Les changements de sexe.* Gallimard, Paris (1946).

(7) E. Padoa, *Storia naturale del sesso.* Einaudi, Torino (1948).

Le mie citate ricerche hanno appunto dimostrato che il suddetto tessuto midollare delle gonadi, negli Anfibi e negli Uccelli, prende origine dal blastema interrenale. Le figure annesse, esattamente corrispondenti alle microfotografie del



Sezioni trasversali della regione della gonade destra nell'embrione di pollo.

Fig. 1: 4 giorni di incubazione; Fig. 2: 4 giorni e mezzo; Fig. 3: 5 giorni; Fig. 4: 5 giorni e mezzo. Le prime tre figure sono ingrandite 127 volte, la quarta 63 volte. Esse illustrano la derivazione del tessuto midollare della gonade dal blastema dell'interrenale.

eg = epitelio germinale; *int* = blastema interrenale; *ms* = rivestimento peritoneale del mesenterio; *mf* = mesonefro; *up* = uretere primario; *ao* = aorta; *vcd* = vena cardinale posteriore; *vsc* = vena sottocardinale; *vc* = vena cava posteriore. Non sono state rappresentate le cellule mesenchimali che riempiono lo spazio fra le varie strutture epiteliali.

mio lavoro del 1943 sull'embrione di pollo, chiariranno il decorso del processo molto meglio che una lunga descrizione.

Nell'embrione di pollo di 4 giorni di età (fig. 1) l'abbozzo della gonade consta del solo territorio corticale, corrispondente all'epitelio germinale, ed è del tutto privo di tessuto midollare; è ben visibile il blastema interrenale, attivamente

proliferante dalla parete peritoneale lateralmente al territorio della gonade [8]. A 4 giorni e mezzo (fig. 2) il blastema interrenale si è separato dalla matrice peritoneale e si è addossato all'epitelio germinale, costituendo così, con la sua porzione più ventrale, il tessuto midollare della gonade. A 5 giorni (fig. 3) si va accennando una separazione fra quest'ultimo tessuto e la porzione più dorsale del blastema interrenale, destinata a partecipare alla costituzione del surrene. A 5 giorni e mezzo di età (fig. 4) la formazione della vena cava posteriore per confluenza delle sottocardinali si associa ad una più completa disgiunzione fra il territorio midollare della gonade ed il blastema del tessuto interrenale, che appare ora localizzato dorsalmente a tale vaso e agli ampi sbocchi in esso delle vene renali reveenti. Non parlo degli elementi del tessuto cromaffine, che certamente non intervengono nella costituzione della gonade, perchè soltanto negli embrioni di 6 giorni dan chiari segni di penetrazione entro il blastema interrenale.

Conviene aggiungere che i processi organogenetici descritti son precedenti al differenziamento sessuale della gonade, che, come è noto, nel pollo si rende manifesto in un periodo successivo al sesto giorno di vita dell'embrione.

Per i girini degli Anfibi, le mie citate osservazioni del 1942 si riferiscono ad una rana di razza sessualmente indifferenziata, in cui le gonadi di tutti gli individui si differenziano dapprima costantemente in senso ovarico, mentre soltanto più tardi queste ovaie si trasformano in testicoli in circa una metà degli esemplari, che si devono considerare geneticamente maschili. Il primo stadio dello sviluppo delle gonadi è molto simile a quello descritto per il pollo, a parte il fatto che, nei girini delle rane, il blastema interrenale appare già completamente distaccato dalla parete peritoneale, quando compare l'abbozzo del territorio corticale della gonade. Subito dopo, a spese del blastema interrenale, va organizzandosi il tessuto midollare della gonade, ed anche questa fase organogenetica non diversifica sostanzialmente da quella rilevata per il pollo.

Unica differenza infatti è che, nei girini delle rane, le connessioni fra il tessuto midollare della gonade e la porzione rimanente del blastema interrenale si conservano assai più a lungo che nel pollo: e cioè per tutto il periodo iniziale del differenziamento delle ovaie, caratterizzato da una intensa moltiplicazione dei gonociti nell'epitelio germinale, con formazione di numerose cisti di ovogoni, corrispondenti ai cordoni corticali degli Amnioti. Solamente quando, nel territorio corticale delle ovaie, dagli ovogoni si originano ovociti di I ordine in profase, si interrompono le connessioni fra il blastema interrenale ed il tessuto midollare, e quest'ultimo comincia allora a scavarsi centralmente.

I fenomeni di inversione sessuale, che si verificano più tardi negli esemplari geneticamente maschili, sono una nuova conferma di quanto ho finora sostenuto. Il processo di mascolinizzazione consiste infatti essenzialmente nel riempimento

(8) Che nell'embrione di pollo il blastema interrenale proliferi dalla parete peritoneale lateralmente alla regione della gonade, anzichè medialmente come era stato prima sostenuto (Soulié, Poll), fu dimostrato per la prima volta da J. Firket (*Recherches sur l'organogenèse des glandes sexuelles chez les Oiseaux.* « Arch. Biol. », vol. XXIX, p. 201 (1914) e confermato da N. Goormaghtigh (*Organogenèse et histogenèse de la capsule surrénale et du plexus coeliaque.* « Arch. Biol. », vol. XXXI, p. 83 (1921).

delle cavità centrali delle ovaie da parte di compatti cordoni di tessuto midollare, provenienti dai blastemi interrenali e formati da cellule interrenali indifferenziate, che, scorrendo lungo le pareti laterali della vena cava posteriore, attraversano l'ilo della gonade dopo averne percorso il meso peritoneale (9). Gli elementi germinali che non avevano ancora raggiunto lo stadio di ovociti di I ordine in profase migrano allora in questo nuovo, abbondante tessuto midollare, ove assumono il valore di spermatogoni, mentre invece gli ovociti degenerano e vengono completamente riassorbiti, provocando così la regressione del territorio corticale dell'ovaia. Le connessioni fra il nuovo tessuto midollare ed i blastemi interrenali si interrompono soltanto quando le gonadi hanno acquistato completamente l'aspetto di testicoli.

Queste mie osservazioni, sull'origine interrenale del tessuto midollare della gonade negli Anfibi e negli Uccelli, contrastano con quelle della grande maggioranza dei ricercatori precedenti. Infatti, per la generalità degli Amnioti, viene comunemente ammesso che i cordoni sessuali primari (o cordoni midollari) derivino da una proliferazione profonda dell'epitelio germinale, mentre invece, per gli Anfibi e per gli Uccelli, il Witschi ha ripetutamente sostenuto una loro derivazione dal blastema mesonefrico (10). Le mie recenti ricerche sull'embrione di cavia mi dimostrano che effettivamente, in questo materiale, i cordoni midollari della gonade possono in parte proliferare dall'epitelio germinale; ma, come ho detto precedentemente, le condizioni da me riscontrate nei Mammiferi saranno oggetto di una comunicazione successiva, che illustrerà, in questo gruppo di Vertebrati, modalità sensibilmente diverse di parentela embriogenetica fra il blastema interrenale ed il tessuto midollare della gonade. Per i girini degli Anfibi e per l'embrione di pollo, secondo le mie personali osservazioni, nè l'epitelio germinale nè i tessuti mesonefrici prendono parte alla costituzione del tessuto midollare della gonade.

Le descrizioni del Witschi sull'organogenesi del territorio midollare della gonade negli Anfibi e negli Uccelli sono del tutto simili alle mie, con la sola differenza che egli considera blastema mesonefrico quel che in effetti è il blastema dell'interrenale. In un lavoro recente (11), nel quale critica i miei reperti, il Witschi crede di poter conciliare le nostre opinioni divergenti ammettendo che da uno stesso blastema primitivo (il mesoderma intermedio) prendano origine il mesonefro, il tessuto midollare della gonade ed il blastema del tessuto interrenale (12).

(9) È appunto questo il processo che è stato confermato dal PAPI (loc. cit.) in ibridi intersessuati di *Triton*.

(10) La DANTSCHAKOFF, che per l'embrione di pollo inizialmente aveva anch'essa sostenuto l'origine mesonefrica del tessuto midollare della gonade, nella sua citata opera del 1941 mette in dubbio le proprie precedenti affermazioni.

(11) E. WITSCHI, *Hormonal regulation of development in lower Vertebrates.* « Cold Spring Harbor Symp. Quant. Biol. », vol. X, p. 145 (1942).

(12) Già nel suo citato lavoro del 1935, sull'embrione degli Uccelli, il WITSCHI stesso aveva del resto rilevato l'innegabile connessione esistente fra il blastema interrenale e il tessuto midollare della gonade, e (non avendo seguito, come io ho fatto nel mio lavoro del 1943, tutte le fasi dello sviluppo dell'interrenale) aveva supposto che il tessuto interrenale derivasse da un residuo del blastema mesonefrico, non utilizzato nella formazione del tessuto midollare della gonade. Nei girini degli Anfibi, il WITSCHI invece non si era mai occupato della sede e del comportamento del blastema interrenale.

È interessante rilevare che con questa concezione, che modifica quella primitiva della semplice derivazione del tessuto midollare dal blastema mesonefrico, anche il Witschi accetta con me una strettissima parentela di origine embriologica fra il tessuto interrenale ed il tessuto midollare delle gonadi. Dobbiamo tuttavia far notare che le conoscenze embriologiche attuali, facilmente controllabili negli embrioni sia di Anfibi che di pollo, mettono fuori di dubbio che dal mesoderma intermedio deriva solo il mesonefro, mentre il blastema interrenale si origina più tardi dalla parete peritoneale. In embrioni di *Rana* io ho praticato l'asportazione unilaterale del mesoderma intermedio, e nello sviluppo successivo ho riscontrato, dal lato operato, la completa assenza del mesonefro, ma la presenza del blastema interrenale e di una gonade normalmente provvista di tessuto midollare; ciò conferma, anche in via sperimentale, l'indipendenza di origine embriologica fra il mesonefro e il blastema interrenale, e l'origine esclusiva del tessuto midollare della gonade da quest'ultimo blastema [13].

Ultimamente, anche il Dulbecco [14], in uno studio molto interessante sull'influenza dei raggi γ nello sviluppo delle gonadi embrionali del pollo, ha messo in dubbio i miei risultati, perchè gli sembra di rilevare già precocemente una diretta continuità fra il complesso cellulare corrispondente ai cordoni midollari della gonade e la porzione ventromediale del mesonefro in formazione. Ma la fig. 12 del lavoro di Dulbecco, offerta come documento di questa affermazione e ricavata da un embrione irradiato del quarto giorno di età, non mi sembra dimostrativa nel senso desiderato dall'Autore. Anzi, a mio avviso, essa assomiglia notevolmente alla fig. 1 della presente Nota, pure trovandosi in uno stadio di sviluppo un po' più progredito. Medialmente al mesonefro, vi riconosco infatti il blastema interrenale appena distaccatosi dalla parete peritoneale; e gli scarsissimi elementi del tessuto midollare, che già si scorgono sotto l'epitelio germinale, appaion connessi con la porzione ventromediale del blastema interrenale, anzichè con i tessuti mesonefrici.

Il Dulbecco soggiunge di essere indotto a ritenere (in conformità con l'interpretazione di autori precedenti) che dalla parte ventromediale del mesonefro prendano origine i cordoni della rete, il che gli sembra in contrasto con le mie citate osservazioni. Ciò mi offre ora l'opportunità di completare le descrizioni precedenti, per precisare i rapporti che intercorrono fra l'origine interrenale del tessuto midollare della gonade e la genesi dei cordoni della rete.

È ben noto che i « cordoni della rete » sono una cosa diversa dai cordoni sessuali primari o cordoni midollari, e stabiliscono una più tardiva connessione (unione urogenitale) fra la parte profonda di questi ultimi ed i tubuli del mesonefro, al livello dei corpuscoli malpighiani; essi persistono con il nome di *rete testis* nel sesso maschile, ove una parte del mesonefro si trasforma in epididimo, mentre invece regrediscono nel sesso femminile, ove formano la così detta *rete ovarii*.

(13) E. Vannini, *Esperimenti sullo sviluppo normale della gonade in assenza del blastema mesonefrico nei girini di « Rana agilis »*. « Atti Ist. Veneto Sc. Lett. Arti », vol. CIV, p. 55 (1945).

(14) R. Dulbecco, *Azione dei raggi γ del radio sullo sviluppo della gonade e sui caratteri somatici del sesso nell'embrione di pollo*. « Atti Accad. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. II, p. 3 (1948).

Molti autori ritengono che i cordoni della rete derivino da una proliferazione delle capsule di Bowman dei corpuscoli malpighiani, che si dirige verso i cordoni midollari; altri ammettono la loro genesi per addensamento di elementi mesenchimali fra le capsule di Bowman e la faccia profonda delle gonadi; altri ancora sostengono la loro formazione per proliferazioni delle estremità dei cordoni midollari, che si dirigono dalla gonade verso il mesonefro.

Qualunque sia il modo di origine dei cordoni della rete nei vari gruppi di Vertebrati, esso non può infirmare il concetto dell'origine interrenale del primitivo tessuto midollare della gonade, da me illustrato per gli Anfibi e per gli Uccelli. Nell'embrione di pollo, le mie ricerche (concordanti in ciò con quelle del Witschi) hanno mostrato che i cordoni della rete si cominciano a formare al sesto giorno di età nella porzione più caudale delle gonadi, con l'aspetto di travate cellulari proliferanti dalla faccia profonda del tessuto midollare, dirette verso il mesonefro (vedi fig. 5 del mio lavoro del 1943). In questo caso, tanto il tessuto midollare della gonade, quanto i cordoni della rete che si sviluppano più tardi, sono perciò formati da un materiale cellulare, che inizialmente faceva parte del blastema interrenale. Non si può escludere però che in altri Vertebrati i cordoni della rete si organizzino in maniera differente.

Nei suoi lavori sui girini degli Anfibi il Witschi ha usato spesso il nome di cordoni della rete, per indicare quei cordoni di tessuto midollare, provenienti secondo lui dal blastema mesonefrico e secondo me dal blastema interrenale, che corrispondono ai cordoni sessuali primari o cordoni midollari degli Amnioti [15]. Ma tale termine (che io stesso ho usato nel mio lavoro del 1942 sui girini delle rane) è preferibile che sia sostituito con quello di « tessuto midollare », onde evitare confusioni di nomenclatura, anche se è vero che negli Anfibi, come negli Uccelli, da questo stesso tessuto midollare della gonade tardivamente proliferano i cordoni della rete.

A conclusione di questa breve messa a punto, potrei citare una lunga serie di osservazioni embriogenetiche, di vecchia data oppure assai recenti, che, dimostrando chiaramente l'esistenza di connessioni fra il blastema interrenale e l'abbozzo della gonade, portano un largo appoggio alla tesi che io sostengo. La maggior parte di queste osservazioni, effettuate su Rettili o Mammiferi (Janošik, 1883, 1890, 1913; von Mihalcovics, 1885; Valenti, 1889; Inaba, 1891; Soulié, 1903; Allen, 1904, 1905; Celestino da Costa, 1920, 1926, 1933; Goormaghtigh, 1921; Forbes, 1940; Nelsen, 1944), però rivela condizioni molto simili a quelle che sto attualmente riscontrando nell'embrione di cavia, e perciò mi riservo di discuterle ampiamente quando descriverò per esteso questi nuovi miei reperti.

Qui basterà ricordare che, per l'embrione degli Uccelli, già nel 1904 Loisel [16] aveva incidentalmente rilevato, in precoci stadi di sviluppo, netti rapporti di continuità fra l'abbozzo della gonade ed il blastema dell'interrenale; il che l'aveva

(15) E. WITSCHI, *Studies on sex differentiation and sex determination in Amphibians. I. Development and sexual differentiation of the gonads of « Rana sylvatica »*. « Journ. Exp. Zool. », vol. LII, p. 235 (1929).

(16) G. LOISEL, *Les phénomènes de sécrétion dans les glandes génitales. Revue générale et faits nouveaux*. « Journ. Anat. Physiol. », vol. XL, p. 536 (1904).

condotto a sostenere un'origine embriologica comune fra queste due strutture ghiandolari. Il Loisel non approfondì ulteriormente la quistione; ma la fig. 4 del suo lavoro, ricavata da un embrione di *colin de Californie* (che io ritengo identificabile con *Lophortyx californicus*), è esattamente corrispondente alla fig. 2 o alla fig. 3 della presente Nota. Più di recente, anche la Dantschakoff, in un paio di brevi Note [17], accenna chiaramente alla probabilità che nel pollo il tessuto midollare della gonade, progenitore degli elementi interstiziali del testicolo, abbia una origine embriologica comune con il blastema del tessuto interrenale, omologabile alla corteccia surrenale dei Mammiferi.

Biologia. — *Ulteriori osservazioni intorno all'effetto della serra calda sul ciclo sessuale del Tritone crestato* [*]. Nota di Valdo Mazzi e Mario Galgano, presentata [**] dal Socio N. Beccari.

In una esperienza eseguita su esemplari di *Triturus cristatus carnifex* (Laur.) allo scopo di saggiare l'effetto della serra calda durante il periodo freddo dell'anno sul quadro citologico ipofisario [1], sono emersi dei dati interessanti intorno alle differenze individuali di risposta del ciclo sessuale alla temperatura di tipo estivo, meritevoli di essere ricordati.

Gli animali di cui ci siamo serviti furono tutti catturati nel Padule di Brozzi, in pianura presso Firenze, il 17 novembre 1947. Di essi 19 ♀♀ e 14 ♂♂ furono tenuti in un acquario con fondo di marmo bianco ad una temperatura media mensile di 23°,5 dal 17 novembre 1947 al 17 febbraio 1948, giorno in cui furono sacrificati. Per controllo furono uccisi 10 ♀♀ e 10 ♂♂ all'inizio dell'esperienza; altre 10 ♀♀ ed altri 10 ♂♂ vennero tenuti a temperatura naturale in un acquario con fondo di marmo bianco e furono sacrificati al termine dell'esperimento.

Rispetto alle consimili esperienze precedenti eseguite da uno di noi [2] la temperatura media mensile, ottenuta questa volta in serra calda, è di poco superiore (23°,5 invece di 22°,65); anche la minima media e la massima media sono risultate di poco superiori. Lo scarto medio mensile è stato di 1°,5; lo scarto massimo giornaliero non ha mai superato i 3°. Tutti gli animali furono nutriti con lombrichi, invece che con carne di manzo tagliuzzata.

Le gonadi furono fissate in liquido di Stieve, incluse in celloidina e paraffina, sezionate a 12 μ, e colorate con l'emallume e con la fucsina acida.

(17) V. Dantschakoff, *Sur des proliférations endocriniennes aux dépens de l'épithélium germinatif.* «C. R. Acad. Sc. Paris», vol. CC, p. 1632 (1935); V. Dantschakoff, *Sur le mécanisme des déviations sexuelles dans une femelle génétique à la suite:* a) *de testostéronisation;* b) *du freemartinisme;* c) *des tumeurs de la surrénale (virilisme).* «C. R. Acad. Sc. Paris», vol. CCVI, p. 1411 (1938).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata dell'Università di Firenze.

(**) Nella seduta del 9 aprile 1949.

(1) V. Mazzi, «Rend. Acc. Naz. dei Lincei». Questo stesso fascicolo.

(2) M. Galgano, «Arch. Zool. Ital.», *32*, 33 (1947).

OSSERVAZIONI E CONFRONTI.

Femmine. – Nelle ♀♀ di controllo uccise all'inizio dell'esperimento le ovaie erano piuttosto grandi, con ovogenesi nel secondo periodo di attività (cioè con la massima parte degli ovociti in stadio diffuso, senza o con vitellogenesi in atto, e gli scarsi ovociti in stadi meno avanzati tutti o quasi tutti in degenerazione); i C. S. s. erano piuttosto ben sviluppati.

Le ♀♀ di controllo uccise alla fine dell'esperienza erano all'incirca come sopra, ma di regola con maggior quantità di grossi ovociti vitellati e con ovidutti ancor più sviluppati; però non presentavano uova negli ovidutti, a differenza dei controlli in natura.

Le 19 ♀♀ tenute in serra calda per tre mesi potevano essere distinte nei seguenti tre gruppi, in base all'esame dei C. S. s. esterni ed interni.

I gruppo. 11 ♀♀. C. S. s. interni ed esterni completamente ridotti. In tali ♀♀ si era riattivata la prima parte dell'ovogenesi (nuova formazione di giovani ovociti; ovociti dal termine dell'ultima telofase ovogoniale fino circa all'inizio dello stadio diplotene) ed il passaggio dalla prima alla seconda fase (la seconda fase comprende gli ovociti in stadio diffuso, ma senza vitellogenesi); la terza fase (vitellogenesi in atto) continuava ancora moderatamente; i grossi ovociti vitellati residuali ancora sani erano scarsi, mentre abbondanti erano quelli in stadio precoce, oppure anche avanzatissimo, di riassorbimento.

II gruppo. 3 ♀♀. C. S. s. alquanto sviluppati in due esemplari, di incerta valutazione nell'altro; ovidutti quasi completamente ridotti. Ovaie come sopra.

III gruppo. 5 ♀♀. C. S. s. esterni alquanto sviluppati in tre individui, di incerta valutazione negli altri due; ovidutti alquanto o assai sviluppati. Ovaie con ovogenesi come sopra, ma numerosi i grossi ovociti vitellati residuali ancora sani e non molti quelli in vari stadi di riassorbimento.

Nel I gruppo la serra ha dato i risultati già altre volte ottenuti. Ma negli animali del II e sopratutto del III gruppo si è rivelata insufficiente, sia pure dopo tre mesi, a ridurre gli ovidutti. Nell'esperienze precedenti comparabili con questa, invece, gli ovidutti apparvero completamente ridotti già dopo un mese e mezzo o dopo due mesi di permanenza in serra calda (in totale 19 esemplari con ovidutti completamente ridotti osservati dopo una permanenza da un mese e mezzo a tre mesi in serra calda).

Maschi. - Nei ♂♂ di controllo uccisi all'inizio dell'esperimento i testicoli erano in stasi spermatogenetica, con una piccola porzione craniale a proto- e spermatogoni ed una grossa porzione caudale a spermi maturi in ogni lobo. La evacuazione (caudo-cefalica) degli spermi era in atto già da qualche tempo e perciò la porzione a spermi presentava caudalmente del tessuto giallo propriamente detto. I canali e i duttuli escretori della regione in cui si vuotavano le ampolle e il dotto collettore longitudinale, dilatati, contenevano spermi. I C. S. s. interni ed esterni apparivano in complesso piuttosto ben sviluppati.

Nei ♂♂ di controllo uccisi al termine dell'esperimento la stasi spermatogenetica perdurava sempre ed era aumentato, con il proseguire dello svotamento dell'ampolle a spermi, il tessuto giallo propriamente detto; i C. S. s. interni ed esterni si presentavano in complesso all'incirca sviluppati come nei precedenti.

Dei 14 ♂♂ tenuti per tre mesi in serra calda, 13 dettero risultati perfettamente corrispondenti a quelli ottenuti in precedenza: C. S. s. completamente regrediti; vecchia porzione a spermi riassorbita; spermatogenesi riattivata, in attività piena e normale in 5 esemplari (giungente fino a un buon numero di spermi; solo in tre di questi esemplari scarsissime degenerazioni fra gli spermatidi allungati), un po' o alquanto subnormale (giungente fino a un numero limitato di ampolle a spermi, con discreta o notevole quantità di degenerazioni fra gli spermatidi allungati e talora anche rotondi) in 7 esemplari, e nettamente subnormale in 1 esemplare (testicoli piccoli; spermatogenesi soltanto fino alla formazione di pochi spermatidi allungati con degenerazioni fra tutte le categorie di cellule germinali); fagocitosi nelle ampolle più caudali (moderata nei sei esemplari a spermatogenesi normale; notevole negli esemplari a spermatogenesi subnormale), con conseguente formazione di tessuto giallo fagocitario; canali e duttuli escreatori stretti, vuoti.

Il rimanente esemplare mostrava, però, C. S. s. esterni ed interni lievemente sviluppati. Oltre a questa differenza l'esame istologico dei testicoli ha rivelato discreta evacuazione degli spermi neoformati dalle ampolle più caudali, con formazione conseguente di tessuto giallo propriamente detto, e duttuli e canali escretori piuttosto dilatati, contenenti spermi. Per il resto la temperatura di tipo estivo aveva sortito il solito effetto: la spermatogenesi si era riattivata e si presentava in piena, regolare attività con formazione di numerosi spermi, mentre la vecchia porzione a spermi era stata completamente riassorbita.

Il reperto è eccezionale, in quanto che nelle passate esperienze, condotte sopra un numero maggiore di esemplari, era stata sempre notata completa riduzione dei C. S. s. al massimo dopo tre mesi di serra, e mai evacuazione degli spermi neoformati.

Considerazioni. – I dati ricavati dalla presente esperienza si prestano a interessanti considerazioni, nel quadro delle nostre conoscenze intorno ai fattori ecologici e genetici del ciclo sessuale degli Anfibi [2] [3].

L'analisi sperimentale del ciclo sessuale annuale negli Anfibi viventi in climi con un periodo freddo dell'anno ha messo in evidenza che il ciclo è modellato principalmente sulla variazione stagionale della temperatura nell'*habitat* naturale.

Nell'insieme, il ciclo sessuale annuale è congruente con l'ambiente; ma singole parti del complesso fenomeno possono presentare un'incongruenza più o meno spiccata. L'incongruenza di una parte del ciclo (per esempio, la presenza nei ♂♂ di *Rana esculenta* di una enorme quantità di cellule germinali in maturazione,

(3) G. Cei, «Arch. Zool. Ital.», *30* (1942); «Studi Trentini di Sc. Nat.», *23* (1943); «Mon. Zool. Ital.», *54*, Suppl. (1944); Ibid. *56* (1947); M. Galgano, «Arch. Ital. Anat. Embriol.», *35* (1935); Ibid., *35* (1936); «Boll. Zool.», *14* (1943); *Symposium intorno ai fattori ecologici e ai fattori genetici nelle specializzazioni degli individui*. Verbania Pallanza (1948) (in corso di stampa); J. D. Ifft, «Biol. Bull.», *83* (1942).

sensibili al freddo, al principio della cattiva stagione, per cui si verifica fra di esse un gran numero di degenerazioni e di processi atipici) significa che tale parte del ciclo non è plasmata in modo congruente con l'ambiente.

La congruenza è ottenuta con meccanismi vari, di cui ricorderemo schematicamente solo quelli necessari alla chiarezza della nostra esposizione. Una delle modalità per attuare la congruenza è la reazione adeguata di fronte alla variazione stagionale della temperatura. Tale reattività è differente nelle varie specie ed anche nei due sessi di una stessa specie; questo fatto, e quello della costanza nell'insieme delle risposte ottenute con opportune variazioni artificiali della temperatura, sembrano indicare con chiarezza, pensiamo, il carattere fondamentalmente ereditario della reattività in parola (per esempio la chiusura del ciclo spermatogenetico nel Tritone crestato, determinato dall'abbassamento della temperatura estiva, che si verifica verso la fine dell'estate e il principio dell'autunno).

Un'altra modalità con la quale è attuata la congruenza è il modellamento di certe parti del ciclo sulla variazione stagionale della temperatura dell'*habitat*, regolato quasi esclusivamente da fattori interni, anch'essi verosimilmente ereditari, che alla prova sperimentale si dimostrano in larga misura indipendenti dalla temperatura ambientale (per esempio chiusura del ciclo gametogeno e stasi spermatogenetica invernale nel ♂ di *Rana temporania*: cfr. Cei, 1944). È possibile che in tali casi le modificazioni stagionali del sistema endocrino abbiano finito col diventare in gran parte fisse, indipendenti dalla temperatura, pur restando sempre modellate sulla variazione stagionale di essa nell'*habitat* naturale.

Nel genere *Rana*, per quanto riguarda la stasi spermatogenetica invernale, si osservano dei gradini di passaggio dalla spiccatissima incongruenza della *R. esculenta*, alla congruenza rigorosa della *R. temporaria*: la *R. graeca* e la *R. latastei* sono più vicine alla *R. esculenta*, mentre la *R. arvalis* e la *R. dalmatina* hanno un comportamento più simile a quello della *R. temporaria*.

Nel genere *Triturus* si osservano, per singole fasi del ciclo, dei termini di passaggio da una reattività molto sensibile alla variazione stagionale della temperatura: a una regolazione che, pur restando plasmata almeno grosso modo su quest'ultima, tende ad essere dovuta a fattori interni indipendenti da essa. Per esempio, il fenomeno della chiusura dell'attività spermatogenetica nel Tritone crestato è completamente dipendente dalla diminuzione della temperatura che si verifica verso la fine dell'estate e al principio dell'autunno, mentre nel Tritone alpestre sembra essersi ormai parzialmente fissato, e quindi essere in parte divenuto soggetto a fattori interni indipendenti dalla temperatura locale. Nelle ♀♀ del Tritone crestato, la vitellogenesi si inizia in concomitanza dell'abbassamento della temperatura estiva ma è in larga misura determinata da cause interne indipendenti da tale abbassamento, pur essendo per il resto ostacolata dalla temperatura di tipo estivo e favorita da una diminuzione di temperatura. In *Rana arvalis* (e anche in altre Rane rosse) la stasi spermatogenetica può essere talora rimossa in misura più o meno piccola o anche discreta, secondo gli individui, da una temperatura di tipo estivo. Tali casi, che potrebbero chiamarsi a regolazione mista, e che presentano anche una certa variabilità individuale (sulla quale potrebbe giuocare la selezione naturale), ci sembrano del maggior interesse, perchè ci fanno vedere come sia

possibile il passaggio da un tipo di ereditarietà a un altro: essi sarebbero infatti dei fenomeni colti, al momento attuale, in una fase che potrebbe in seguito procedere (o anche regredire).

Nel paragrafo precedente abbiamo visto che l'ovidutto di regola si riduce con la serra calda (in totale 30 casi su 38: 19 su 19 osservati in passato; 11 su 19 nell'esperienza presente), mentre in qualche caso presenta una modesta (tre casi) od anche notevole (5 casi) insensibilità alla temperatura di tipo estivo. Occorre ricordare in proposito che uno di noi [4] aveva notato un lievissimo accenno di sviluppo degli ovidutti solo in quattro ♀♀ sottratte alla diminuzione della temperatura estiva fin dal 20 di agosto 1942 e sacrificate due il 15 e due il 30 ottobre dello stesso anno (l'esp., la VII, fu condotta su 12 ♀♀, di cui due furono sacrificate il 30 settembre, due il 15 ottobre, due il 30 ottobre e sei il 30 novembre; eccettuate le quattro ♀♀ ricordate, le altre otto mantennero C. S. s. completamente ridotti, come nei controlli all'inizio dell'esp.), e che in ♀♀ con C. S. s. completamente regrediti per la permanenza in serra calda dal 1 novembre 1941 al 15 gennaio 1942 (esp. XI) aveva ottenuto, con la diminuzione artificiale della temperatura di tipo estivo per 32 giorni e con la successiva permanenza alla temperatura naturale dal 20 febbraio al 6 giugno 1942, lo sviluppo dei C. S. s. nel 66,66 % degli esemplari (28 esemplari su 42). Le due esperienze ora ricordate e quella, dai risultati così evidenti, attuale, permettono di concludere, riteniamo, che lo sviluppo degli ovidutti è determinato nella maggioranza delle ♀♀ della reattività verso l'andamento stagionale della temperatura, mentre nel 26,(6) % (esp. nostra e quelle corrispondenti fatte in precedenza da uno di noi: 8 esempi su 30) o nel 28,57 % (esp. nostra, quelle corrispondenti fatte in precedenza, ed esp. VII sopra ricordata: 12 esempi su 42) dei casi [5] presenta una regolazione mista. Il fatto in se stesso è notevole, in quanto che è la prima volta che in un Anfibio sarebbe messo in evidenza un determinismo differente da individuo a individuo per uno stesso carattere e che il tipo a regolazione mista verrebbe colto, diciamo così, ancora al momento della sua formazione.

Il singolo caso da noi ottenuto di un ♂, che dopo tre mesi di serra emetteva spermi neoformati dal testicolo ed aveva C. S. s. debolmente sviluppati, non si presta, isolato com'è, ad essere interpretato con una certa fondatezza. Ci limitiamo perciò a segnalare tale notevole variazione individuale, nell'attesa che la raccolta di altri dati possa permetterne in seguito una delucidazione.

(4) M. Galgano, « Arch. Zool. Ital. », *32* (1947), esp. VII, p. 70, e p. 122, nota 1; esp. XI, p. 82.

(5) Le percentuali sopra riferite hanno un valore puramente indicativo.

Biologia. — *Effetti della serra calda sull'ipofisi del Tritone crestato*(*). Nota di VALDO MAZZI, presentata(**) dal Socio N. BECCARI.

Le ricerche sperimentali di Galgano (1) hanno messa in evidenza la preponderante importanza della temperatura nella regolazione del ciclo sessuale annuale degli Anfibi.

Quest'Autore ha in particolare dimostrato che è possibile riattivare la gametogenesi nel Tritone crestato, indipendentemente dalla stagione dell'anno e dallo stadio di attività delle gonadi, sottoponendo gli animali a una temperatura di tipo estivo.

Poichè è verisimile che la temperatura influisca direttamente sul tasso di secrezione degli ormoni gonadostimolanti preipofisari (gonadostimoline A e B), è interessante indagare, ai fini delle ricerche sulle correlazioni pituito–sessuali, in qual misura il quadro citologico ipofisario reagisca a questo fattore.

A tale fine ho saggiato gli effetti della temperatura di tipo estivo su 19 ♀♀ e 14 ♂♂ mantenuti in serra calda, ad una temperatura media di 23°,5, dal 17 novembre 1947 al 17 febbraio 1948. Per controllo sono stati allevati, a temperatura naturale, 10 ♀♀ e 10 ♂♂. All'inizio dell'esperienza i C. S. s. interni ed esterni apparivano piuttosto ben sviluppati in ambo i sessi; i testicoli erano in stasi, le ovaie presentavano i tipici caratteri stagionali (ovogenesi in secondo periodo di attività).

Al termine dell'esperienza le ipofisi degli animali sperimentati e dei controlli sono state fissate in Stieve, incluse in paraffina e celloidina, sezionate a 5 μ e colorate con il II metodo di Galgano. Testicoli ed ovaie sono state fissate in Stieve, incluse in paraffina e celloidina, sezionate a 12 μ e colorate con l'emallume e la fucsina acida (2).

OSSERVAZIONI.

Femmine.

C. S. s. ED OVAIE. – In base all'esame dei C. S. s. interni ed esterni le femmine sono state suddivise in tre gruppi.

I Gruppo. 11 ♀♀. C. S. s. esterni del tutto regrediti; ovidutti completamente ridotti. Riattivata la prima parte dell'ovogenesi ed il passaggio dalla prima alla seconda fase; prosegue moderatamente la vitellogenesi (terza fase); scarsi ovociti vitellati residuali in buono stato di conservazione; abbondanti gli stadi di riassorbimento (precoci ed avanzatissimi).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata dell'Università di Firenze.

(**) Nella seduta del 9 aprile 1949.

(1) « Arch. Ital. Anat. Embr. », *35* (1935); « Arch. Ital. Anat. Embr. », *35* (1936); « Boll. Zool. », *14* (1942); « Arch. Ital. Anat. Embriol. », *50* (1944); « Arch. Zool. Ital. », *32* (1947).

(2) I risultati più salienti conseguiti in questa esperienza sono illustrati e discussi, in collaborazione con il prof. Mario Galgano, in questo stesso fascicolo dei « Rendiconti ».

II Gruppo. 3 ♀♀. – C. S. s. esterni alquanto sviluppati in due individui, di incerta valutazione nel rimanente; ovidutti quasi completamente ridotti. Ovaie come sopra.

III gruppo. 5 ♀♀. – C. S. s. esterni alquanto sviluppati in tre ♀♀; in due di incerta valutazione; ovidutti assai o alquanto sviluppati; ovaie come sopra; però, numerosi i vecchi ovociti vitellati in buono stato di conservazione; altri, in vari stadi di riassorbimento.

Controlli. 10 ♀♀. – C. S. s. esterni alquanto sviluppati; ovidutti quasi a completo sviluppo. Ovaie piuttosto grandi; secondo periodo del ciclo ovogenetico; mancano uova negli ovidutti.

Ipofisi. – In tutti gli animali sperimentati le ipofisi sono di volume leggermente ridotto rispetto a quello della media dei controlli. La vascolarizzazione, eccettuato negli animali del III gruppo, è quasi di tipo estivo, rappresentata cioè da capillari numerosi, dilatati, ad andamento sinuoso [3].

Lobo nervoso. – In tutti i gruppi, è moderatamente infiltrato di minute gocce di colloide basofilo; abbonda il colloide orangiofilo. Queste caratteristiche sono proprie di ipofisi di animali estivi; nei controlli il lobo nervoso appare assai più intensamente basofilo.

Lobo intermedio. – Analogamente a quanto si constata negli animali estivi, il lobo intermedio è costituito, nei tre gruppi, da cellule a scarso citoplasma per lo più affatto cromofobo. Nei controlli le sue cellule appaiono invece dotate di voluminoso citoplasma, per lo più intensamente basofilo.

Lobo anteriore. – Analizzerò separatamente il comportamento dei quattro tipi cellulari in esso riconoscibili (Mazzi, 1949 [4]).

Cellule acidofile del I tipo. Negli animali del I gruppo le cellule di questo tipo volgono alla forma estiva. Gran parte delle cellule che occupano l'area dorsale della II zona sono completamente degranulate; gli elementi con citoplasma turgido, abbondante e riccamente carico di granuli brillanti, sono limitati a poche rosette pericapillari. La maggior parte delle cellule presenta citoplasma ridotto, contratto, più o meno fittamente ripieno di minuti granuli poco brillanti. Sono spesso disposte in ammassi irregolari.

Negli animali del II gruppo appaiono leggermente più numerose le forme con granulazioni brillanti. In quelli del III gruppo, invece, sono nettamente preponderanti le cellule con citoplasma turgido, area dell'apparato di Golgi spesso rilevabile, granuli brillanti e quantitativamente variabili a seconda del grado di attività cellulare. Gli elementi perivasali sono in genere i più fittamente granulati. Questi caratteri si avvicinano molto a quelli propri delle acidofile del I tipo degli animali di controllo.

Cellule acidofile del II tipo. – Sono caratterizzate, come nelle forme estive, dal numero elevato, dalla grandezza e dalla richezza dei granuli che

(3) I risultati dell'esperienza sono stati confrontati, oltre che con i controlli, con i dati sul ciclo istologico annuo normale, che verrà particolareggiatamente descritto nella seconda parte del lavoro: *L'ipofisi del Tritone crestato.*

(4) « Arch. Ital. Anat. Embriol. », *54* (1949).

conferiscono loro una spiccatissima colorabilità. Nel gruppo I sono numerose le cellule con citoplasma colloide. Le aree di cellule in degranulazione sono assai più limitate che nei controlli.

Cellule basofile del tipo β. – Come durante i mesi estivi, sono, per il loro caratteristico color malva, nettamente distinguibili dalle cellule basofile del tipo δ. Molto attivi i processi di degranulazione. Nei controlli esse appaiono molto granulate e si colorano in modo simile alle δ.

Cellule basofile del tipo δ. – Negli esemplari del I gruppo predominano δ globulari pallide a globuli pallidi, a cui si aggiungono, nella regione craniale, δ globulari medie a globuli pallidi. Nel II gruppo il quadro è molto eterogeneo, mentre nel III si osserva che nella metà craniale della ghiandola sono presenti δ globulari medio–intense a globuli medio–pallidi, in quella caudale δ globulari medio–pallide a globuli medio–pallidi. Si rileva così che, per quel che concerne le δ, il I gruppo si avvicina agli animali estivi, il III invece solo in parte ai controlli, nei quali si osservano cellule precianofile e aglobulari, che difettano invece negli animali di serra.

Maschi.

C. S. s. e testicoli. – Su 13 dei 14 ♂♂ sperimentati s'è notata una completa regressione dei C. S. s. riassorbimento della vecchia porzione a spermi, spermatogenesi pienamente riattivata in 5 esemplari, un po' o alquanto subnormale in 7, nettamente subnormale in uno; fagocitosi delle ampolle a spermi più caudali, con conseguente formazione di tessuto giallo fagocitario; duttuli escretori stretti e vuoti.

In un ♂ s'è constatato un leggero sviluppo dei C. S. s. interni ed esterni; è in atto una discreta evaquazione di spermi neoformati; i duttuli e i canali escreatori sono piuttosto dilatati e contengono spermi; spermatogenesi piena e normale. (Per maggiori particolari rimando al lavoro citato alla nota 2).

Nei testicoli dei controlli, in cui i C. S. s. esterni ed interni erano piuttosto ben sviluppati, sono presenti soltanto proto e spermatogoni e spermi maturi; tessuto giallo propriamente detto piuttosto abbondante.

Ipofisi. – Le ipofisi degli animali di serra appaiono in genere di mole mediocre e leggermente inferiore a quella della media dei controlli. La vascolarizzazione è, sempre però, di tipo estivo, sotto forma cioè di capillari sinusoidali, dilatati e numerosi.

Lobo nervoso. – Vale quanto detto per le ♀♀.

Lobo intermedio. – Vale quanto detto per le ♀♀.

Lobo anteriore. Cellule acidofile del I tipo. Sono preponderanti, specialmente nel ♂ con testicoli anormali, le cellule con caratteri estivi (cfr. le ♀♀), pur non difettandone altre che più si avvicinano a quelle proprie dei controlli.

Cellule acidofile del II tipo. Hanno caratteri simili a quelli descritti nelle ♀♀. La percentuale di cellule in degranulazione è di gran lunga inferiore a a quella dei controlli.

Cellule basofile del tipo β. – Vale quanto detto per le ♀♀.

Cellule basofile del tipo δ. – Non sono in genere molto numerose. Nella metà craniale predominano δ globulari medio-intense a globuli medio-intensi, in quella caudale δ globulari pallide a globuli medi e forme degranulate. Nei controlli si notano: nella metà craniale δ globulari medio-intese a globuli medi, in quella caudale precianofile e δ aglobulari pallide e medie.

Da quanto sopra esposto appare chiaro come una permanenza di tre mesi in serra calda dal 17 novembre 1947 al 17 febbraio 1948 induca nell'ipofisi dei ♂♂ e delle ♀♀ la comparsa di un quadro citologico di tipo estivo. È di interesse rilevare come in quel gruppo di ♀♀ in cui gli ovidutti erano ben sviluppati al termine dell'esperienza il quadro citologico delle cellule acidofile del I tipo e in parte delle cellule basofile del tipo δ differiva da quello degli altri due gruppi, avvicinandosi di più a quello dei controlli.

Non può sfuggire il valore di questi reperti ai fini delle ricerche sulle correlazioni pituito-sessuali. Essi saranno ripresi e discussi nel lavoro definitivo, in corso di elaborazione. Mi limito semplicemente a sottolineare ora il notevole interesse che rivestono i reperti istologici nell'ipofisi delle ♀♀ del III gruppo. In essi infatti si può verosimilmente riconoscere il fattore endocrino di quei fenomeni (permanere dello sviluppo, ancora dopo tre mesi di serra calda, dei C. S. s. esterni ed interni), il cui valore, da un punto di vista ecologico e genetico, è stato teoricamente discusso in altra sede (Mazzi e Galgano [2]).

Biologia. — *Osservazioni sull'acido ribonucleico dell'oocite in crescita di* « *Pholcus phalangioides* » *Füssly* [*]. Nota di Enrico Urbani, presentata [**] dal Socio G. Cotronei.

In una precedente Nota [1] ho esposto i risultati delle ricerche sulla localizzazione dell'acido ribonucleico nell'oocite di *Antedon rosacea*.

Ho potuto vedere che un costituente della fascia vitellogena è un acido nucleico Feulgen negativo presentante un forte assorbimento nell'ultravioletto e che viene attaccato dalla ribonucleasi, fermento che idrolizza specificamente l'acido ribonucleico. Poichè alla fascia vitellogena è stata attribuita importanza per la formazione del deutoplasma e poichè le ricerche di Caspersson, Brachet e altri mostrano che il probabile ruolo o almeno una delle funzioni degli acidi nucleici sarebbe quella di intervenire nella sintesi delle proteine si vede come questa osservazione apporti un contributo alle ricerche morfologiche ed istochimiche di Cotronei [2].

Pur continuando le ricerche sulla fascia vitellogena di *Antedon* allo scopo di analizzare i costituenti e la struttura di questa singolare formazione cellulare

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata « G. B. Grassi » della Università di Roma.

(**) Nella seduta del 9 aprile 1949.

(1) E. Urbani, « Rend. Acc. Naz. Lincei », *6*, 131 (1949).

(2) G. Cotronei, « Arch. Zool. », *5*, 41 (1911).

ho voluto estendere lo studio a quegli organelli citoplasmatici reperibili negli oociti in crescita di alcune specie animali e genericamente chiamati *nuclei e corpi vitellini* (cfr. Wilson [3]).

È da tener presente che sotto questa denominazione vanno delle formazioni di aspetto diverso e probabilmente di diversa natura: alcune di queste formazioni hanno la caratteristica, secondo il parere degli studiosi che si sono occupati dell'argomento, di intervenire o partecipare, con un meccanismo che biochimicamente rimane sconosciuto, alla formazione del vitello. Il nucleo vitellino di *Pholcus phalangioides* presenta strette analogie con la fascia vitellogena di *Antedon* ed è appunto perchè colpito da queste analogie che ho rivolto lo studio a questo materiale; in questa Nota esporrò brevemente le osservazioni compiute sull'acido ribonucleico dell'oocite in crescita di questa specie animale.

Il primo che ha studiato il nucleo vitellino del *Pholcus* è stato Jatta [4] seguìto da Van Bambeke [5] che ha dedicato a questa formazione una estesa pubblicazione. Le osservazioni di Van Bambeke possono essere nelle loro linee generali così riassunte. L'accrescimento dell'oocite di *Pholcus* è caratterizzato dai seguenti stadi. In un primo tempo delle granulazioni safraninofile citoplasmatiche si aggregano e costituiscono una formazione aderente alla vescicola germinativa che viene abbracciata in modo più o meno esteso: è questa il nucleo vitellino. In un secondo tempo il nucleo vitellino si allontana dalla vescicola germinativa e poichè ha una forma a cupola o cuffia, a seconda di come è condotta la sezione dell'oocite, il suo aspetto varia, da anello completo circolare od ovale ad anello incompleto, il suo spessore è variabile ed i suoi limiti sono in qualche punto netti e in altre zone indecisi. Un terzo stadio è caratterizzato dalla frammentazione del nucleo vitellino che si adagia sulla membrana cellulare assumendo la forma di questa; alla frammentazione segue la formazione del vitello. L'Autore riporta per illustrare questi processi un gran numero di disegni che mostrano gli svariati aspetti del nucleo vitellino nella sua genesi, ma tutti questi aspetti non sono altro che particolarità, in quanto il processo nelle sue linee generali è caratterizzato dagli stadi descritti. Quanto alla funzione del nucleo vitellino, l'A. pensa che il nucleo vitellino deve essere considerato « come centre de formation des elements nutritifs du vitellus » (loc. cit., p. 586).

Molto più recentemente Jacquiert [6] ha compiuto uno studio dei nuclei vitellini degli Aracnidi e tra le altre specie ha esaminato anche il *Pholcus phalangioides*. Egli ha sopratutto applicato agli oociti in crescita le tecniche per il condrioma e per il reticolo di Golgi ed ha visto che il nucleo vitellino è sprovvisto di condrioma, mentre i condrioconti sono abbondanti nella zona citoplasmatica inglobata alla periferia del corpo vitellino: secondo Jacquiert l'evoluzione del nucleo vitellino, come formazione morfologica, avviene nel modo descritto da Van Bambeke.

(3) E. B. WILSON, *The cell in development and heredity*. Macmillan, p. 339 (1925).
(4) G. JATTA, « Atti Acc. Sc. Napoli », vol. 9, app. 2 (1882).
(5) CH. VAN. BAMBEKE, « Arch. Biol. », *15*, 512 (1898).
(6) C. JACQUIERT, *Recherches sur l'oogenese des Araignées et les corps vitellins de Balbiani*. Ed. Le Francois, Paris 1936.

Per la identificazione dell'acido ribonucleico mi sono servito della tecnica di Brachet e della fotografia nell'ultravioletto seguendo le stesse norme da me indicate nella precedente Nota.

Gli ovari di *Pholcus* isolati al microscopio binoculare sono stati fissati in Bouin, Zenker ed Helly: i fissativi che mi hanno dato i migliori risultati sono stati, per l'acido ribonucleico, gli ultimi due. Ho compiuto anche delle osservazioni al microscopio a contrasto di fase della Casa Galileo, che mi hanno fornito utili dati per la verifica di alcune questioni.

Le sezioni di ovario (7–10 *micron*) colorate con ematossilina ferrica mostrano gli oociti nei vari stadi di accrescimento; è possibile così seguire la formazione del nucleo vitellino e la sua evoluzione. Se le sezioni vengono colorate con pironina–verde di metile, oppure con bleu di toluidina, si vede che i piccoli oociti presentano un forte basofilia dell'ooplasma, basofilia che diminuisce con l'accrescimento dell'oocite fino a che nei grandi oociti la colorazione è ridottissima o assente.

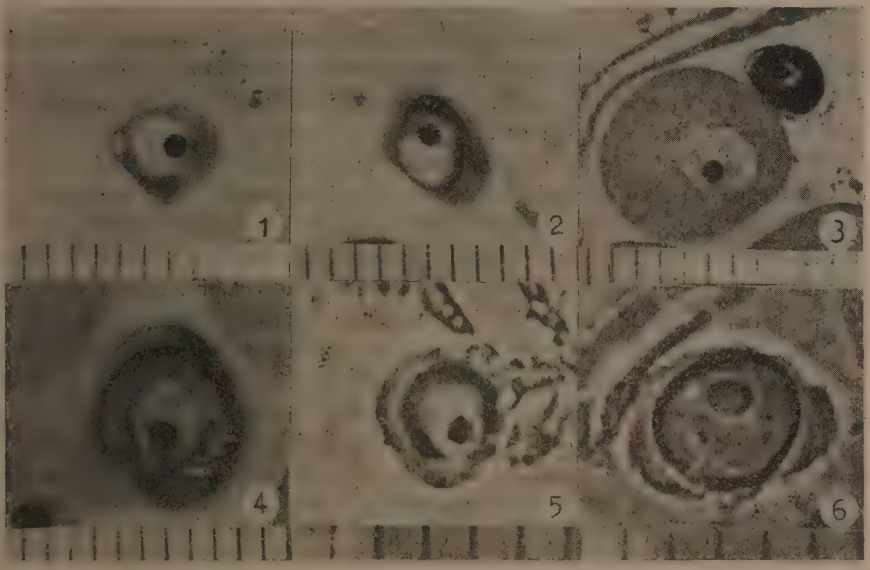
Il nucleolo presenta una basofilia molto forte che non decresce di pari passo con quella dell'ooplasma (7). Lo studio della genesi del nucleo vitellino sulle sezioni colorate con pironina–verde di metile mostra nei piccoli oociti delle zolle o granulazioni più violentemente colorate in rosso del restante ooplasma, il nucleo vitellino alla sua formazione e nel suo sviluppo spicca sull'ooplasma per una più forte colorazione in rosso che in alcuni preparati può dirsi elettiva. Con la disgregazione del nucleo vitellino diminuisce la sua basofilia e diminuisce fortemente di pari passo la basofilia generale dell'ooplasma.

L'esame nell' U. V. su lunghezza d'onda di circa 2700 Å. mostra un fortissimo assorbimento generale dell'ooplasma nei piccoli oociti che gradatamente diminuisce per divenire nettamente minore nei grandi oociti. Il nucleolo presenta sempre un forte assorbimento. Come per gli oociti di *Antedon* così per quelli di *Pholcus* alla basofilia corrisponde assorbimento nell' U. V. Il trattamento delle sezioni con ribonucleasi porta ad un totale perdita della basofilia del nucleolo, dell'ooplasma e del nucleo vitellino. L'assorbimento nell' U. V. e la negatività alla reazione di Feulgen delle zone assorbenti, la scomparsa della basofilia dopo azione della ribonucleasi dimostrano la presenza nell'ooplasma, nel nucleo vitellino e nel nucleolo di *Pholcus phalangioides* di acido ribonucleico. Se come è stato fatto per l'*Antedon* si colorano con ematossilina ferrica delle sezioni sulle quali ha agito la ribonucleasi (e che hanno perso ogni colorabilità con la pironina) si vede che il nucleo vitellino torna a colorarsi al pari del nucleolo.

Alla stessa maniera se oociti che hanno subito l'azione della ribonucleasi e che posti in verde di metile pironina mostrano di aver completamente perduta la loro basofilia, vengono osservati al microscopio a contrasto di fase mostrano chiaramente visibili il nucleo vitellino ed il nucleolo. Queste osservazioni non lasciano nessun dubbio che l'acido ribonucleico è un costituente del nucleo vitellino ma che oltre questo acido esiste uno stroma che non è attaccato dalla ribonucleasi, colorabile con ematossilina ferrica e identificabile alla osservazione microscopica in contrasto di fase: a tale stroma è legato l'acido ribonucleico.

(7) Cfr. J. Brachet, *Embryologie Chimique*. Masson, p. 222 (1944).

Jacquiert basandosi sulle sue osservazioni attribuisce al corpo vitellino di *Pholcus* una natura proteica, è superflo avvertire che per l'epoca delle ricerche di questo autore nessuno studio potè esser fatto sull'acido ribonucleico. Le mie osservazioni mostrano che un costituente del nucleo vitellino del *Pholcus* è un nucleoprotide; rimane da vedere come è stato detto a proposito della fascia vitellogena di *Antedon* quali siano gli altri costituenti di queste formazioni cellulari. Il fatto che tanto in *Antedon* che nel *Pholcus* l'acido ribonucleico della fascia vitellogena e del nucleo



Figg. 1 e 2: oociti di *Pholcus phalangioides* colorati con verde di metile pironina: sono colorati intensamente in rosso il nucleolo ed il nucleo vitellino.
Fig. 3 : oociti di *Pholcus phalangioides* colorati con verde di metile pironina: si noti la diversa basofilia ooplasmatica in rapporto alla mole degli oociti e la forte basofilia del nucleolo.
Fig. 4 : oocite di *Pholcus phalangioides* trattato con ribonucleasi e colorato con ematossilina ferrica: evidenti il nucleo vitellino ed il nucleolo colorati in nero.
Figg. 5 e 6: oociti di *Pholcus phalangioides* trattati con ribonucleasi ed osservati al microscopio a contrasto di fase: evidenti i nuclei vitellini (anulare quello della fig. 6) che hanno perso ogni affinità per la pironina.
Ogni segmento della scala riportata sotto i fotogrammi ha il valore di 10 *micron*. Per il fotogramma 2 ogni segmento della scala ha il valore di 9 micron.

vitellino si trova associato ad altri costituenti, trova riscontro nelle osservazioni di Brachet e Jeener [8] che hanno isolato per ultracentrifugazione da vari organi di Vertebrati e Invertebrati dei granuli nei quali si trova costantemente dell'acido ribonucleico insieme ad altre sostanze come proteine solforate, lipidi ecc.

Come risulta dal confronto tra lo studio di Van Bambeke e quello di Cotronei esistono molte somiglianze tra nucleo vitellino di *Pholcus* e fascia vitellogena di

(8) J. BRACHET, *Embryologie Chimique*. Masson, p. 241 (1944).

Antedon ed io ritengo, da quanto ho osservato, che la spiegazione data da Cotronei circa l'origine e lo sviluppo della fascia vitellogena di *Antedon* sia valida anche per il nucleo vitellino di *Pholcus*. In ambedue i casi nei giovani oociti si sintetizza una grande quantità di sostanza basofila (più precisamente secondo le mie ricerche di acido ribonucleico) e di altre sostanze ooplasmatiche: tali sostanze si trovano in eccesso rispetto alla massa dell'oocita e subiscono come una precipitazione dando luogo a una formazione figurata, con l'accrescimento dell'oocita le sostanze concentratesi tornano a diffondere in conseguenza dell'aumento di volume della cellula.

Queste ricerche che hanno permesso di identificare la presenza di acido ribonucleico in alcune formazioni aventi certamente influenza nel metabolismo cellulare hanno lo scopo di apportare un contributo al problema dei rapporti tra acidi nucleici e fisiologia cellulare.

Cotronei (loc. cit.) ha osservato che tra fascia vitellogena di *Antedon* ed ergastoplasma esistono innegabili analogie; venti anni più tardi Voïnov [9] ha espresso il parere che il corpo di Balbiani o nucleo vitellino degli Aracnidi è una formazione *ergastoblastica*. È noto che secondo alcuni autori l'acido ribonucleico ha nelle cellule ghiandolari una localizzazione ergastoplasmatica. Poichè esistono, però, tra fascia vitellogena di *Antedon* e nuclei vitellini del tipo *Tegenaria* forti differenze morfologiche, ed anche tra questi ed il nucleo vitellino di *Pholcus* che come si è visto è molto simile alla formazione dell'*Antedon*, il presente studio è attualmente esteso agli oociti di *Tegenaria*. Scopo dello studio è di mettere in risalto le eventuali analogie e differenze dei vari nuclei vitellini tra loro ed in rapporto alle formazioni ergastoplasmatiche reperibili nelle cellule ghiandolari.

Questa ricerca anche essa in atto può condurre ad una utile revisione del capitolo attinente a queste formazioni cellulari.

Biologia. — *Alcuni problemi delle parabiosi studiati negli anfibi* [*]. Nota I di Lea Urbani–Mistruzzi, presentata [**] dal Socio G. Cotronei.

In questa Nota espongo alcuni risultati ottenuti con il metodo delle parabiosi in ricerche eseguite per indagare alcuni problemi della costituzione individuale negli Anfibi.

Sono già alcuni anni (dal 1944) che lavoro in questo campo e ho pubblicato in una breve Nota (1945) [1] i risultati preliminari di parabiosi fra embrioni trattati con raggi X ed embrioni normali. È interessante notare, per le modalità con le quali si esplica il fenomeno, che in queste coppie si ha una netta prevalenza dell'embrione normale sull'irradiato che viene trasportato passivamente e in alcuni

(9) D. Voinov, «C.R.S.B.», *108*, 341 (1931).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata «G. B. Grassi» dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta del 9 aprile 1949.

(1) L. Mistruzzi, «Acta», dell'Acc. Pontificia, VIII, 1945.

casi inglobato e riassorbito quasi completamente. Ritornerò in seguito più estesamente su questi risultati.

Successivamente (1946-1948) Cotronei ed io [2] abbiamo esposto un altro aspetto di questi studi con esperienze di parabiosi fra differenti ordini di Anfibi (embrioni di Anuri con embrioni di Urodeli) allo scopo di controllare con questo procedimento tecnico i problemi della costituzione zoologica già indagati con il metodo dei trapianti in una lunga serie di ricerche da Cotronei e la sua scuola.

In un'altra Nota inoltre (1948) [3] ho esposto alcuni casi di regolazione morfologica del vestibolo boccale di embrioni di *Rana esculenta* uniti in parabiosi asportando la metà anteriore del seno boccale allo stadio di bottone codale.

Ho accennato ai vari argomenti che ho trattato con il metodo delle parabiosi perchè i risultati ottenuti concorrono tutti a illustrare certi aspetti del tema che è oggetto della presente Nota.

È opportuno richiamare, a questo punto, alcuni dati della letteratura che serviranno a stabilire i termini per un confronto fra i risultati presentati dai Mammiferi e quelli ottenuti sugli Anfibi. Premetto che, data l'estensione della Nota, la citazione bibliografica è limitata ai lavori più significativi nei riguardi del mio lavoro.

Nei Mammiferi il problema della costituzione individuale è stato trattato ampiamente da vari Autori sia con metodi biochimici (emolisine, precipitine, deviazione del complemento, agglutinine, ecc.) che con il metodo degli incroci. Inoltre l'applicazione del metodo dei trapianti (di pelle, trasfusione sanguigna, ecc.) e della parabiosi ha portato notevoli contributi allo studio di questo problema. Con quest'ultimo metodo si sono ottenuti risultati molto interessanti che penso sia il caso di riferire.

Ricordo che nei Mammiferi la parabiosi è stata eseguita, per ovvie ragioni, quasi esclusivamente su animali giovani o adulti, tagliando ad essi la pelle e ricucendo, accostandoli, i lembi delle ferite dei due animali che così risultano uniti. In tal modo si stabilisce una continuità fra i capillari sanguigni e una comunicazione delle cavità celomatiche quando il taglio interessa pure queste. Quando si vuole si può tagliare la comunicazione cutanea fra i due e ciascuno può riacquistare la propria indipendenza. In alcuni casi queste parabiosi possono andare avanti per parecchio tempo: fra i due animali si stabilisce una unità fisiologica che viene dimostrata dal normale svolgersi di tutte le funzioni dell'organismo, procreazione compresa. Questo tipo di parabiosi è stato chiamata « omogenea » da Mayeda e « armonica » da Schmidt e Morpurgo.

In altri casi, dopo un periodo di vita « armonica » più o meno breve sorge un antagonismo che si manifesta con il deperimentó di uno dei due individui che finisce per vivere a spese dell'altro e condurre vita parassitaria; all'esame istoogico si osserva che contemporaneamente si scatenano fenomeni di difesa sierotossica e cellulare specialmente intensi nella zona di unione. Queste reazioni sono espressione della lotta che l'organismo compie (Morpurgo) [4] per difendere la

(2) G. COTRONEI e L. URBANI MISTRUZZI, « Rend. Accad. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. I, p. 869 (1946); vol. IV, p. 173 (1948).

(3) L. URBANI-MISTRUZZI, « Rend. Accad. Naz. Lincei », vol. IV, fasc. 4 (1948).

(4) B. MORPURGO, « Atti S. I. P. S. », vol. XVI, p. 82 (1927); « Scientia », *40* (1926).

propria purezza biochimica. Si è parlato in questi casi di avvelenamento da parabiosi; in genere nelle parabiosi « disarmoniche » l'unità fisiologica è molto limitata e i due parabionti possono svolgere indipendentemente le loro funzioni. Il deperimento porta all'atrofia di alcuni organi (in particolare quelli emopoietici) e l'animale muore se non si separa in tempo e causa anche la morte dell'altro.

Si è pensato che la causa di tale comportamento fosse da attribuirsi al fatto che uno dei componenti la coppia, assorba attraverso il sangue una maggiore quantità di alimenti e che quindi aumenti di peso a danno dell'individuo che assorbe una quantità di sostanze alimentari inferiori al suo bisogno. Morpurgo ha studiato perciò accuratamente il metabolismo e l'alimentazione dei ratti in parabiosi, i suoi risultati furono però messi in discussione da altri Autori.

Schmidt (5) ha ottenuto parabiosi armoniche, che si sviluppavano regolarmente con animali provenienti dalla stessa covata, alimentati nella stessa misura, aventi le stesse dimensioni e lo stesso peso; egli attribuisce le parabiosi disarmoniche a condizioni di inferiorità in cui si trova inizialmente un animale e che si aggravano nelle condizioni sperimentali. Morpurgo pensa che nelle parabiosi armoniche si siano uniti animali della stessa costituzione biochimica, in quella disarmonica animali a costituzione biochimica diversa. Molti Autori hanno inoltre studiato i vari fattori (quadro sanguigno, reazione anafilattica) che potrebbero intervenire nel determinare un tipo o l'altro di parabiosi. Tuttavia non si può dire nulla di definitivo.

Confrontiamo ora questi risultati con quelli ottenuti finora sugli Anfibi in parabiosi. Il primo che ha eseguito esperienze di parabiosi negli Anfibi è stato il Born (1894–97) (6) il quale fra l'altro ha sempre osservato fusione degli stessi organi quando, con l'operazione, essi venivano a trovarsi in contatto o in vicinanza. Questo reperto è stato confermato dai risultati di moltissimi Autori nel materiale più vario, in diverse condizioni sperimentali per cui la fusione degli organi simili può considerarsi una legge a carattere generale. Questa attrazione fra gli stessi organi (corda esclusa) non si manifesta solamente fra organi di animali della stessa specie ma anche fra organi di individui di specie e ordini differenti (Anuri e Urodeli sia nei trapianti che nelle parabiosi, Cotronei e allievi). Il Born ha unito anche in parabiosi embrioni di differenti specie (*Bombinator* con *Rana*) ed ha ottenuto una convivenza di tali coppie per qualche settimana.

Gli embrioni della stessa specie di Anfibi in parabiosi presentano una perfetta unità fisiologica e morfologica per la fusione degli organi di molti sistemi. La fusione per esempio dell'apparato digerente che si riscontra nella quasi totalità delle parabiosi eseguite in parallelo, fà si che un animale può assumere gli alimenti a l'altro eliminare le feci. Sperimentalmente è stata dimostrata la funzione vicariante degli organi di un animale quando siano stati asportati quelli dell'altro; per esempio Yamada (7) (1933) ha asportato tre reni a coppie in parabiosi e ha osser-

(5) G. Schmidt, « Hand. Biol. Arbeitsmethod. abt. », V, N. 2 (1922).

(6) G. Born, « Arch. f. Entw. Mech. », 4 Bd., p. 349, 517 (1897).

(7) H. Yamada, « Folia Anat. Jap. », *11*, 161–164; *11*, 149–160; *11*, 191–210: *11*, 135–182; *11*, 165–174 (1933). Per la bibliografia, ove non è meglio specificato vedere sul E. Korschelt, *Regeneration und Transplantation* », Borntraeger, vol. II, 1ª parte, cap. 12 (1931).

vato che l'unico rene rimasto sopperisce abbastanza bene alla funzione di quelli mancanti e presenta i suoi canalicoli molto dilatati; risultati simili ottennero Shimosaki e Hiller (1933) operando su *Amblystoma*. Yamada inoltre ha dimostrato una funzione vicariante e di compenso anche in larve private di fegato: il fegato dell'altro parabionte presenta segni di ipertrofia e funziona per tutti e due. Sempre sugli Anfibi questo Autore ha dimostrato che una coppia può vivere con un solo cuore, che naturalmente assume dimensioni maggiori del normale, che tende a portarsi al centro, fra i due animali. Interessanti sono inoltre le ricerche sull'attrazione dei vasi sanguigni operata dal cuore. Esperienze di questo genere sono state eseguite anche sui Mammiferi, ma la difficoltà del materiale e le diverse tecniche adoperate non hanno permesso di ottenere risultati così dimostrativi come negli Anfibi. Comunque vanno ricordate le esperienze molto interessanti, sempre sulla funzione vicariante degli organi rimasti, di Sauerbruch e Heide (1908–1909), Hermannsdorfer (1923), Morpurgo (1923).

Mentre nei Mammiferi spesso con l'asportazione degli organi in un parabionte si viene a manifestare l'incompatibilità con il predominio di un animale sull'altro, negli Anfibi, nelle condizioni suddette i due animali hanno lo stesso sviluppo; questo fu osservato da Mayeda anche nel caso in cui una larva privata dello stomaco presentava l'intestino atrofico per cui si nutriva esclusivamente a spese dell'intestino della larva non operata.

Born (1897) ha osservato talvolta, anche nelle parabiosi omospecifiche, una prevalenza di un embrione sull'altro, mentre altri autori, lavorando su parabiosi eterospecifiche con animali a diverso ritmo di accrescimento, non hanno osservato una dominanza di uno a danno dell'altro tanto che le coppie hanno raggiunto la metamorfosi (Burns 1929 [8] in due specie di Axolotl) e l'hanno superata (Witschi 1927 e sgg. [9] su *Rana temporaria* e *Rana silvatica*) fatto questo che sta a dimostrare che le larve non hanno sofferto della forzata convivenza.

Fra le ultime esperienze citate alcune sono state condotte per studiare il differenziamento sessuale e l'influenza di un sesso sull'altro, argomento quest'ultimo che è stato molto sviluppato nei Mammiferi (Fels 1929, Goto 1922, Kallas 1929, Martins 1929, Morpurgo 1908–1909, ecc., Yatsu 1921, Zacherl 1928 e molti altri) e negli Anfibi (Burns 1925–1930–1931 e sgg. Humphrey 1928, Montalenti e Calisti [10] 1936, Witschi 1927, 1931, 1932 [9] ecc.

Altre parabiosi negli Anfibi sono state condotte con diversi intenti e qui voglio ricordare quelle eseguite fra forme lontane (Cotronei e Mistruzzi) allo scopo di osservare il comportamento degli animali in queste condizioni e poter fare dei confronti con i risultati ottenuti nei trapianti xenoplastici di organi per stabilire la costituzione zoologica degli Anfibi in base alla loro costituzione biochimica.

(8) R. K. BURNS, « Journ. Exp. Zool. », vol. 42, pp. 31-89 (1925); vol. 55, p. 123-169 (1930); vol. 60, pp. 339-386 (1931); « Journ. Exp. Zool. », vol. 53 p. 455 (1929); « Proc. Soc. exp. Biol. e Med. », *32*, pp. 1512–1513 (1935).

(9) E. WITSCHI, « Biol. Bull. », *52*, p. 137 (1927); « Journ. Exp. Zool. », *58*, p. 113 (1931); Baltimora, *160* (1932).

(10) G. MONTALENTI e CALISTI, « Arch. Zool. Ital. », *23*, p. 397–408 (1936).

Le parabiosi alle quali accennerò non hanno mai raggiunto la metamorfosi perchè fenomeni di incompatibilità si sono più o meno presto manifestati nel corso della vita embrionale o larvale e hanno portato alla distruzione della coppia, con meccanismi non ancora ben precisati. Reverberi 1939[11] ha unito in parabiosi embrioni di *Rana esculenta* con embrioni di *Triton cristatus* ed embrioni di *Bufo vulgaris* con *Rana esculenta*; in questa ultima combinazione dopo il sesto giorno l'Autore ha notato che la *Rana* arresta il suo sviluppo e viene quasi completamente riassorbita dal *Bufo*. Cotronei e Mistruzzi (1946–48), come ho già accennato, hanno eseguito parabiosi fra ordini differenti: *Rana esculenta* con *Triton Taeniatus* e *Hyla arborea* egualmente con *Triton taeniatus*; nel primo caso prima il Tritone e poi la Rana morivano quando ancora non era terminata la riserva vitellina, nel secondo si otteneva una durata vitale di parabiosi più notevole.

Dopo avere riassunto molto brevemente e incompletamente, in riferimento ai soli punti che più mi riguardano, i dati della letteratura, passo a esporre le mie ricerche personali. Siccome nelle moltissime esperienze di parabiosi che ho eseguito sia fra Anuri che fra Urodeli della stessa specie non ho mai riscontrato una predominanza di un animale sull'altro (nemmeno quando ho unito i due embrioni per la estremità cefalica ottenendo regolazione morfologica del vestibolo boccale) ho voluto vedere se, deprimendo sperimentalmente uno dei due, si venivano a manifestare i fenomeni già riscontrati nei Mammiferi. Premetto che per avere con sicurezza sviluppo armonico dei due parabionti è bene tener presente non solo lo stadio (che d'altronde ha poca importanza, perchè gli embrioni anche se inizialmente si trovano a stadi diversi tendono poi a mettersi sullo stesso ritmo di accrescimento), ma anche le condizioni generali degli embrioni, la estensione delle ferite, che deve riguardare gli stessi tessuti (possibilmente la sola pelle) e l'orientamento reciproco degli animali; ho avuto i migliori risultati unendo gli embrioni in parallelo asportando un lembo di ectoderma dai lati, in modo che essi si venissero a trovare nelle stesse condizioni per il nuoto ed in seguito per l'assunzione degli alimenti.

Per deprimere uno dei due embrioni ho adoperato i raggi X, che come è noto hanno un'azione inibente lo sviluppo che si manifesta oltre che con alterazioni morfologiche molto notevoli anche con un abbassamento del metabolismo respiratorio (Urbani e Mistruzzi 1946)[12]. Embrioni trattati con dosi letali di raggi X, uniti in parabiosi con embrioni normali, vengono sopraffatti da questi ultimi che crescono anche a spese dell'irradiato che riassorbono nei casi estremi quasi completamente. Le modalità con le quali si manifesta questo processo saranno oggetto di una Nota successiva nella quale riporterò la documentazione fotografica delle parabiosi e dei preparati istologici.

(11) G. Reverberi, « Arch. Zool. Ital. », vol. 26, p. 249 (1939).

(12) E. Urbani e L. Urbani-Mistruzzi, « Rend. Accad. Naz. dei Lincei », vol. 1, p. 1097 (1946).

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente informa la Classe che al termine della presente seduta i Soci Nazionali dovranno riunirsi in seduta segreta. Comunica poi che la seduta del prossimo mese di maggio, prevista dal calendario accademico per sabato 14, sarà invece anticipata a giovedì 12, perchè in detto giorno dovrà aver luogo il conferimento dei Premi Nazionali.

Il Presidente dà poi notizia che il Socio Enrico Fermi, aderendo all'invito rivoltogli dalla Fondazione Donegani e dal Presidente stesso, anche a mezzo del Socio Giordani in occasione del suo recente viaggio negli Stati Uniti, ha assicurato di essere disposto a tenere nei prossimi mesi di settembre e di ottobre, a Roma e a Milano, un ciclo di lezioni per la predetta Fondazione Donegani. Il Presidente ha preso atto con la più viva soddisfazione di tale assicurazione ed ha ritenuto opportuno informarne i Colleghi.

La Classe si associa al compiacimento del Presidente.

Il Presidente invita quindi il Socio Abetti a voler dare alla Classe qualche notizia intorno all'attività scientifica da lui svolta in Egitto ove si è recato per invito dell'Università del Cairo e ove si è trattenuto dal mese di novembre dello scorso anno fino a pochi giorni fa.

Il Socio Abetti dichiara di essere ben lieto di accedere al desiderio del Presidente e riferisce sull'attività culturale e scientifica delle Università e delle Accademie egiziane, ricordando come egli sia intervenuto ad una seduta della più importante di dette Accademie, l'*Institut d'Égypte*, ed abbia portato l'adesione dei Lincei, dando lettura di un messaggio di saluto, redatto in lingua latina dal Collega Funaioli della Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche. Per quanto poi riguarda le Università egiziane, il professore Abetti ricorda che oltre all'antica Università Teologica, denominata « El Ahzar » (la splendente), con sede al Cairo, ve ne sono due altre modernissime, l'una delle quali, intitolata al nome del Re Fouad I, al Cairo, e l'altra, con il nome dell'attuale Re Farouk I, ad Alessandria.

Tali Università hanno un'organizzazione assai più vicina a quella delle Università francesi che agli Istituti scientifici inglesi, mentre le lingue nelle quali si tengono le lezioni sono l'inglese per quanto concerne le materie scientifiche e il francese per quelle letterarie.

Per quanto riguarda più propriamente l'attività svolta nel campo astronomico durante il suo soggiorno in Egitto, il Socio Abetti fa presente che egli doveva svolgere, presso l'Università « Fouad I » del Cairo, un corso di circa tre mesi di astrofisica per gli studenti del secondo biennio di fisica-matematica, ma che, essendosi dimostrato nei docenti e nei laureandi di fisica e astronomia l'interesse per la fisica del sole ha tenuto invece una trentina di lezioni su questo speciale argomento.

Egli si è anche recato e si è trattenuto nell'Osservatorio di Helouan, sito a 30 chilometri a sud del Cairo. Tale Osservatorio, creato originariamente

per fini metereologici, sismici e magnetici, ha recentemente ampliato il suo campo di ricerche agli studi più propriamente astronomici. Dispone attualmente di un riflettore con lo specchio di cm. 75 di apertura ed è collegato con il reparto di astronomia dell'Università. È ora allo studio di una Commissione, della quale dal Rettore dell'Università Fouad I è stato chiamato a far parte lo stesso prof. Abetti, il progetto per un riflettore con lo specchio di m. 1,85 di diametro ed inoltre un progetto per istituire un reparto eliofisico con una torre solare, per la nuova sede dell'Università a Ghiza.

Numerose sono state le conferenze che l'Abetti ha tenuto al Cairo, ad Alessandria d'Egitto a Porto Said e i frequenti contatti con la colonia italiana, con la « Dante Alighieri », con le scuole italiane che rinascono dopo la guerra.

Il Socio Abetti ha ricordato che gli studiosi e gli artisti egiziani guardano con ammirazione all'Italia e alla sua civiltà ed ha concluso auspicando un sempre maggiore incremento dei rapporti culturali tra i due Paesi che già sono assai profondi, grazie all'opera svolta da illustri italiani, quali Ernesto Schiaparelli, Carlo Alfonso Nallino, Ignazio Guidi e Umberto Ricci e alla attività, che, anche ora, valorosi nostri studiosi, tra i quali si compiace di ricordare i Colleghi Arangio Ruiz, Stella, Delogu, Allegretti, esplicano in terra d'Egitto.

Le parole del Socio Abetti sono salutate dai vivi applausi della Classe e il Presidente porge al predetto Socio il suo ringraziamento per l'interessante relazione.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione negli Atti i Soci: Carobbi, Trabacchi, Cotronei, Bonino, Boaga, Picone, Semerano e Giorgi.

Il Segretario Accademico legge l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

MAJORANA Q., Ancora sulla relatività speciale di Alberto Einstein.

CONTI R., Sul problema di Cauchy per l'equazione di tipo misto $x^2 z_{xx} - y^2 z_{yy} = 0$ (pres. dal Corrisp. G. SANSONE).

FAEDO, Chiarimento a una Nota del prof. W. Sierpiński Nota I e II (pres. dal Socio M. PICONE).

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Marotta presenta i « Disegni anatomici di Antonio Canova », editi dalla Fondazione « Emanuele Paternò » a cura del dott. Massimo Pantaleoni dell'Istituto Superiore di Sanità, e li illustra brevemente. Si tratta di una raccolta ignorata di disegni originali di Antonio Canova a soggetto anatomico, comprendente n. 17 tavole numerate e un quaderno di note e di com-

menti illustrativi, sempre di mano del Canova. Tale raccolta fu acquistata nel 1943 dall'Istituto Superiore di Sanità ed è apparso ora opportuno al Socio Marotta, Direttore dell'Istituto, affidare alla Fondazione « Emanuele Paternò» la divulgazione di questo importante « fondo » Canoviano, che costituisce soprattutto un interessante documento della preparazione tecnica dello scultore.

L'Accademico Segretario illustra i volumi inviati in omaggio all'Accademia, mettendo in particolare rilievo i tre volumi degli « Actas do I Congresso Nacional de Ciências Naturais », svoltosi a Lisbona nel 1941; uno studio del Socio Chiarugi dal titolo « La vegetazione dell'Appennino nei suoi aspetti d'ambiente e di storia del popolamento montano », estratto dagli « Atti » de «La ventesima riunione delle Società italiane per il progresso delle scienze, un volume edito dall'Istituto Botanico dell'Università di Pisa, diretto dallo stesso prof. Chiarugi e dedicato alle « Ricerche sulla vegetazione dell'Etruria marittima », contenente studi del predetto professore e di suoi collaboratori; la commemorazione del compianto prof. Giuseppe Bruni, a cura del Socio Quilico, edita dal Politecnico di Milano; un volume del prof. M. Marcel Delépine, pubblicato sotto gli auspici della Société Chimique de France dal titolo « Vie et œuvres de Joseph-Achille Le Bel », in occasione del centenario della nascita del predetto professore Le Bel; numerosi studi di Neil E. Stevens dell'University of Illinois, alcuni dei quali in collaborazione con altri studiosi americani e due lavori di Valerio Tonini.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente ricorda ai Colleghi che numerosi Soci defunti non sono stati ancora commemorati e che la Presidenza pertanto si propone di pregare prossimamente alcuni Colleghi di voler assolvere tale compito.

PREMI IN CORSO DI ASSEGNAZIONE PRESSO L'ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ELENCHI DEI CONCORRENTI

CLASSE DI *SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI*
ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO NAZIONALE GENERALE

(Scadenza 31 gennaio 1949 – Premio lire 1.000.000)

1. Dott. MARIANO LEPORE. — 1. « Azione di mezzi non operatori sui tumori maligni ». — 2. « Gli arsenobenzoli nella terapia delle malattie non luetiche ». — 3. « Indirizzi concreti nella lotta contro la tubercolosi ».

Per altri lavori ved. Scienze Morali, 13.

2. Dott. NICCOLÒ MANCINI. — « Energia universale e reazione della materia ».

3. LUIGI BOGGIANI PICO. — 1. « Utilisation Hygienique des ordures ». — 2. « Relazione Bertarelli ». — 3. « La trasformazione delle immondizie – Referenze I, II ». — 4. « Raccolta trasporto delle immondizie ». — 5. « L'utilizzazione delle immondizie – Relatore Thomi ». — 6. « Fertilità della terra ». — 7. « Lo smaltimento dei rifiuti ». — 8. « I concimi organici per fermentazione ». — 9. « Grafico riassuntivo ». — 10. N. 3 volumi di relazioni (ms.).

4. Prof. dott. GIORDANO BRUNI. — 1. « I farmachi ad azione cinetica ». — 2. « Gli stati d'aggregazione ». — 3. « L'espansione dell'Universo ». — 4. « Influenza di pressione e temperatura sul riempimento dello spazio e sulla coesione. — 5. « La densità della canfora ». — 6. « Esiste un corpuscolo di peso atomico un nono ». — 7. « La coesione, che nei solidi si oppone alla trazione, è di natura newtoniana ». — 8. « L'energia interna molecolare ». — 9. « Una regola generale sulla composizione critica degli idrocarburi paraffinici ». — 10. « La energia della rotazione molecolare ». — 11. « Le molecole del vapore acqueo al punto triplo ». — 12. « La crescita a somiglianza ». — 13. « La cinetica della trasformazione allotropica di zolfo amorfo ». — 14. « Il concetto esatto di temperatura ecc. ». — 15. « Il coesile dell'Etano al punto critico » (ms.). — 16. « La composizione critica del decano normale » (ms.). — 17. « La quantità di moto di Plutone » (ms.). — 18 « L'azione cinetica della vaniglina » (ms.). — 19. « L'equiparazione delle quantità di moto in Mercurio e Marte » (ms.). — 20. « L'edificio coesilico-molecolare dell'alluminio solido al punto triplo » (ms).

Per altri lavori ved. Scienze Morali, 3.

5. Prof. PLACIDO CICALA. — 1. « Ricerche sperimentali sulle azioni aerodinamiche sopra l'ala oscillante ». — 2. « Sul moto non stazionario di un'ala di allungamento finito ». — 3. « Il problema aerodinamico del volo ad ala battente ». — 4. « Ricerche sperimentali sulle azioni aerodinamiche sopra l'ala oscillante ». — 5. « Sul Calcolo dell'ala bilongherone con rivestimento resistente al taglio ». — 6. « Le oscillazioni proprie di un corpo rigido sostenuto elasticamente ». — 7. « Sulle travi di altezza variabile ». — 8. « Sulla stabilità dell'equilibrio elastico ». — 9. « La stabilità elastica del cilindro in parete sottile ». — 10. « Sul calcolo dei solidi cilindrici in parete sottile» – Parte I. — 11. « Sul calcolo dei solidi cilindrici in parete sottile » – Parte II. — 13. « Sul calcolo dei solidi cilindrici in parete sottile » – Parte III. — 13. « Sul calcolo delle strutture alari a guscio ». — 14. « Sulla teoria non lineare di elasticità ». — 15 « Sui cassoni alari con parete a traliccio diagonale ». — 16. « Ricerche sperimentali sulle azioni aerodinamiche sopra l'ala oscillante » - Serie III. — 17. « Lo stato attuale delle ricerche sul moto instazionario di una superficie portante » - Parte I. — 18. « Sul calcolo delle strutture a cassone ». — 19. « Sul calcolo del guscio a quattro correnti ». — 20. « Il cilindro in parete sottile com-

presso assialmente. Nuovo orientamento dell'indagine sulla stabilità elastica ». — 21. « La struttura a guscio soggetta a carico trasversale uniforme ». — 22. « Lo stato di tensione nel guscio cilindrico presso una accidentalità ». — 23. « Sul calcolo delle strutture a guscio ». — 24. « Recenti ricerche sulle variazioni alari ». — 25. « Il guscio a direttrice circolare con correnti e pannelli uguali, soggetto a carichi trasversali ». — 26. « Sull'analisi delle piccole deformazioni nel campo elastoplastico ». — 27. « Effects of Cutouts in Semimonocoque Structures ».

6. Dott. UMBERTO NICCOLINI. — 1. « Fisica delle mesoforme ». — 2. « Fisica ottica e teoria dell'urto ». — 3. « Interpretazione biofisica del metabolismo ». — 4. « Biologia fisico-matematica ». — 5. « Terapia dell'urto quantistico ».

7. Dott. ANTONIO CALUZZI. — « O. X. L'aria che uccide ».

8. Ing. ANTONIO CASTELLANI. — 1. « Monografia delle realizzazioni nel campo dei radar » — 2. « Monografia delle realizzazioni nel campo della televisione ».

9. Prof. OLIVIERO MARIO OLIVO. — 1. « Colture "in vitro" di tessuti embrionali umani ». — 2. « Modificazioni strutturali reversibili indotte nei nuclei di cellule coltivate "in vitro" per azione dell'acqua distillata, studiate in campo oscuro » (in coll. con Boskovich). — 3. « Ulteriori osservazioni in campo oscuro di nuclei di cellule coltivate "in vitro" e trattate con liquidi ipotonici » (in coll. con Boskovich). — 4. « Colorazione vitale con rosso neutro e metabolismo cellulare "in vitro" » (in coll. con Boskovich). — 5. « Considerazioni sul significato funzionale degli osteoni ». — 6. « Rispondenza della funzione meccanica varia degli osteoni con la loro diversa minuta architettura ». — 7. « Rapport entre la structure des osteons et la fonction mechanique ». — 8. « Fecondità in polli nati da uova irradiate coi raggi Röntgen e normalità nei loro discendenti ». — 9. Sul significato della minuta struttura del tessuto osseo compatto » (in coll. con G. Maj e E. Toaiari). — 10. « Osservazioni su gangli spinali coltivati "in vitro" » (in coll. con P. Nicolai). — 11. « Opportunità di impiegare nel calcolo della velocità di accrescimento organico la formula dell'interesse composto continuo » (in coll. con L. Pilati). — 12. « Citoplasma e nucleo di cellule coltivate "in vitro" sotto l'azione di liquidi ipo- ed ipertonici ». — 13. « Tessuto nervoso coltivato "in vitro" con l'aggiunta di vitamina B_1 ». — 14. « Sul presunto scivolamento delle fibre muscolari liscie durante la contrazione. — 15. « Coefficienti di dispersione delle grandezze cellulari nei gangli spinali di specie differenti ». — 16. « Azione biologica dei raggi Röntgen sull'embrione di pollo durante lo sviluppo ». — 17. « Grandezza delle fibre cardiache e mole corporea nei mammiferi ». — 18. « Ipertrofia fisiologica e patologica ». — 19. « Osservazioni comparate sulla grossezza delle fibre muscolari del miocardio dei mammiferi ». — 20. « Osservazioni statistiche sulla grandezza dei neuroni dei gangli spinali ». — 21. « Ricerche elettrocardiografiche sul miocardio embrionale di pollo coltivato "in vitro" » (In coll. con T. Posteli). — 22. « Ricognizione dei presunti capelli di S. Domenico ». — 23. « L'ECG delle prime fasi di sviluppo del cuore embrionale di pollo » (In coll. con S. Petralia e R. Ricamo). — 24. « Elettrocardiogramma e miofibrille nelle colture "in vitro" di miocardio embrionale » (in coll. con S. Petralia e R. Ricamo). — 25. « L'ECG di una sola fibra cardiaca embrionale in coltura "in vitro" » (in coll. con S. Petralia e R. Ricamo). — 26. « Osservazioni sulla grossezza delle fibre muscolari cardiache in rapporto alla mole corporea degli uccelli ». — 27. « L'elettrocardiogramma embrionale precoce nelle colture "in vitro" ». — 28. « L'elettrocardiogramma delle fasi iniziali dell'attività contrattile del cuore embrionale ». — 29. « Structure de la membrane keratinoide de l'estomac musculaire de Gallus gallus ». — 30. « Differenze topografiche dell'ECG in uno stesso espianto di miocardio embrionale coltivato "in vitro" » (in coll. con R. Ricamo). — 31. « Modalità di sincronizzazione di espianti multipli di miocardio embrionale coltivati in "vitro" » (in coll. con R. Ricamo). — 32. Le oscillazioni rapide di potenziale elettrico in espianti di miocardio embrionale coltivati "in vitro" registrate a grande velocità » (in coll. con R. Ricamo). — 33. Modificazioni dell'ECG di espianti di miocardio embrionale coltivati "in vitro" in seguito a stimoli meccanici » (in coll. con R. Ricamo). — 34. « L'elettrocardiogramma di espianti di miocardio coltivati e sincronizzati "in vitro" ». — 35. Presenta inoltre una monografia dattiloscritta in 5 copie dal titolo: « Sulla elettrofisiologia microscopica del miocardio embrionale coltivato "in vitro" », con 5 album di 95 figure.

10. Prof. GIUSEPPE MONTALENTI. — 1. « Biologia ». — 2. « Compendio di embriologia ». — 3. « Elementi di genetica ». — 4. « Problemi di biologia della riproduzione ». — 5. Montalenti e allievi: « Pubblicazioni ». — 6. « Notizie sull'"Attività scientifica e sulla carriera didattica" ». — 7. « L'ibridazione interspecifica degli Anfibi anuri ». — 8. « Saggiatore ». — 9. « Svolgimento storico delle nozioni fondamentali della fisiologia moderna, febbraio 1939 ». — 10. « Svolgimento storico delle nozioni fondamentali della fisiologia moderna, luglio 1939 » .— 11. « Svolgimento storico delle nozioni fondamentali della fisiologia moderna, febbraio–marzo 1942 ». — 12. « Svolgimento storico delle nozioni fondamentali della fisiologia moderna – febbraio–marzo–aprile 1943 ». — 13. « La partenogenesi nei mammiferi ». — 14. « Saggiatore ». Estratto n. 10. — 15. « Problemi dell'ibridazione interspecifica studiati negli anfibi anuri ». — 16. « Analisi della potenza dei primi blastomeri dell'uovo di Lampreda ». — 17. « Analisi citologica della fecondazione e della attivazione artificiale delle uova di Lampreda ». — 18. « Federico Raffaele » (Necrologia). — 19. « Note e discussioni ». — 20. « La vita e l'opera scientifica di Federico Raffaele ». — 21. « La terminologia della genetica ». — 22. « I recenti studi sul problema della determinazione del sesso e dei caratteri sessuali secondari negli animali ». — 23. « "Lusus naturae" un serpe bicipite ». — 24. « Le sostanze (gamoni) che intervengono nella fecondazione dell'uovo di Lampreda ». — 25. « Osservazioni sul differenziamento dei sessi negli embrioni di *Sepia officinalis* ». — 26. « Ricerche sulle reazioni della fecondazione e sulla presenza dei gamoni nella Lampreda ». — 27. « Radiogenetica ». — 28. Evoluzione ». — 29. « Edizione particolare del rapporto di Congresso » (Congresso mondiale di pollicoltura), Berlino 1936. — 30. « La zoologia ». — 31. « Le ricerche di Spallanzani sulla respirazione ». — 32. « Il fenotipo degli ebridi di prima generazione fra *Bufo vulgaris* ecc. ». — 33. « Contributo allo studio dell'effetto "free Martin" nei girini di *Rana esculenta* in parabiosi ». — 34. « Il Premio Nobel 1946 per la medicina "Muller" ». — 35. « Untersuchungen über die Befruchtung » (*Lampreda fluviatilis*). — 36. « Vicende della stazione zoologica negli anni di guerra ». — 37. « Il British Council ». — 38. « Il Convegno di Cambridge sull'acido nucleico ». — 39. « Variation of the submicroscopic structure of the cortical ecc. ». — 40. « Francesco Redi ». — 41. « Sui cromosomi e il numero dei chiasmi nella spermatogenesi di *Psychoda*. — 42. « Ricerche sul differenziamento dei sessi negli embrioni di *Sepia officinalis* ». — 43. « Studi sull'ermafroditismo dei cimotoidi ». — 44. « Centro di studio di citologia genetica ». — 45. « L'assetto cromosomico dei chiasmi nella spermatogenesi di *Similium equinum* L. ». — 46. « Analisi della distribuzione dei chiasmi in *Asellus aquatius* L. ». — 47. « Chiasma interference in mosquitoes ». — 48. « Frank R. Lillie ». — 49. « Comportamento delle fosfatasi alcaline all'azione di alcuni veleni carioclasici ». — 50. « Distribuzione di fosfatasi alcaline in gonadi di crostacei isopedi in rapporto al ciclo degli acidi nucleici ». — 51. « Le ricerche di zoologia compiute in Italia nell'anno XIV ». — 52. « Cyclic variations of the submicroscopic structure of the cortical ecc. ». — 53. « Il sesso ». — 54. « Specie ». — 55. « Redi ». — 56. « Vitalismo ». — 57. « Réaumur ». — 58. « Tassidermia ». — 59. « Ritmo ». — 60. « Poliformismo ». — 61. « Partenogenesi ». — 62. « Simmetria ». — 63. « Variabilità ». — 64. « Estratti dell'Enciclopedia rilegati in volume. — 65. « Macnidae, Mullidae, Sciaenidae e Cipolidae ».

Vi sono inoltre alcune pubblicazioni di allievi.

CLASSE DI *SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI*

ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO NAZIONALE DI CATEGORIA (FISICA)

(Scadenza 31 gennaio 1949 – Premio lire 1.000.000)

1. Ing. ROBERTO MAINELLI. — 1. « Meccanica dei corpi deformabili. - Moto dei corpi nei fluidi ».

2. Prof. GILBERTO BERNARDINI. — 1. « Sulle condizioni di equilibrio delle componenti elettronica e mesotronica in mezzi diversi e a varie altezze sul livello del mare » 2. « Sul-

l'assorbimento della componente dura della radiazione penetrante e la natura del mesotrone ». — 3. « Sulla curva degli sciami e la natura del mesotrone ». — 4. « Sulle condizioni di equilibrio delle componenti elettronica e mesotronica intorno al livello del mare ». — 5. « Sulla deflessione dei corpuscoli cosmici in un nucleo di ferro magnetizzato ». — 6. « Sulla componente elettronica della radiazione cosmica e la teoria dei processi moltiplicativi ». — 7. « Sulla vita media del mesotrone ». — 8. « Über die anomale absorption in Luft und die Lebensdaner des Mesons ». — 9. « Researches on the magnetic deflection of the hard component of cosmic rays ». — 10. « Some coincidence sets for the study of cosmic rays ». — 11. « Sulla componente elettronica nella bassa atmosfera ». — 12. « Mesons Decay and Secondary Electrons ». — 13. « Electronic Component of Cosmic Rays in the low atmosphere ». — 14. « Sull'assorbimento in diversi materiali della radiazione che genera a evaporazioni nucleari ». — 15. « Nuclear Evaporations produced by Cosmic Rays ». — 16. Sulla energia e la intensità dei gruppi di neutroni emessi dal Po + Be ». — 17. « Sui livelli del nucleo $^{12}_{6}C$ ». — 18. « Sulla produzione della radiazione elettronica secondaria da parte dei mesoni ». — 19. « Su un metodo per la determinazione della vita media del mesone basato sugli effetti integrali di assorbimento ».

3. Ing. FAUSTO VERDURA. — 1. « I raggi cosmici e l'espansione dell'universo » (ms.). — 2. « I raggi cosmici e l'espansione dell'universo (Teoria unitaria sull'origine dei fenomeni – Note riassuntive n. 1 e n. 2) (ms.). — 3. « Problemi di ingegneria moderna ». (I parag. I e II del Cap. I e il parag. I del cap. III, contengono l'individuazione della legge corretta della viscosità dei gas a molecole biatomiche e la scoperta di una nuova relazione riguardante il fenomeno termoelettrico).

4. Ing. ANTONIO CORTESE. — 1. « Bussola Piezoelettrica » – Due descrizioni con due tavole di disegno ciascuna. — 2. « Pendolo Piezoelettrico » – Due descrizioni con una tavola di disegno ciascuna. — 3. Goniometro Piezoelettrico » – Due descrizioni con una tavola di disegni ciascuna. — 4. « Una copia di attestato del Consiglio Nazionale delle Ricerche (Comitato per la Fisica) relativo alle suddette invenzioni a carattere scientifico ». — 5. « Centrale di Tiro elettronica. » – Descrizione originale del brevetto 396322 – Disegno in fotografia dello schema della centrale (una copia) Attestati: II, III, IV, V del Ministero della Guerra. — 6. « Centrale di tiro elettromeccanica » – Descrizione del brevetto-Descrizione dei due brevetti aggiuntivi. Sei fotografie dei disegni del principio scientifico di tale centrale. Una fotografia della dichiarazione del Ministero della Guerra relativa a tale centrale. — 7. « Tubazione elettromagnetica ». – Descrizione del brevetto italiano in origine e del brevetto francese (Italiano 328.207 – Francese 768.505). Copia del disegno che fu allegato al brevetto che fu depositato in America. Due dichiarazioni della Direzione Generale delle Poste e Telecomunicazioni in copia fotografica. — 8. « Cannone rotativo » – Brevetto 341.474 ed un promemoria. — 9. « Alzo antivibrante ». – Un disegno con descrizione in una tavola ed una copia fotografica di dichiarazione del Ministero della Guerra.

5. Prof. BRUNO FERRETTI. — 1. « Sulla propagazione delle onde elettromagnetiche in un bicomplesso anisotropo ». — 2. « Propagazione e assorbimento del neutrino ». — 3. « Su di una possibile origine della radiazione cosmica molle al livello del mare ». — 4. « Alcune osservazioni sulla natura della componente penetrante dei raggi cosmici » (coll. Bernardini). — 5. « Sulla componente elettronica della radiazione penetrante » (coll. Bernardini). — 6. « Sulla radiazione mollissima » (coll. Bernardini). — 7. « Sulla scintilla strappata per emissione di campo » (coll. A. De Stefano). — 8. « Su un nuovo tipo di disintegrazione artificiale ». — 9. « Ancora sulla scissione dell'Uranio ». — 10. « Misura del rapporto tra l'intensità della componente molle e della componente dura della radiazione penetrante sotto uno strato equivalente a m. 4 d'acqua al livello del mare » (coll. Bernardini e Cacciapuoti). — 11. « Alcune osservazioni sull'assorbimento della componente dura della radiazione penetrante ». — 12. « Sulle condizioni di equilibrio delle componenti elettronica e mesotronica in mezzi diversi a varie altezze sul livello del mare ». — 13. « Sulla instabilità del mesotrone » (coll. Ageno, Bernardini, Cacciapuoti, Wick). — 14. « Sulla disintegrazione spontanea del mesotrone ». — 15. « Sul secondo massimo della curva di Rossi ». — 16. « Sulle condizioni di equilibrio della componente elettronica e mesotronica intorno al livello del mare » (coll. Bernardini,

Cacciapuoti, Piccioni, Wick). — 17. « Sull'esistenza di una energia di interazione fra il neutrone e un campo elettrostatico ». — 18. « Sull'urto fra neutroni lenti e protoni ». — 19. Sulla teoria dell'urto fra protoni e neutroni veloci ». — 20. « Sulla teoria dell'urto fra protoni e neutroni veloci ». — 21. « Sull'origine e natura della radiazione penetrante ». — 22. « Streuung von 14 MeV Neutronen an Protonen » (coll. Amaldi, Bocciarelli, Trabacchi). — 23. « Urto fra protoni e neutroni » — 24. « Sui secondari della componente dura della radiazione penetrante ». — 25. « Considerazioni sulle forze nucleari e alcuni risultati sperimentali sulla diffusione per urto dei neutroni contro i protoni ». — 26. « Sull'urto fra protoni e neutroni e le forze nucleari non statiche ». — 27. « Contributo alla teoria dell'acceleratore a induzione » (coll. Amaldi). — 28. « Su due varianti dell'acceleratore a induzione » (coll. Amaldi). — 29. « On the possible modifications of the induction accelerator » (coll. Amaldi). — 30. « Sulle particelle penetranti negli sciami estesi dell'aria ». — 31. « Sull'ipotetico mesone di vita media nolto breve ». — 32. « The absorption of slow mesons by an atomic nucleus ». — 33. « On the solution of Scattering and Related Problems » (coll. Krook). — 34. « Sull'assorbimento dei mesoni prodotti artificialmente ». — 35. « Sulla cattura atomica dei mesoni lenti ».

6. Gaetano Pennino. — Armonia della voce (ms.).

ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO MINISTERIALE PER LE *SCIENZE MATEMATICHE*

(Scadenza 31 dicembre 1948 — Premio lire 10.000)

1. Alice Giovanni. — « Calcolo del rapporto r derivato da un rapporto $\frac{L}{D}$ » (ms.).

2. Catuogno Baldassare. — « Fondamenti della geometria elementare » (ms.).

3. Ceravolo Pasquale. — « Sui "Nuclei" del numero » (ms.).

4. Corbetta Casimiro. — « Risoluzione grafica generale dell'equazione di terzo grado e trisezione di un angolo dato » (ms.).

5. Occhipinti Roberto. — 1. « Superficie a curvatura di Casorati Costante » (ms.). — 2. « Sulla corrispondenza fra le assintotiche delle due falde dell'evoluta di una superficie con i raggi principali in rapporto costante e le linee dell'evolvente » (ms.).

6. Rapisarda Carlo. — 1. « Un teorema sulla scomposizione di una funzione razionale fratta » (ms.). — 2. « Sullo sviluppo immediato di una potenza di esponente naturale e di base un polinomio » (ms.).

7. Ricci Gilberto. — « Calendario perpetuo Giuliano e Gregoriano » (ms.).

ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO MINISTERIALE PER LE *SCIENZE FISICHE*

(Scadenza 31 dicembre 1948 — Premio lire 10.000)

1. Bruni Giordano. — « Vibrazioni neutroniche mediante colchicina » (st.).

2. Bruno Costanza. — 1. « Pile galvaniche con elettroliti solidi » (estr.). — 2. « Forze elettromotrici di pile con elettroliti solidi. Discussione del caso generale di elettroliti a conduzione mista. Nota preliminare » (estr.) (comune alle Scienze Chimiche, 4).

3. Focacci Marco Piero. — « L'influenza del coefficiente di attrito metallo-cilindri nel processo di laminazione a freddo dei metalli. Conseguente teoria per una razionale lubrificazione che modifichi in misura adeguata tale coefficente. Convalida sperimentale dei risultati teorici » (estr.).

4. Massara Vincenzo. — « Areometro a reazione » (estr.).

5. Romele Erminio. — « Acustica » (ms.) (comune alle Scienze Chimiche », 6).

6. Savini Mario. — « Magnetron ad anodo tronco conico » (ms.).

7. SCOTTON MARIO. — 1. « Sulla dinamica del rastrello a scarico intermittente » (st.). — 2. « La velocità di taglio nella falciatrice » (st.).

8. SIRACUSANO NATALIZIO. — « Magnetismo proprio dell'elettrone e natura della massa elettronica » (ms.).

ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO MINISTERIALE PER LE *SCIENZE CHIMICHE*

(Scadenza 31 dicembre 1948 — Premio lire 10.000)

1. ALGERINO ANTONINO. — « Chimica analitica applicata all'industria tessile e tintoria » (st.).

2. BERTORELLE EUGENIO. — 1. « Galvanotecnica » (st.). — 2. « Argentatura con catodo rotante » (estr.). — 3. « Studi elettrometrici sugli idrosolfiti » (estr.). — 4. « Sui cianuri ferroso ferrici – Nota III » (estr.).

3. BRUNI GIORDANO. — 1. « Il coesile critico del propano » (estr.). — 2. « Il coesile del metano al punto critico » (rivista).

4. BRUNO COSTANZA. — 1. « Pile galvaniche con elettroliti solidi » (estr.). — 2. « Forze elettromotrici di pile con elettroliti solidi. Discussione del caso generale di elettroliti a conduzione mista. – Nota preliminare » (estr.) (comune alle Scienze Fisiche, 2).

5. CERASOLI ERCOLE. — « Sviluppo storico dei concetti di elementi chimici, sostanze semplici, sostanze composte e specie chimiche » (ms.).

6. ROMELE ERMINIO. — « Acustica » (ms.) (comune alle Scienze Fisiche, 6).

7. SERCHI GIORGIO.— « Su alcune reazioni cromatiche degli ormoni follicolari. – Nota I Preliminare » (ms.).

ELENCO DEI CONCORRENTI AL PREMIO MINISTERIALE PER LE *SCIENZE NATURALI*

(Scadenza 31 dicembre 1948 — Premio lire 10.000)

1. BOENZI SALVATORE. — 1. « Osservazioni su alcune salse in Provincia di Matera » (estr.). — 2. « Una visita alla "Gruffolante" Fontana ardente nei pressi di Montalbano Jonico » (estr.).

(Fuori concorso): « Brevi osservazioni sopra alcune Balanidi del Pliocene dell'Attica ».

2. BOGGIO-LERA FRANCESCO. — « Una interessante struttura nelle galle di "Cynips Kollari Kart" ed affini » (st.).

3. CASTELLANI ETTORE. — 1. « La Tunisia – Agricoltura e Colonizzazione » (st.). — 2. « Osservazioni su casi di antibiosi tra demaziacee ed un uredinale » (st.). — 3. « Razze di pinate resistenti e prevenzione delle malattie » (st.). — 4. « Monochaetiella – Un nuovo genere rappresentante un termine di passaggio fra i melanconiali e gli Sferopsidali » (st.). — 5. « Il vaiolo del "Cosso" » (st.). — 6. « Problemi fitopatologici e loro interferenze con la valorizzazione agraria dei territori coloniali italiani » (st.). — 7. « Stato delle conoscenze micologiche e fitopatologiche per l'Eritrea, la Somalia e l'Etiopia » (st.). — 8. « Micromiceti etiopici ed eritrei » (st.). — 9. « Prime notizie sulla rogna del "Ciat" » (estr.). — 10. « Il mosaico del fico » (estr.). — 11. « Osservazioni fitopatologiche sul "Berberè" (estr.). — 12. « Le vaiolature dell'arachide » (estr.). — 13. « Cercospora premnae » (estr.). — 14. « Osservazioni e considerazioni sulla morfologia e sulla biologia di alcuni parassiti delle "Phyllachorae" » (estr.). — 15. « Contributo alla revisione di alcuni fungilli descritti sotto il genere "Phaeodothis" » (estr.). — 16. « Su un marciume radicale della scarola » (estr.). — 17. « Sull'azione antagonistica di due batteri verso "Thielaviopsis basicola" (Berk. et Br.) Ferraris » (estr.). — 18. « Ricerche morfo-bioecologiche sulla "Gnomonia juglandis" (D. C.). Trav. » (estr.). — 19. « L'antracnosi del carrubo » (estr.). — 20. « L'antracnosi del "Teff" » (estr.). — 21. « Galle ovaricole dello "Sporobolus Brockmanni" » (estr.). — 22. « La scabbia delle arance

in Eritrea » (estr.). — 22-*bis*. « Per una lotta integrale contro la ticchiolatura del melo e del pero » (estr.). — 23. « L'antracnosi del fagiolo » (estr.). — 24. « Le tracheomicosi » (estr.). — 25. « La peronospora del grano » (estr.). — 26. « Le virosi della soia » (ms.). — 27. « Su un "Verticillium" parassita del "Cronartium asclepiadeum" » (ms.).

4. Comes Salvatore. — 1. « Le generazioni alternanti » (st.). — 2. « Il senso della pista o di uno speciale autochemiotattismo nelle formiche » (estr.). — 3. « Le costanti vitali. La costante ontogenetica e la costante filogenetica » (estr.). — 4. « Storia e priorità di un reperto scientifico: la simbiosi fra le termiti e i flagellati ospiti del loro intestino » (estr.). — 5. « Di un caso di intersessualità fra caratteri primari e secondari nel pollo e della sua possibile spiegazione » (estr.).

5. Cuscani Pietro. — « L'elettricità nella dinamica endogena » (estr.).

6. D'Africa Giacomo. — « Primi risultati di una inchiesta erboristica in Calabria » (ms.).

7. Manzoni Luigi. — « Consumi idrici delle principali piante agrarie » (st.).

8. Marchetti Bertolani Daria. — 1. « Vegetazione dei gessi dell'alta valle del Secchia » (Nota preliminare) (estr.). — 2. « Vegetazione delle sorgenti salse di Poiano e Primaore nell'alta valle del Secchia » (estr.). — 3. « Flora e vegetazione della formazione ofiolitica di Rossena (Reggio Emilia) » (ms.).

9. Mazzei Alfredo. — « Vita privata degli animali » (st.).

10. Miraglia Luigi. — « Il glaciale del Monte Cervati » (bozze).

11. Moretti Aurelio. — 1. « Effetti della concimazione azotata prefiorale sul Susino "Santa Rosa" » (estr.). — 2. « Nuovi orientamenti per la utilizzazione dei terreni golenali » (ms.). — 3. « La moltiplicazione dei vitigni portinnesti con legno grandinato » (estr.).

12. Kissopoulos Maria. — « Le Querce fossili del Gabbro » (ms.).

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 9 aprile 1949

Actas do I Congresso Nacional de Ciências Naturais. Lisboa 1941. Lisboa, Sociedade Portuguesa de Ciências Naturais, 1942. Voll. 3, in-8°, con figg. (Boletim, vol. XIII, suppl. 1, 2, 3).

Bain H. F. — Vedi: Stevens Neil E., Rogers L. M. and Bain H. F.

Chiarugi Alberto. — *Ricerche sulla vegetazione dell'Etruria Marittima*. I-VII. Estr. da « Nuovo Giornale Botanico Italiano », n. s., vol. XLIII, 1936, fasc. 1 e 4. (Acta Horti Pisani, vol. II).

— *La vegetazione dell'Appennino nei suoi aspetti d'ambiente e di storia del popolamento montano*. Estr. da « Atti della XXVII Riunione della Società Italiana per il Progresso delle Scienze », Bologna, 4-11 settembre 1938.

Christie J. R. and Stevens Neil E. — *Strawberry dwarf*. Estr. da « Circular of the United States Department of Agriculture », 1933, n. 297.

Delépine Marcel M. — *Vie et œuvres de Joseph-Achille Le Bel* pubbliées à l'occasion de sa naissance. Paris, Impr. Paul. Dupont, 1949. Pp. 222, in-8°, con tavv. (Société Chimique de France).

Hull H. H. and Stevens N. E. — *Changes in pH and in base-exchange properties of cranberry soils following the use of alkaline water*. Estr. da « Soil Science », vol. LVIII, 1944, n. 5.

Lewis Charles H. and Stevens Neil E. — *Winter oxygen content and biochemical oxygen demand in a Wisconsin artificial lake*. Estr. da « Transactions of the Wisconsin Academy of Sciences, Arts and Letters », vol. XXXVI, 1944.

Mook Paul V. — Vedi: Stevens Neil E. and Mook Paul V.

Nance Nellie W. — Vedi: Stevens Neil E. and Nance Nellie W.

Nienow Inez. — Vedi: Stevens Neil E. and Nienow Inez.

QUILICO Adolfo. — *Giuseppe Bruni*. 25 agosto 1873–3 gennaio 1946. Milano, Politecnico, 1948. Pp. 37, in–8°.

REDDICK Donald. — Vedi: WOOD Jessie I, STEVENS Neil E. and REDDICK Donald.

ROGERS L. M. — Vedi: STEVENS Neil E., ROGERS L. M. and BAIN H. F.

ROMEO Gioacchino. — *È possibile il moto perpetuo?* Considerazioni sui principii della dinamica. Palermo, Arti Grafiche Luigi Cappugi, 1949. Pp. 20, in–8°.

STEVENS Neil E. — *Acidity of soil and water used in cranberry culture*. Estr. da «Transactions of the Wisconsin Academy of Sciences, Arts and Letters», vol. XXXVIII, 1946.

— *The bibliographical work of Alice Cary Atwood*. Estr. da «Chronica Botanica», vol. VII, 1943, n. 7.

— *Bureaucracy as a way of life*. Estr. da «Science», vol. LXXXIII, 1936, n. 2160.

— *The centenary of T. J. Burrill*. Estr. da «The Scientific Monthly», vol. XLIX, 1939.

— *Disease damage in grains*. Estr. da «The Scientific Monthly», vol. LII, 1941.

— *Environmental conditions and the wasting disease of eel–grass*. Estr. da «Science», vol. LXXXIV, 1936, n. 2169.

— *The excessive meekness of American botanists*. Estr. da «Science», vol. LXXXV, 1937, n. 2216.

— *The fad as a factor in botanical publications*. Estr. da «Science», vol. LXXV, 1932, n. 1950.

— *Further observations on alkaline flooding water in cranberry growing*. Estr. da «Transactions of the Wisconsin Academy of Sciences, Arts and Lettres», vol. XXXVI, 1944.

— *How plant pathology can contribute to a land–utilization program*. Estr. da «Phytopathology», vol. XXIII, 1933, n. 4.

— *Life history and synonymy of physalospora glandicola*. Estr. da «Mycologia», vol. XXV, 1933, n. 6.

— *Life history and taxonomy of the Fungus Physalospora Rhodina*. Estr. da «Bulletin of the Florida Experiment Station», 1942, n. 371.

— *Losses from bunt of wheat in the United States*. Estr. da «Phytopathology», vol. XXX, 1940, n. 5.

STEVENS Neil E. — *Mycological letters from M. A. Curtis 1856–1861*. Estr. da «Mycologia», vol. XXVI, 1934, n. 5.

— *Notable outbreaks of cranberry fruit rots in Massachusetts*. Estr. da «Phytopatology», vol. XXII, 1932, n. 11.

— *A note on the temperature relations of certain fungi*. Estr. da «Mycologia», vol. XXVIII, 1936, n. 6.

— *Objectives in biological courses*. Estr. da «School Science and Mathematics», 1946.

— *Observations on flooding waters used in cranberry culture*. Estr. da «Massachusetts Agricultural Experiment Station Bulletin», n. 433.

— *Plant pathology and the consumer*. Estr. da «The Scientific Monthly», vol. XXXVII, 1933.

— *Plant pathology in the penultimate century*. Estr. da «Isis», vol. XXI, 1934, n. 60.

— *Problems involved in control of plant diseases and insects*. Estr. da «Journal of Economic Entomology», 1938.

— *Relation of weather to the keeping quality of Massachusetts cranberries*. Estr. da «Massachusetts Agricultural Experiment Station Bulletin», 1943, n. 402.

— *Some significant estimates of losses from plant diseases in the United States*. Estr. da «Phytopathology», vol. XXIII, 1933, n. 12.

— *Suggestions for a pan–pacific survey of rice diseases*. Estr. (Fifth Pacific Science Congress).

— *Thickness of cuticle in cranberry fruits*. Estr. da «American Journal of Botany», vol. XIX, 1932.

— *Two apple black rot fungi in the United States*. Estr. da «Mycologia», vol. XXV, 1933, n. 6.

— *Two species of physalospora in England*. Estr. da «Mycologia», vol. XXVIII, 1936, n. 4.

— *Was there an outbreak of bacterial wilt of corn in central Illinois in 1891 and 1892?* Estr. da «Transactions of the Illinois State Academy of Science», volume XXIX, 1936, n. 2.

STEVENS Neil E. and MOOK Paul V. — *Field observations on strawberry dwarf in North Carolina*, Estr. da «Phytopathology», vol. XX, 1930, n. 8.

STEVENS Neil E. and MOOK Paul V. — *Recent observations on strwberry dwarf*. Estr. da « Journal of Economic Entomology », vol. XXV, 1932, n. 3.

— and NANCE Nellie W. — *Efficiency of oiled wraps in the commercial control of apple scald*. Estr. da « Phytopathology », vol. XXII, 1932, n. 6.

— and NIENOW Inez. — *Plant diseases control by unisual methods*. Estr. da « Botanical Review », vol. XIII, 1947, n. 2.

— and STEVENS Russell B. — *Plant diseases during the years 1941–1945 in the United States and Canada*. Estr. da « Botanical Review », vol. XIII, 1947, n. 2.

— and WILSON W. E. — *A biotin like substance produced by Diplodia zeae*. Estr. da « Science », vol. XCIII, 1941, n. 2419.

— and WOOD Jessie I. — *Losses from corn ear rots in the United States*. Estr. da « Phytopatology », vol. XXV, 1935, n. 2.

STEVENS Neil E., ROGERS L. M. and BAIN H. F. — *Alkaline flooding water in cranberry growing*. Estr. da «Transactions of the Wisconsin Academy of Sciences, Arts and Letters », vol. XXXII, 1940.

STEVENS Neil E. — Vedi: CHRISTIE J. R. and STEVENS Neil E.

STEVENS Neil E. — Vedi: HULL H. H. and STEVENS Neil E.

— Vedi: LEWIS Charles H. and STEVENS Neil E.

— Vedi: WOOD Jessie I, STEVENS Neil E. and REDDICK Donald.

STEVENS Russell B. — Vedi: STEVENS Neil E. and STEVENS Russell B.

TONINI Valerio. — *Relatività non einsteiniana*. Estr. da « Rendiconti del Seminario della Facoltà di Scienze della Università di Cagliari », vol. XVI, 1946, fasc. 3–4.

— *Relatività strutturale*. Estr. da « Rendiconti del Seminario della Facoltà di Scienze della Università di Cagliari », vol. XVII, 1947, fasc. 4.

WILSON W. E. — Vedi: STEVENS Neil E. and WILSON W. E.

WOOD Jessie I. — *Diseases and fungi reported on rice*. Estr. (Fifth Pacific Science Congress).

WOOD Jessie I., STEVENS Neil E. and REDDICK Donald. — *Reporth of the Committee of technical words*. Estr. da « Phytopathology », vol. XXX, 1940, n. 4.

WOOD Jessie I. — Vedi: STEVENS Neil E. and WOOD Jessies I.

U. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 12 maggio 1949.

Presidenza del Socio G. CASTELNUOVO

NOTE DI SOCI

Matematica (Geometria differenziale). — *Alcune proprietà caratteristiche delle varietà a curvatura costante.* Nota II (*) del Corrisp. BENIAMINO SEGRE.

4. Dimostreremo ora che:

Le corrispondenze di tipo C *(di cui al n. 3) possono venir caratterizzate come quelle corrispondenze puntuali fra* S'_n *ed* S_n *che mutano rette di* S'_n *in cerchi di* S_n *e piani di* S'_n *in 2-sfere (o, in particolare, piani) di* S_n.

Le corrispondenze di tipo C godono della proprietà indicata, in base al n. 3. Basterà dunque stabilire la proposizione inversa; e potremo limitarci a supporre $n \geqq 3$, in quanto il risultato trovasi già acquisito per $n = 2$ in loc. cit. in (3).

Riccorrendo ad un'n-sfera W_n, rappresentata su S_n stereograficamente in guisa che le k-sfere di S_n e le k-sfere di W_n si corrispondano ($k = 1, 2, \cdots, n-1$), otteniamo che una qualunque trasformazione di S'_n in S_n che goda delle proprietà enunciate si muti in un riferimento puntuale fra S'_n e W_n, trasformante rette e piani di S'_n rispettivamente in sezioni di W_n con S_2 e con S_3 del suo S_{n+1} di appartenenza; e viceversa. Alle rette di S'_n uscenti da un generico punto P', corrispondono quindi su W_n le sezioni con piani situati a due a due in un S_3, ossia a due a due incidenti lungo un S_1. Al variare di quelle rette per P' il suddetto S_3 non può restare fisso, in quanto il luogo delle prime è l'S'_n, il quale non può venir trasformato nella 2-sfera sezione di W_n con S_3, essendo $n > 2$.

Ne consegue che rimane invece fisso il suddetto S_1, sicchè il riferimento fra S'_n e W_n induce una trasformazione dei singoli punti P' di S'_n in rette S_1 di S_{n+1}: queste ultime sono poi a due incidenti, e quindi passano tutte per un punto

(*) Presentata nella seduta del 12 febbraio 1949. – Continuazione della Nota I, apparsa in questi «Rendiconti», vol. VI, fasc. 4, pp. 393-397.

fisso O di S_{n+1}, poichè due punti P' sono congiunti da una retta di S'_n alla quale corrisponde la sezione di W_n con un piano, a cui debbono appartenere gli S_1 omologhi di quei due punti. Siccome, in base al lemma stabilito in (3), il suddetto riferimento fra i punti di S'_n e le rette di S_{n+1} uscenti da O muta una retta punteggiata di S'_n in un fascio di rette ad essa proiettivo, così tale riferimento risulta omografico. La corrispondenza inizialmente considerata fra S'_n ed S_n si traduce quindi con equazioni della forma (1), ed è pertanto effettivamente di tipo C.

5. Supponiamo ancora $n > 2$, e consideriamo una corrispondenza fra S'_n ed S_n – supposta esistente – che trasformi rette in cerchi senza esser di tipo C. Essa fornirà un riferimento puntuale fra S'_n e la W_n di cui al n. 4, trasformante le rette di S'_n in sezioni piane di W_n ed i piani generici di S'_n in superficie V_2 di W_n appartenenti a spazi, S_h, di dimensione $h > 3$. Ogni siffatta V_2 contiene ∞^2 cerchi, trasformati delle rette situate sul piano omologo di S'_n, ed è quindi una superficie di Veronese di S_5 od una proiezione di questa in S_4. La seconda possibilità resta però esclusa, in quanto una V_2 dell'ultimo tipo non appartiene ad alcuna quadrica non specializzata di S_4, mentre invece ogni V^2_{h-1} che contenga infiniti punti reali e sia segata sull'n–sfera W_n da un S_h reale (e quindi pure quella relativa all'S_h di appartenenza di V_2) è certamente non specializzata. Pertanto:

Nella suddetta corrispondenza fra S'_n *e* W_n *ai piani di* S'_n *corrispondono su* W_n *superficie di Veronese, luoghi ciascuna di* ∞^2 *cerchi.*

Ne consegue anzitutto che, nelle ipotesi attuali, *dev'essere* $n \geq 4$. Aggiungasi che il riferimento fra un generico piano S'_2 di S'_n e la relativa V_2 di Veronese muta le rette di S'_2 nelle coniche (cerchi) di V_2, ed *è quindi birazionale*; ciò risulta osservando che un piano ausiliario, su cui V_2 si rappresenti birazionalmente in guisa che le ∞^2 coniche di V_2 si mutino in rette, risulta riferito omograficamente ad S'_2. Si ha quindi che

Nelle ipotesi ammesse in principio di questo numero, la corrispondenza fra S'_n *e* W_n *è precisamente una trasformazione birazionale, che muta rette di* S'_n *in cerchi e piani di* S'_n *in superficie di Veronese, sicchè le sezioni iperpiane di* W_n *si rappresentano in* S'_n *mediante quadriche formanti un sistema lineare completo, di grado* 2 *e dimensione* $n + 1$.

Inversamente, da ogni siffatto riferimento fra S'_n e W_n si deduce subito, mediante proiezione stereografica di W_n su S_n, una trasformazione cremoniana fra S'_n ed S_n che muta rette in cerchi e non è di tipo C.

6. Discuteremo ora la possibilità di sistemi lineari del tipo considerato nell'ultimo enunciato, incominciando dal *caso* $n = 4$.

Sia Σ' un sistema lineare di quadriche di S'_4 avente i requisiti voluti, rappresentativo di un'ipersfera W_4. La varietà base B' di Σ' non può comprendere punti isolati (reali od imaginari), in quanto un punto base isolato di Σ' non potrebbe essere che semplice e si rappresenterebbe quindi su W_4 con un S_3, mentre invece (nel campo complesso) gli spazi lineari di dimensione massima giacenti su W_4 sono dei piani.

Poichè il generico S'_2 di S'_4 deve rappresentarsi su W_4 con una superficie di Veronese (n. 5), così Σ' sega su S'_2 il sistema lineare ∞^5 di tutte le coniche. Ne consegue che S'_2 non incontra B', sicchè B' è una curva (necessariamente algebrica). L'ordine di questa non può superare il 4, in quanto Σ' deve segare (sul generico S'_2 e quindi *a fortiori*) sul generico S'_3 di S'_4 un sistema lineare la cui dimensione non può essere inferiore a 5. Tenuto conto che Σ' è un sistema lineare ∞^5, completo (in quanto W_4 è normale), e che un'eventuale retta trisecante di B' giace su tutte le quadriche di Σ' ed è quindi una componente di B', si vede che B' *non può essere che una quartica razionale normale di* S'_4, inclusi i *casi limiti* di quartiche spezzate. Viceversa, ogni B' siffatta è curva base di un sistema lineare di quadriche di S'_4, rappresentativo di una quadrica di S_5 [8].

Poichè attualmente W_4 dev'essere una quadrica a punti reali, non degenere e non contenente alcuna retta reale, e siccome tutte le quadriche di questo tipo sono fra loro proiettivamente identiche nel campo reale, si vede senza difficoltà che si realizzano le varie rappresentazioni del tipo voluto di una 4–sfera W_4 su S'_4, definendo Σ' mediante una quartica base di uno dei seguenti tre tipi:

(i) Quartica razionale normale (irriducibile), autoconiugata ma priva di punti reali.

(ii) Curva spezzata in una conica autoconiugata (eventualmente riducibile), priva di rami reali, ed in due rette complesse coniugate incidenti ad essa e congiunte da un S_3 (reale) che non contenga il piano della conica.

(iii) Curva spezzata in due coniche complesse coniugate, appartenenti a due piani complessi coniugati intersecantisi in un sol punto (reale), in modo che questo punto stia su entrambe le coniche.

Così, ad esempio, nel caso (i) si giunge a rappresentare birazionalmente nel modo voluto (e senza introdurre irrazionalità aritmetiche) la 4–sfera

$$W_4: \qquad z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2 = r^2$$

sull'S'_4 proiettivo $(y_0, y_1, y_2, y_3, y_4)$, mediante le formule

$$z_1 : z_2 : z_3 : z_4 : z_5 : r = y_0 y_1 + y_2 y_3 + y_1 y_4 \ : \ y_1 y_3 - y_2 y_4 \ : \ y_1 y_2 - y_0 y_3 \ :$$
$$: \ y_0 y_4 - y_1^2 \ : \ \tfrac{1}{2}(y_3^2 + y_4^2 - y_0^2 - y_2^2) \ : \ \tfrac{1}{2}(y_0^2 + 2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2),$$

e le loro inverse

$$y_0 : y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = -z_4(z_4 - z_5 + r) - z_3^2 \ : \ z_2 z_3 - z_1 z_4 \ :$$
$$: \ z_1 z_3 + z_2(z_4 - z_5 + r) \ : \ z_1 z_2 + z_3(z_4 + z_5 + r) \ :$$
$$: \ -z_2^2 - z_4(z_4 + z_5 + r).$$

7. Proveremo in secondo luogo che, *per* $n = 5$, non esiste alcuna rappresentazione relativa ad una W_5, del tipo considerato nell'ultimo enunciato del n. 5.

(8) La rappresentazione delle V_1^2 su S'_4, così definite, erano già state ottenute altrimenti da J. G. SEMPLE, *Cremona transformations of space of four dimensions*, «Phil. Trans. Roy. Soc. of London» (A), *228* (1929), 331–376 (350). Lo stesso Autore ne ha anche fatte varie eleganti applicazioni di carattere proiettivo; ved. J. G. SEMPLE, *Note on rational normal quartic curves*, «Journ. London Math. Soc.», 7 (1931), 266–271, e *On representations of line-congruences of the second and third orders*, «Proc. London Math. Soc.» (2), *35* (1933), 294–324.

Invero, se una quadrica W_5 non specializzata si rappresentasse in S'_5 nel modo ivi prescritto, la varietà base B′ del sistema Σ' rappresentativo non dovrebbe incontrare i piani generici di S'_5 (n. 6), e quindi avrebbe al più dimensione due. D'altro canto, nessuna componente di B′ potrebbe avere dimensione inferiore a due od essere un piano, in quanto il generico punto di una V'_h base di Σ' (necessariamente semplice) si rappresenterebbe su W_5 con un S_{1-h}, ed un generico S'_5 di S'_5 contenente un piano base di Σ' si rappresenterebbe su W_5 con un S_3, mentre invece W_5 non contiene nessuno spazio lineare (reale o complesso) di dimensione maggiore di due. Inoltre B′ dovrebbe ammettere al più ∞^7 coniche trisecanti, salvo che ogni sua conica trisecante risultasse quadrisecante, in quanto alle coniche trisecanti di B′ corrisponderebbero rette su W_5. Ne consegue che la varietà base B′ dovrebbe essere una superficie non piana appartenente ad un S'_5, e quindi una V'_2, il che condurrebbe ad un sistema lineare Σ' di grado maggiore di due.

Avuto anche riguardo ai nn. 4–6, possiamo dunque dire che:

Se $n = 2, 3, 5$, le corrispondenze di tipo C *(studiate nel n. 3) sono le sole trasformazioni puntuali fra un S'_n proiettivo ed un S_n euclideo che mutino rette in cerchi. Ciò non è più vero per $n = 4$, venendosi allora ad aggiungere alle suddette le trasformazioni cremoniane determinate nel n. 6.*

Matematica (Calcolo delle probabilità). — *Considerazioni sulla legge uniforme dei grandi numeri.* Nota I (*) del Corrisp. Francesco Paolo Cantelli.

1. La legge uniforme dei grandi numeri (1) ha dato, come è noto, sviluppi a fondamentali capitoli del moderno Calcolo delle probabilità. La dimostrazione di essa è fondata, dai diversi Autori che se ne sono occupati, me compreso, sul principio esteso delle probabilità totali. Desidero precisare, in questa Nota, come l'uso di esso non sia necessario. Mi intratterrò brevemente anche sul significato di *probabilità*, per esporre chiaramente un mio antico punto di vista (1905) che viene, in sostanza, non a rigettare la definizione classica di essa, ma a dare alla *probabilità* significato soltanto fisico e non matematico.

E per la necessaria brevità mi limito a considerare, in questa Nota, il caso di un evento E di probabilità costante p in ogni prova.

2. Consideriamo un'urna con palline bianche e rosse che, praticamente, si differenziano soltanto per il colore. Sia p il rapporto tra il numero delle palline bianche e il totale delle palline; pertanto p è un numero razionale compreso

(*) Presentata nella seduta del 12 maggio 1949.

(1) F. P. Cantelli, *Sulla probabilità come limite della frequenza*. « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », serie V, vol. XXVI (gennaio 1917); Guido Castelnuovo, *Calcolo delle probabilità*, vol. I (III Ediz. Zanichelli, Bologna 1947); I. Messina, *Un teorema sulla legge uniforme dei grandi numeri*. « Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari », anno IV, n. 1, gennaio 1933. Roma.

tra 0 e 1. Rimescoliamo le palline e ne estraiamo una *a caso*. L'uomo della strada, di fronte a un tale schema fisico, giudica, anche in base alla sua esperienza, con parole più o meno imprecise, con circonlocuzioni più o meno adatte, che la *facilità* con la quale si presenterà pallina bianca è proprio misurata dal rapporto p indicato. Si potrà discutere quanto si vuole, ma questo è il fatto; ed è un fatto soggettivo, ma uno di quelli che ricevono l'unanime consenso e che, perciò, può concorrere a suggerire una teoria sulle probabilità. L'esempio considerato è uno schema fisico che porta a *postulare*, per fondare tale teoria, l'esistenza di un evento E di probabilità costante p (numero razionale) in ogni prova, e sul significato di probabilità, coincidente in sostanza con quello classico, si fa riferimento allo schema indicato, considerando la *probabilità* come idea primitiva. E così, pure, di fronte a uno schema fisico, analogo a una *roulette*, si è condotti a *postulare*, in teoria, e quindi per astrazione, l'esistenza d'un evento E di probabilità costante p in ogni prova, potendo essere p un numero razionale o irrazionale.

Postulata tale esistenza ammetterò, in questa Nota, soltanto i principî ristretti delle probabilità totali e composte, tenuto presente che anche la postulazione di essi viene, nella teoria, notoriamente suggerita dalla esperienza, limitata, ovviamente, alle nostre possibilità di osservazione, e nemmeno questo costituisce una novità, quando si pensi alla critica dei postulati posti a fondamento di ogni teoria fisica e anche matematica.

3. In questo paragrafo preciso un concetto, che pongo alla base di quanto dovrò dire. Tale concetto è notoriamente antico, ma giova precisarlo per lo studio del problema fisico-matematico di cui mi occupo in questa Nota.

Consideriamo un evento E, di probabilità costante p in ogni prova, e pensiamo a una serie di prove, eseguite *una dopo l'altra*, sullo stesso evento E. *Rifiutando di pensare* ad una *infinità attuale di prove*, limitiamoci a pensare, più semplicemente, che il numero di esse sia *comunque grande*. Si pensi, così, che venga raggiunto un numero n_1 di prove e poi, *successivamente*, che si raggiunga il numero $n_2 > n_1$ di prove e così via.

Così mentalmente operando, il numero *generico* N di prove, crescente, potrà *raggiungere* quale si voglia numero, senza che mai, ovviamente, si renda possibile di considerare una infinità attuale di prove. Con questo concetto si rinunzia ad accogliere qualsiasi convenzione, principio o postulato che obblighi a dover considerare quella infinità di prove che si rifiuta appunto di considerare. Volendo considerare la serie dei numeri naturali, si può precisare che, qualunque sia il valore che prende N, esso valore divide sempre la serie dei numeri naturali in due classi: l'una finita, dipendente dai valori che, *successivamente*, si pensano già presi da N, e che sarà quella che effettivamente considereremo in questa Nota; l'altra, infinita, che mai prenderemo in considerazione, perchè ancora *inesistente* riferendoci al valore che si pensa raggiunto da N. Per esprimere questi concetti, dirò costantemente che N rappresenta *un* numero *comunque scelto* nella serie dei numeri naturali, che, comunque si scelga N, comunque grande si prenda N, viene considerata *solo* la successione

(1) $1, 2, \cdots, N.$

Preciso ancora che con riferimento alla (1) potranno considerarsi delle proprietà $\Pi_1, \Pi_2, \cdots, \Pi_N$ le quali, comunque si scelga N, restano pur sempre in numero finito.

4. Supponiamo ora, con riferimento ai concetti illustrati, che, comunque si scelga l'intero positivo N, resti determinata, secondo una assegnata regola, la successione di numeri reali

$$(2) \qquad a_1, a_2, \cdots, a_N .$$

Si consideri, ad esempio, la successione, caso particolare di (2),

$$1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{N} .$$

Comunque si scelga N, la (2) permette solo di considerare un numero finito di termini a_i: se a N si assegna il valore n_1, si considerano soltanto i termini a_i d'indice $i \leq n_1$; se, successivamente, si assegna a N il valore $n_2 > n_1$, saranno considerati i termini a_i d'indice $i \leq n_2$ e così via.

Preciso, ora, per la dimostrazione del teorema di Calcolo delle probabilità di cui mi occupo, come si vedrà al paragrafo 6, e in armonia a quanto detto, la forma che prescelgo come definizione della tendenza ad un limite, assegnato, finito, della successione (2).

La successione (2) tende al limite p se, comunque si assegni un positivo ε, esiste un intero n_ε tale che, comunque si scelga *un* numero $N \geq n_\varepsilon$, risulti

$$(3) \qquad |a_{n_\varepsilon} - p| < \varepsilon \quad , \quad |a_{n_\varepsilon+1} - p| < \varepsilon, \cdots, |a_N - p| < \varepsilon ;$$

è certo che, comunque si scelga *un* numero N, nel *senso illustrato*, la (3) permette *solo* di considerare un numero *finito* di ineguaglianze. In base a tale definizione si dimostrano quei teoremi che potranno occorrere in questa Nota. Solo allo scopo di meglio chiarire il giuoco di N, accenno alla dimostrazione dell'unicità del limite finito p della (2). Supposto, infatti, che la (2) possa ammettere anche un limite $p' \neq p$, si perverrebbe alla conclusione che comunque si assegni un positivo ε esisterebbe un intero n'_ε tale che *comunque si scelga* $N \geq n'_\varepsilon$, dovrebbero valere le ineguaglianze $|a_N - p| < \varepsilon$, $|a_N - p'| < \varepsilon$, dalle quali seguirebbe $|p - p'| < 2\varepsilon$ e, per l'arbitrarietà di ε, $p = p'$.

Come si vede, si evita nella definizione di limite, per quanto dovrò dire in seguito, la dizione che le ineguaglianze $|a_n - p| < \varepsilon$ debbono valere *per tutti* i valori di $n > n_\varepsilon$, che implica la considerazione di una *infinità attuale* di ineguaglianze, e preciso che avrei potuto usare le dizioni comuni, secondo cui le ineguaglianze indicate debbono valere *per* $n > n_\varepsilon$, *per ogni* $n > n_\varepsilon$, *quando* $n > n_\varepsilon$, e simili, attribuendo però ad esse, *esplicitamente*, il significato precedentemente illustrato.

5. In un *predeterminato* numero n di prove da eseguire su di un evento E di probabilità costante p in ogni prova, l'evento E si presenterà con le frequenze relative $\nu_1/1, \nu_2/2, \cdots, \nu_i/i, \cdots, \nu_n/n$. I valori di queste frequenze dipendono dai

valori assunti dalle frequenze precedenti. Sarà precisamente $\nu_i = \nu_{i-1}$ se alla i^{ma} prova non si presenterà l'evento E e sarà $\nu_i = \nu_{i-1} + 1$ nel caso contrario; in altri termini le n frequenze considerate sono *dipendenti*, nel senso specificato, ed è per questa dipendenza che ho formulato, a suo tempo, la legge uniforme dei grandi numeri, nel caso particolare indicato e nel caso più generale di medie, dipendenti, di variabili causali indipendenti. Si vuole esaminare ora se possa determinarsi la probabilità che *la* successione di frequenze

$$(4) \qquad \frac{\nu_1}{1}\ ,\ \frac{\nu_2}{2}, \cdots, \frac{\nu_N}{N}\ ,$$

corrispondente alla (2), che *si presenterà* in un numero comunque grande N di prove successive, ammetta il limite assegnato p, essendo p la probabilità dell'evento E. Per brevità e semplicità, mi pongo dal punto di vista più elementare possibile e perciò tengo anche presente la successione $1, 1/2^{1/8}, \cdots, 1/N^{1/8}$ la quale, secondo la definizione del paragrafo 4, tende all'unico limite zero.

Ciò premesso, formulo il problema nei seguenti termini. Assegnato *a priori* un positivo η, si vuole esaminare se, con probabilità maggiore di $1 - \eta$, è determinabile un intero n_η tale che, per *la successione* del tipo (4) che si potrà presentare, si verifichino le ineguaglianze

$$(5) \qquad \left|\frac{\nu_{n_\eta}}{n_\eta} - p\right| < \frac{1}{n_\eta^{1/8}}\ ,\ \left|\frac{\nu_{n_\eta+1}}{n_\eta+1} - p\right| < \frac{1}{(n_\eta+1)^{1/8}}, \cdots, \left|\frac{\nu_N}{N} - p\right| < \frac{1}{N^{1/8}},$$

comunque si scelga un numero $N \geq n_\eta$ nella serie dei numeri naturali. Se ciò avverrà, è certo che si potrà asserire *a priori*, con probabilità maggiore di $1 - \eta$, che si presenterà *una* successione (4) che tenderà a p, perchè allora, *a fortiori*, con probabilità maggiore di $1 - \eta$, varranno per la (4) le ineguaglianze (3), valevoli per quale si voglia positivo ε, come sono richieste dalla esposta definizione di tendenza a un limite.

6. È notorio che nel mio lavoro [1] del 1917, riesumando un dimenticato teorema di Boole, misi in evidenza che, *a priori*, la probabilità che, a partire dalla prova di ordine n_η, si verifichino le (5), quando si assegni a N il valore n, è espressa da

$$(6) \qquad P(n_\eta, n) > 1 - \sum_{r=n_\eta}^{n} A_r \cdot r^{1/2}\ ,\quad A_r = 3\,\frac{p^2 q^2}{r^2} + \frac{pq}{r^3} - 6\,\frac{p^2 q^2}{r^3}$$

con $q = 1 - p$.

Ora si dimostra in modo diretto ed elementare, tenuto presente che il massimo valore di pq è $1/4$, che la sommatoria indicata è minore di $n_\eta^{-\frac{1}{2}}$; pertanto risulta

$$(7) \qquad P(n_\eta, n) > 1 - \frac{1}{n_\eta^{1/2}}.$$

Per ogni assegnato n, la probabilità $P(n_\eta, n)$ è determinabile ma essa è variabile (decrescente) al crescere di n, e ciò è nella stessa natura del problema; però come risulta dalla (7), questa probabilità $P(n_\eta, n)$ ammette un confine

inferiore che, con riferimento alle (5), è *indipendente* da ogni particolare valore n assegnato a N. In altri termini, la probabilità variabile delle (5), comunque si scelga N, nel senso più volte specificato, ammette il confine inferiore $1 - n_\eta^{-\frac{1}{2}}$.

Più precisamente ancora, quando si pensi ad una serie di N prove *successive* sull'evento E, di probabilità costante p in ogni prova, in cui N può assumere quale *si voglia* valore, nel senso precisato, della serie dei numeri naturali, assegnato un positivo η, piccolo a piacere, può determinarsi, *a priori*, un intero n_η tale che, con probabilità maggiore di $1 - \eta$, si verifichino le (5) e si può, cioè, asserire che con probabilità maggiore di $1 - \eta$ si presenterà *una* successione di numeri (4) che tende al limite p.

Preso, infatti, $n_\eta \geqq \eta^{-2}$, si ha, per la probabilità delle (5), il confine inferiore $1 - n_\eta^{-\frac{1}{2}} \geqq 1 - \eta$. È questo il risultato fondamentale, che si voleva ottenere, nel caso particolare di un evento E di probabilità costante p in ogni prova, evitando l'adozione del principio esteso delle probabilità totali. E il procedimento indicato può applicarsi alla legge uniforme dei grandi numeri in casi più generali, con le necessarie cautele.

Interessa dire che la indipendenza del confine inferiore della (7) dal numero delle prime m ineguaglianze (5) che seguono quella di indice n_η, e la interpretazione che tale indipendenza porti a poter considerare il risultato valido *per ogni m*, è pur stata rilevata da R. de Mises, in un interessante articolo (*Sul concetto di probabilità fondato sul limite di frequenze relative*, « Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari », 1936). Non trovo, o sconosco, però, che tale considerazione sia stata già coordinata da altri, come era necessario ad evitare evidenti obbiezioni, con una definizione di limite fondata su di un numero di prove N comunque esso venga scelto nel senso precisato, mostrando, cioè, come si possa evitare la considerazione di quella infinità di ineguaglianze, nella definizione del limite, cui viene generalmente riferita la indicata dizione *per ogni m*.

Si possono ovviamente determinare confini inferiori della probabilità, relativa alla convergenza, più elevati di quello indicato, in modo da pervenire anche a valori notevolmente più convenienti di η e n_η. E ciò facemmo io, Messina, Fréchet, Kintchine, Kolmogoroff e Lévy, con riferimento anche ai casi più generali.

7. Credo utile fare, sin da ora, alcune brevi considerazioni sulle quali ritornerò nella prossima Nota.

Pensando ad una serie di prove sull'evento E, conveniamo di scrivere la cifra 1 se si presenterà l'evento E, la cifra 0 se si presenterà l'evento contrario $\bar{E}$. In un *predeterminato* numero n di prove si presenterà *una* successione di n cifre 0 e 1, successione che possiamo considerare, adottando il sistema binario di numerazione, come costituente la mantissa di un numero razionale compreso tra 0 e 1. Nelle n prove si potrà presentare *uno* dei 2^n numeri possibili e *diversi*, compresi tra 0 e 1. La probabilità che si presenti un numero formato da ν cifre 1 e $n - \nu$ cifre 0, in un prestabilito ordine, è $p^\nu q^{n-\nu}$. I 2^n casi possibili *diversi* non sono tutti equiprobabili; diventano equiprobabili se $p = 1/2$.

Le considerazioni ora fatte permangono quando, invece di pensare a un *prestabilito* numero n di prove sull'evento E, si pensi ad *un* numero N di prove, comunque esso si scelga nella serie dei numeri naturali: saranno sempre da considerare 2^N mantisse distinte possibili e perciò, in questo senso, considerata la serie di prove sull'evento E, può ritenersi estranea la considerazione della classe dei numeri reali i quali costituiscono un insieme che ha la potenza del continuo. Se, però, si vuol considerare la classe dei numeri reali, compresi tra 0 e 1, allo scopo di metterli in relazione con i numeri che, nelle successive prove, e nello schema indicato, possono formarsi, è bene rilevare quanto segue.

Consideriamo i numeri reali, nel sistema di numerazione binaria, compresi tra 0 e 1, ritenendo come casi *diversi* le due scritture che corrispondono a uno stesso numero razionale. Nello schema di cui mi occupo ciò è opportuno fare perchè le due scritture corrispondono a casi ben distinti. Così, ad esempio, nelle prove potrà presentarsi la mantissa di N cifre $100\cdots0$ oppure la mantissa di N cifre $011\cdots1$; entrambe corrispondono alle prime N cifre con le quali comincia la mantissa del numero 1/2, espressa da $10\cdots0\cdots$ oppure da $011\cdots1\cdots$.

Le probabilità rispettive, considerando N prove, sono $p\cdot q^{N-1}$ e $q\cdot p^{N-1}$, il cui rapporto è $(q/p)^{N-2}$ e, se $q > 1/2$, tale rapporto cresce perchè N prende valori crescenti.

Si osservi, ora, che qualsiasi numero reale ha necessariamente le sue prime n cifre coincidenti con uno dei 2^n numeri distinti considerati e, viceversa, i 2^n numeri considerati forniscono le prime n cifre con cui possono cominciare *tutti* i numeri reali compresi tra 0 e 1. L'osservazione vale pure per un numero di prove N, comunque si scelga nella serie dei numeri naturali, la cui considerazione è richiesta dalla legge uniforme dei grandi numeri come qui è stata esposta, e, pertanto, è ovvio che non si può stabilire *a priori*, in via *ipotetica*, che i numeri razionali che si vanno formando al crescere di N non possano sempre più approssimarsi a *determinati* numeri reali. *A priori*, dovendo procedere a una serie di prove, sono sconosciuti i numeri reali che si potranno sempre più approssimare al crescere del numero delle prove e perciò, quando si vogliano considerare, la intera classe di essi, compresi tra 0 e 1, va presa in esame.

Astronomia (Astrofisica). — *Altezza della cromosfera nell'anno 1948 ed andamento del ciclo solare*(*). Nota(**) del Socio GIORGIO ABETTI.

I risultati medi delle osservazioni dell'altezza della cromosfera eseguite con l'equatoriale di Amici in Arcetri nell'anno 1948 come usualmente, di 30° in 30° di latitudine, sono raccolti nella seguente tabella; i dettagli delle osservazioni stesse sono dati nelle pubblicazioni dell'Osservatorio di Arcetri(1).

(*) Lavoro eseguito all'Osservatorio Astrofisico di Arcetri, Firenze.
(**) Presentata nella seduta del 12 maggio 1949.
(1) Cfr. « Osservazioni e Mem. Arcetri » e « Memorie S. A. I. » in corso di stampa.

Arcetri 1948.

Latitudine	Altezza	Latitudine	Altezza
+ 90° N	10″.2	— 90° S	10″.5
+ 60 E	10 .2	— 60 W	10 .0
+ 30 E	10 .7	— 30 W	10 .3
0 E	10 .7	0 W	10 .6
— 30 E	11 .2	+ 30 W	10 .6
— 60 E	10 .9	+ 60 W	10 .1

Da cui risulta l'altezza media per il 1948 = **10″.48** esattamente uguale a quella dell'anno precedente. Essa continua ad essere quasi costante a tutte le latitudini.

L'area totale delle protuberanze dalle osservazioni di Arcetri risulta per il 1948 di **1662** unità di protuberanza (area di 1° del bordo solare per 1″ di altezza) con una diminuzione di **233** U. P. rispetto al 1947.

Diminuzione analoga presentano i « numeri relattivi » o di « Wolf » la cui media annua fu nel 1947, secondo le osservazioni di Arcetri ridotte al sistema di Zurigo ($k = 0.77$) = 138 e nel 1948 risultò = **125**. Resta quindi confermato che il massimo dell'attività del presente ciclo ha avuto luogo attorno al maggio 1947.

Tre brillamenti di notevole intensità in luce di idrogeno (H_α) e di calcio (K_{2_3}) sono stati osservati ad Arcetri l'11 maggio nella zona di macchie australi a 5° S, 22° W in concomitanza col numero relativo giornaliero più alto di tutto l'anno (nel sistema di Zurigo = 327). In corrispondenza a tale ripresa di attività si è presentata anche una notevole attività geomagnetica dal 14 al 17 maggio. Un'altra intensa tempesta magnetica si è sviluppata sulla Terra dal 7 al 13 agosto, in corrispondenza al passaggio al meridiano di considerevoli gruppi di macchie.

Chimica. — *Risoluzione della coppia polarografica cadmio-indio* (*). Nota (**) del Corrisp. Giovanni Semerano.

Nel corso delle ricerche sull'analisi polarografica dello zinco metallico (1), era risultata l'opportunità di uno studio più dettagliato delle condizioni di deposizione dell'indio al catodo a gocce di mercurio, in vista sopratutto delle limitate conoscenze che si hanno sulla ripartizione di questo elemento nei vari prodotti naturali e

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica-Fisica dell'Università di Padova e Centro di Studio per la Polarografia del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Presentata nella seduta del 12 maggio 1949.

(1) G. Semerano e L. Mendini, « Atti Reale Ist. Veneto sci. », Pt. 2, 103, 367-76 (1944)

metallurgici a base di zinco e delle applicazioni che da qualche tempo si prospettano per l'indio metallico [2].

Dalla letteratura polarografica [3] risulta che il dosamento dell'indio può essere eseguito facilmente mediante l'elettrodo di Heyrovský.

La proporzione in cui esso si trova nei vari minerali a base di zinco (da qualche decimillesimo a qualche decimo per cento) [4] rientra nei limiti in cui è possibile e conveniente l'impiego del metodo polarografico [5].

Si presenta però l'inconveniente che questi minerali (principalmente blende), accanto alle piccole quantità di indio, contengono in percentuali ben maggiori altri elementi, come piombo, tallio e cadmio. Questi componenti, dalle comuni soluzioni di attacco dei campioni, presentano un potenziale di deposizione al catodo a gocce di mercurio che è più positivo (piombo e tallio) o addirittura coincidente con quello dell'indio (cadmio). Di conseguenza, nei diagrammi polarografici, il gradino di diffusione dell'indio risulta preceduto da quelli più alti del piombo e tallio o mascherato da quello del cadmio.

In presenza di tutti questi elementi, si può assistere perfino alla comparsa di un gradino unico a causa dell'effetto di saldatura operato dal tallio il cui gradino si sviluppa, come è noto, tra quello del piombo e quello comune dall'indio e del cadmio ed è piuttosto ampio dato il basso numero delle cariche in gioco nel relativo processo di deposizione ($Tl^+ \rightarrow Tl$).

La fig. 1 illustra questi fatti: essa riproduce un polarogramma ottenuto elettrolizzando soluzioni di questi cationi contenenti come elettrolita base cloruro di zinco concentrato (25% di zinco); si nota che, in presenza del tallio, il gradino del piombo perde il suo tetto che si trasforma in un tratto ascendente continuo collegante il gradino del piombo con quello unico dell'indio e del cadmio; si è detto, infatti, che indio e cadmio danno gradini che si fondono l'uno con l'altro e non permettono quindi il dosamento dei singoli elementi.

Se si usano soluzioni–base più concentrate di cloruro di zinco (al 50% ca. di zinco), il gradino del tallio viene spostato a potenziali intermedi tra quelli di deposizione della coppia cadmio + indio e quello di deposizione dello zinco [1]. In tal modo, il gradino del piombo risulta di nuovo isolato e perfettamente misurabile; i gradini

(2) F. ENSSLIN, «Die Chemie», *55*, 347 (1942); «Chimica e industria» (Milan) *25*, 215 (1943); F. STUBBS, «J. Tenn. Acad. Sci.» *21*, 178 (1946).

(3) G. SEMERANO, «Bibliografia Polarografica» (1922–48). Suppl. a «Ricerca sci. ricostruz.», p. 123 (1948); J. HEYROVSKÝ, «Chem. Listy», *19*, 168–74 (1925); «Bull. Soc. chim. France», *41*, 1224-41 (1927); S. TAKAGI, «J. Chem. Soc.», *1928*, 301-6; G. SEMERANO e A. DI BELLO, «Atti Accad. sci. Veneto-Trentino-Istriana», *24*, 75-83 (1933); J. TOMEŠ, «Collection Czechoslov. Chem. Communs.», *9*, 12-21 (1937); F. ENSSLIN, «Metall. u. Erz.», *38*, 305–8 (1941); A. S. NICKELSON e J. E. B. RANDLES; «Brit. Standard», *1225*, p. 36 (1945); «Ind. Eng. Chem., Anal. Ed.», *18*, 216 (1945).

(4) M. VOŘÍSKOVÁ, «Collection Czechoslov. Chem. Communs.», *11*, 580-91 (1939).

(5) J. HEYROVSKÝ, *Polarographie. Theoretische Grundlagen, praktische Ausführung und Anwendungen der Elektrolyse mit der tropfenden Quecksilberelektrode*. Wien, Springer-Verl., p. 514 e 252 fig. (1941); I. M. KOLTHOFF e J. J. LINGANE, *Polarography, Polarographic Analysis and Voltammetry, Amperometric Titration*. New York, «Interscience Publishers», p. 510 (1941).

del cadmio e dell'indio restano invece ancora troppo vicini perchè possano risultare distinti sui polarogrammi.

In vista delle ragioni sopra esposte, si è perciò cercato di stabilire un metodo che permettesse la risoluzione della coppia polarografica cadmio–indio e rendesse così possibile il dosamento polarografico dell'indio in presenza delle quantità di cadmio che si trovano comunemente nei prodotti a base di zinco.

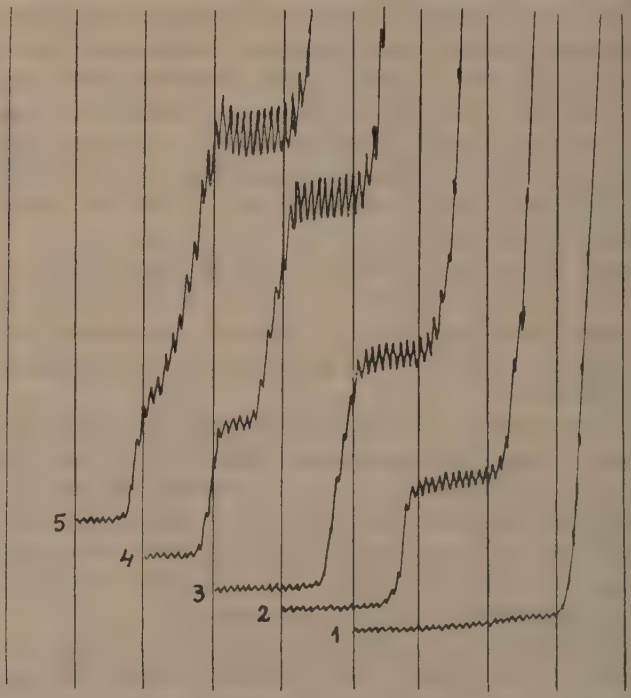


Fig. 1.

1. 5 cmc. di soluzione di $ZnCl_2$ al 25% di Zn.
2. soluzione precedente + 6 gocce di $InCl_3$ $6.4 \cdot 10^{-2}$ n.
3. » » + 3 » » $CdSO_4 \cdot 10^{-1}$ n.
4. » » + 4 » » $Pb(NO_3)_2$ $5 \cdot 10^{-2}$ n.
5. » » + 0,5 cmc. di TlCl ca. 10^{-2} n.

Già molti anni or sono, Semerano e Di Bello [3] avevano tentato questa separazione impiegando un elettrodo ad amalgama di cadmio, invece del comune mercurio, ma con risultati negativi.

In generale, i criteri che si possono seguire per il dosamento polarografico di due sostanze, che forniscono gradini praticamente coincidenti, sono i seguenti:

1° Formazione di complessi di stabilità così diversa da fare scomparire dai polarogrammi il gradino di una delle sostanze o, per lo meno, da spostarlo verso potenziali tanto differenti da rendere possibile il riconoscimento e la misura del gradino dell'altro componente.

2° Precipitazione di una delle sostanze, allo stato, ad esempio, di idrato insolubile, e conseguente separazione dal componente che rimane in soluzione e che può quindi essere dosato nel filtrato o nel centrifugato.

3° Precipitazione preliminare delle sostanze che interessano e loro successiva soluzione in adatto solvente–base.

4° Soppressione del gradino che disturba mediante preventiva riduzione od ossidazione per via chimica del relativo componente, senza che esso venga eliminato dalla soluzione (caso dell'eccesso di ferro reso innocuo fino a $-1{,}2$ V. ca. mediante riduzione con cloridrato di idrossilamina).

L'esame della letteratura polarografica e la considerazione del comportamento chimico dei due elementi cadmio e indio hanno consigliato il secondo dei procedimenti accennati come quello più indicato nel caso presente, specialmente quando si abbia da fare con la contemporanea presenza di notevolissime quantità di zinco.

L'aggiunta infatti di uno qualsiasi dei reattivi di separazione usati di solito in polarografia (ammoniaca + cloruro ammonico, cianuro di potassio, tartrato o citrato alcalino) avrebbe dovuto essere piuttosto notevole, con la conseguente diluizione della soluzione a base di zinco e quindi diminuzione della sensibilità del metodo, ritorno dell'inconveniente provocato dalla presenza del tallio e ciò senza conseguire in molti casi la desiderata separazione cadmio–indio.

Per quanto si riferisce alla soluzione base tipo Vořísková [4], così spesso usata nell'analisi polarografica dei materiali a base di zinco [5], era da tenere presente che parecchi Autori [6] hanno trovato l'idrato di indio notevolmente solubile in ammoniaca concentrata.

Si è quindi esaminato se un metodo basato sulla diversità del p_H a cui gli idrati del cadmio e dell'indio precipitano da una soluzione, metodo che è utilizzato anche industrialmente [2], sempre allo scopo di isolare l'indio dai materiali a base di zinco, potesse permettere la risoluzione del problema polarografico in modo soddisfacente.

Questo metodo di separazione si fonda sul fatto che l'indio precipita come idrato già in soluzione nettamente acida ($p_H \approx 3{,}42$) [7], mentre il cadmio precipita soltanto ad un p_H di circa $6{,}7 \div 7{,}3$ [8].

Per realizzare un'acidità sufficientemente moderata per la precipitazione completa dell'idrato di indio, ma sempre troppo alta per la separazione dell'idrato di cadmio, si è aggiunto alla soluzione base di cloruro di zinco, risultante dall'attacco del campione e opportunamente svaporata, una piccola quantità di ossido di zinco [9].

Il p_H della soluzione passa così da un valore di $1 \div 2$ a un valore di circa $5{,}5 - 5{,}8$ [8] e l'indio precipita completamente, mentre il cadmio, contemporaneamente presente, resta tutto in soluzione.

(6) A. THIEL e H. KOELSCH, « Z. anorg. Chem. », *66*, 300 (1910); L. RENZ, « Ber. », *36*, 1848 2754 (1903).

(7) T. MOELLER, « J. Am. Chem. Soc. », *63*, 2625 (1941).

(8) H. T. S. BRITTON, « J. Chem. Soc. London », *127*, 2148 (1925).

(9) Con il metodo più sopra ricordato (2) si separa l'indio dallo zinco mediante calce (precipitano indio, ferro e, se il grado di ossidazione è adatto, anche il manganese).

Dopo separazione e lavaggio per centrifugazione, la miscela degli idrati di zinco e indio separatisi è stata sciolta in acido cloridrico in modo da avere una soluzione concentrata a base di cloruro di zinco e si è dosata in questa direttamente, per via polarografica o polarometrica, la totalità dell'indio contenuto nel campione originale.

Prove preliminari hanno consigliato di usare come soluzione base per il dosamento dell'indio una soluzione di cloruro di zinco contenente il 25% in peso di metallo. Questa soluzione si può ottenere facilmente partendo dai materiali stessi che si debbono analizzare, fornisce ottimi gradini per l'indio e permette di realizzare una elevata concentrazione degli elementi da dosare, e quindi un'alta sensibilità del metodo, senza presentare la notevole viscosità e gli effetti deprimenti sull'altezza dei gradini che sono propri della soluzione al 50% di zinco usata in misure precedenti [1].

Si è fatto ricorso invece alla soluzione più concentrata quando si trattava di eliminare gli inconvenienti già lamentati dovuti al tallio presente nei campioni.

Dalla soluzione di $ZnCl_2$ al 25% di metallo, preparata facilmente sciogliendo zinco metallico molto puro in HCl 7.3 n., ottenuto per distillazione a pressione ridotta di acido già puro, i potenziali relativi di deposizione dei quattro elementi che interessavano sono risultati i seguenti:

Pb^{2+}	P. R. = — 0,468 V.	(potenziale di gomito)
Tl^{+}	» = — 0,555 V.	» » »
In^{3+}	» = — 0,621 V.	» » »
Cd^{2+}	» = — 0,658 V.	» » »

Il polarogramma della fig. 2 illustra, riassumendoli, le esperienze e i risultati ottenuti in numerose prove eseguite allo scopo di stabilire le reali possibilità del metodo di separazione proposto dell'indio dal cadmio.

Da esso e da altri diagrammi analoghi sono risultati i fatti seguenti:

1° Piccole quantità di ossido di zinco, non arroventato di fresco, precipitano completamente l'indio da soluzioni debolmente o moderatamente acide, ma riducono anche in notevole misura il gradino del cadmio.

2° Ossido di zinco, arroventato e conservato al riparo dall'anidride carbonica, lascia immutata l'altezza del gradino del cadmio, ma non precipita l'indio o lo precipita solo parzialmente.

3° La desiderata separazione si realizza sbattendo energicamente e per qualche tempo (circa 1 ora) la soluzione in esame con l'ossido di zinco esente da carbonato.

4° La dissoluzione in HCl di questo ossido, in modo da ottenere una soluzione di indio e zinco di concentrazione identica a quella della soluzione di partenza, ripristina esattamente il gradino dell'indio.

5° L'analoga dissoluzione dell'ossido di zinco sbattuto con una soluzione contenente soltanto cadmio e non indio fornisce una curva polarografica identica a quella della soluzione base pura (curva 1 della fig. 2).

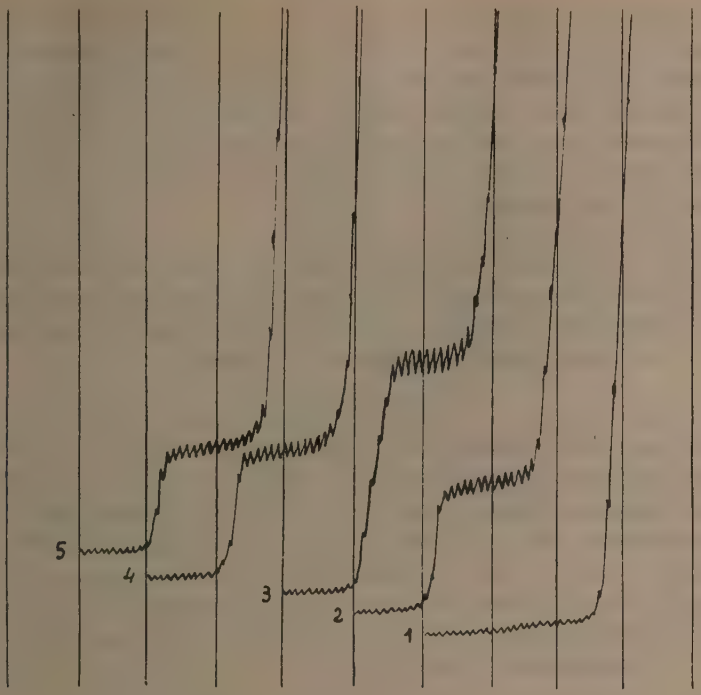


Fig. 2.

Curva 1: 5 cmc. di soluzione di $ZnCl_2$ al 25% di Zn.
» 2: Soluzione precedente + 3 gocce $CdSO_4$ 0,1 *n*.
» 3: » » + 6 » $InCl_3$ $6{,}4 \cdot 10^{-2}$ *n*.
» 4: » » dopo sbattimento per 1 ora con ZnO e centrifugazione.
» 5: Soluzione del residuo di ZnO in HCl 7,3 *n*.

In base a questi risultati si può indicare il seguente procedimento per la determinazione di cadmio, indio e tallio in materiali a base di zinco:

1° Attacco del campione e trasformazione del liquido risultante in una soluzione a base di $ZnCl_2$ al 25% di metallo, senza svaporare tutto l'acido in eccesso presente.

2° Esame polarografico e determinazione del gradino totale Tl + In + Cd.

3° Svaporamento a secco di una parte della soluzione, fusione del cloruro di zinco residuo sino ad elimitazione di tutto l'acido in eccesso, eventualmente con le modalità pratiche indicate da Hohn [10].

4° Ripresa del residuo con acqua in modo da ottenere una soluzione base di $ZnCl_2$ al 50% di metallo e rilevamento distinto dei gradini In + Cd e Tl.

5° Calcolo della percentuale del tallio e sottrazione della parte spettante a questo elemento sul gradino globale Tl + In + Cd trovato con la soluzione al 25% di Zn; a questo scopo saranno stati rilevati diagrammi di taratura del tallio per le due soluzioni base di $ZnCl_2$ aventi diversa concentrazione.

(10) H. HOHN, «Chem. Ztg.», *62*, 77-81 (1938).

6° Energico sbattimento per un'ora di un'altra aliquota della soluzione al 25 % di Zn con piccole quantità di ZnO arroventato esente da carbonato, calcolo della percentuale del cadmio dall'altezza del gradino residuo ed eventuale confronto di esso con quello del tallio, in seguito a trattamento come sotto 4 e 5 della soluzione separata per centrifugazione dall'ossido di zinco.

7° Dissoluzione dell'ossido di zinco in HCl ed esame del liquido risultante per l'indio in esso contenuto.

A conclusione di queste ricerche sulla coppia In + Cd, si crede utile istituire un confronto fra le altezze dei gradini forniti da soluzioni equimolecolari dei due elementi; questo confronto permette di valutare il coefficente di diffusione e la mobilità dello ione In^{3+} tuttora sconosciuti. Come è noto, l'equazione di Ilkovič, per le correnti polarografiche di diffusione, si scrive:

$$\bar{i}_d = kn\, D^{1/2}\, C\, m^{2/3}\, t^{1/6}$$

nella quale $\bar{i}_d$ è il valore della corrente limite, k una costante nelle ordinarie condizioni sperimentali, n il numero delle cariche in gioco nel processo che si compie all'elettrodo, D il coefficente di diffusione della sostanza interessata, C la sua concentrazione nella soluzione, m la velocità di efflusso del mercurio dal capillare e t il periodo di gocciolamento di quest'ultimo.

Per la stessa soluzione e identiche condizioni sperimentali (k, C, m e t identici), si possono dunque ricavare per i due cationi Cd^{2+} e In^{3+} le seguenti equazioni da confrontare tra loro:

$$\bar{i}_{d_{Cd}} = k'\, n_{Cd}\, D_{Cd}^{1/2} \qquad \bar{i}_{d_{In}} = k'\, n_{In}\, D_{In}^{1/2}$$

dalle quali:

$$D_{In}^{25^\circ} = \left(\frac{\bar{i}_{d_{In}}}{\bar{i}_{d_{Cd}}}\right)^2 \cdot \left(\frac{n_{Cd}}{n_{In}}\right)^2 \cdot D_{Cd}^{25^\circ} = \left(\frac{\bar{i}_{d_{In}}}{\bar{i}_{d_{Cd}}}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 0.72 \cdot 10^{-5}\ cm^2\ sec^{-1}$$

dato che la riduzione conduce in entrambi i casi alla formazione di amalgama.

La seguente tabella ricavata da dati pubblicati nel 1933 [3], relativi a soluzioni diluite di cloruro alcalino, e da quelli ottenuti in questo lavoro, permette di dedurre con buona approssimazione i coefficenti cercati [11].

Soluzione base	(mole/litro)		$\bar{i}_d$ (mA/mmole/l.)		$\frac{\bar{i}_{d_{In}}}{\bar{i}_{d_{Cd}}}$
	$[In^{3+}]$	$[Cd^{2+}]$	In^{3+}	Cd^{2+}	
$NaCl \cdot 10^{-1}\ n$	0,68	0,2 ÷ 3,0	6,5	5,0	1,29
$ZnCl_2$ al 25% di Zn	1,7	7,0	(5,1)*	(4,0)*	1,26
				media . . .	1,28

(*) Valori approssimativi, ma in esatto rapporto tra loro; rendendo la soluzione $10^{-1}\ n$ in HCl, il gradino dell'indio aumenta del 6,8 %.

(11) Nel calcolo si è rinunciato di proposito alla considerazione dell'effetto esercitato dalla forza ionica dal mezzo, a causa delle insufficenze della teoria in questa particolare questione.

Si ha perciò:

$$D_{In}^{25^\circ} = \left(1.28\,\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 0{,}72 = 0{,}52\ cm^2 \cdot sec^{-1}.$$

Dal valore di D si ricava per la mobilità ionica corrispondente, in base alla nota relazione [5]:

$$\lambda = \frac{z F^2}{RT} D \quad , \quad \lambda_{oIn}^{25^\circ} = 58\ ohm^{-1}\ cm^2 \cdot equiv^{-1}.$$

Geologia. — *Rapporti fra colate laviche e coperture di tufi in una zona meridionale del sistema dei porfidi atesini (altopiano di Piné).* Nota [*] del Corrisp. CIRO ANDREATTA.

È noto come la massa dei porfidi quarziferi e dei loro tufi del Trentino e dell'Alto Adige costituisca una delle più importanti formazioni geologiche delle Alpi orientali ed uno dei maggiori complessi effusivi acidi dell'intera Europa. Malgrado questa imponenza di apparato i porfidi quarziferi atesini sono stati studiati molto limitatamente e spesso solo con un insufficiente criterio stratigrafico.

Quasi tutti gli Autori del secolo scorso che hanno trattato di queste rocce lo hanno fatto nel quadro di una più vasta descrizione, in genere dedicando loro poche sommarie notizie sulla giacitura. Di tale tipo sono le trattazioni contenute nei vecchi lavori di Richthofen, di Suess, di Tschermak, di Stache, di Fuchs, di Mojsisovics, di Teller e John, di Rothpletz, di Blaas; solo Gredler nel 1895 pubblicava uno studio dedicato ai porfidi, ma in esso era contenuta una descrizione elementare e insufficiente di alcune rocce dei dintorni di Bolzano.

I lavori comparsi nel secolo attuale non sono più esaurienti dei vecchi, anche se sono abbastanza numerosi gli Autori che hanno dedicato qualche trattazione all'argomento. Dato il carattere di breve Nota della mia esposizione, non ritengo opportuno tracciare un quadro sia pur sintetico sugli studi precedenti; mi limiterò a ricordare alcuni Autori che hanno portato nuovi dati o nuove idee sopra la geologia del complesso stesso. Nel 1904, in una breve Nota, Trener [1] espose le sue vedute sopra la possibilità di distinzione in 3 serie stratigrafiche del complesso dei porfidi della catena del Lagorai. Nel 1909 Wolff [2] pubblicò un lavoro abbastanza grosso sopra i porfidi dei dintorni di Bolzano, preceduto da due Note brevi preliminari. Nel 1923 il Klebelsberg studiava la regione a porfidi e loro tufi compresa fra la Valle Sarentino e la Valle dell'Isarco [3] mettendo in rilievo le frequenti alternanze di lave e di tufi.

(*) Presentata nella seduta del 12 maggio 1949.

(1) G. B. TRENER, *Ueber die Gliederung der Quarzporphyrtafel im Lagorai-Gebirge.* « Verh. d. k. k. geol. Reichsanst. », Wien, pp. 390-393 (1904).

(2) F. v. WOLFF, *Beiträge zur Petrographie und Geologie des Bozener Quarzporphyrs.* « N. J. f. Min. Geol. Pal. », XXVII B. B., pp. 72-156, Stuttgart, 1909. A questo lavoro si rimanda per la bibliografia del secolo scorso relativa agli Autori sopra citati.

(3) R. KLEBELSBERG, *Zur Geologie der Porphyrplatte zwischen Eisak- und Sarntal.* « Verh. d. Geol. Bundesanstalt », 1923, pp. 49-59, Wien 1923.

Da ricordare è pure la Nota del 1930 di Martelli [4] sopra il porfido della Val d'Ega: lavoro esclusivamente petrografico nella parte originale e dedicato principalmente ad un'analisi chimica. Pure del 1930 è la Memoria di Vardabasso [5] sul bacino dell'Avisio, che tratta brevemente della geologia dei porfidi di quella vallata, ammettendo la possibilità di distinzione di 4 fasi di attività eruttiva con emissioni di lave e di tufi. Altri Autori si sono occupati recentemente della piattaforma di porfidi nel quadro di più vaste trattazioni oppure di rilevamenti o di problemi tettonici delle zone che comprendono i porfidi. Ricordando solo alcuni lavori, citerò le Note di Vardabasso [6] che trattano di alcune linee di dislocazione della massa di porfidi nella sua parte centrale, e le carte geologiche al 100.000 foglio « Trento » con relative note illustrative e fogli « M. Marmolada » e « Feltre », comparse rispettivamente nel 1929 [7] nel 1930 e nel 1943 [8].

Da questi cenni brevi ed incompleti si può agevolmente dedurre che gli studi sopra il grande complesso dei porfidi quarziferi atesini si sono limitati finora ad affrontare solo qualche aspetto dei problemi geologici che riguardano il sistema eruttivo. Così nell'ambito della conoscenza petrografica si sono studiati solo alcuni tipi di limitate zone: le poche trattazioni petrografiche si sono arrestate ad elementari descrizioni microscopiche, mentre la composizione chimica delle rocce è stata quasi completamente trascurata. Basti pensare che, oltre all'analisi recente di Martelli [9] del porfido di Val d'Ega, esistono solo poche analisi di vecchi analisti, comprese entro lavori geologici o analitici di carattere generale e riportate dal Klebelsberg [10] e dal Wolff [11]. Gli studi microscopici di Wolff e di Martelli, gli unici degni di essere ricordati, si esauriscono in una descrizione di campioni, senza una ricerca di sintesi petrografica e senza un'indicazione cartografica dell'estensione dei tipi studiati.

Per queste ragioni, uno fra i più importanti problemi che si devono risolvere per interpretare il processo eruttivo che diede origine alla massa dei porfidi e dei loro tufi, la differenziazione magmatica, è stato completamente trascurato, per non dire ignorato.

Per quanto riguarda la stratigrafia, la posizione geologica e la distinzione fra tufi e lave e fra le varie colate laviche, se si eccettuano la determinazione dell'età, della posizione geologica e dell'estensione del fenomeno vulcanico, finora gli studi

(4) A. Martelli, *Sul porfido quarzifero della Val d'Ega.* « Periodico di Mineralogia », I, pp. 193-200, Roma, 1930.

(5) S. Vardabasso, *Studio geo-idrografico del Bacino dell'Avisio.* Magistrato alle Acque, Venezia, 1930, pp. 98 e tavole.

(6) S. Vardabasso, *Sulla tettonica della piattaforma porfirica atesina fra Bolzano e Trento.* « Atti Acc. Sc. Ven. Tr.-Istr. », vol. XVI, pp. 51-60, Padova 1926; *La linea della Vallarsa (Brautental).* « Atti Acc. Sc. Ven.-Tr.-Istr. », vol. XIX, pp. 36-42, Padova 1929.

(7) *Carta Geologica delle Tre Venezie, foglio « Trento »*, Venezia 1929; *Note illustrative* dello stesso foglio, Padova, 1933.

(8) *Carta Geologica delle Tre Venezie, foglio « M. Marmolada »*, Venezia 1930; idem, *foglio « Feltre »*, Venezia 1943.

(9) Martelli, op. cit.

(10) R. Klebelsberg, *Geologie von Tirol.* Gebr. Borntraeger, Berlin, 1935.

(11) Wolff, op. cit.

sono riusciti solo ad abbozzare tentativi di ricostruzione di fasi eruttive e a tracciare schemi più o meno parziali, che in gran parte sono poco o nulla accettabili.

Cosicchè le nostre attuali conoscenze si arrestano alle seguenti poche e brevi notizie:

1. il complesso è formato da porfidi, da loro tufi, da conglomerati e da arenarie, raramente distinti cartograficamente, benchè l'estensione del complesso sia stata ben determinata;

2. l'età delle manifestazioni è permiana;

3. i porfidi sono stati distinti dai vari Autori in colate diverse, o tipi diversi o serie diverse, spesso confondendo tufi con rocce eruttive.

Come si vede, per poter affrontare e risolvere il problema dei porfidi quarziferi atesini è necessario un vasto studio geologico e petrografico su tutta la massa, particolarmente nelle zone marginali, nelle quali più facile è l'identificazione di singole separate manifestazioni e di successioni stratigrafiche.

Allo scopo di portare un contributo alla risoluzione dei numerosi problemi geologico-petrografici del complesso dei porfidi quarziferi atesini, iniziai delle ricerche sul terreno già nel 1927, contemporaneamente alla revisione del rilevamento geologico della catena di Lagorai. Risultato dello studio di una roccia filoniana compresa nei porfidi della zona dei Laghi d'Aje è una breve Nota del 1928 [12], avente puro carattere petrografico. A varie riprese, negli anni successivi, percorsi diverse zone del complesso dei porfidi, fra le quali: la regione del M. Luco, varie zone della lunga fascia di porfidi e tufi che si estende da Lana a Nalles, Appiano e Caldaro, la catena del Lagorai, la zona compresa fra la Val Sarentino e l'Adige e altre ancora.

Del materiale abbondantissimo così raccolto iniziai presto lo studio di laboratorio, eseguendo studi microscopici e ben 12 analisi chimiche, che rimasero tutti da pubblicare per varie ragioni.

Negli ultimi anni la mia attenzione fu attratta dalle estreme propaggini meridionali della grande piattaforma porfirica, perchè queste parti risultavano poco studiate o addirittura sconosciute. In particolare mi dedicai allo studio geologico ed al rilevamento dettagliato del sistema basale dei porfidi nell'altopiano di Piné e sto estendendo tale studio alla zona della Val del Fersina.

Nella presente Nota riferisco qualche risultato delle mie osservazioni sopra le serie di base della piattaforma di porfidi, che costituiscono la parte più meridionale dell'altopiano di Piné, attorno a Montagnaga e verso oriente. Questa zona, secondo la carta geologica 1 : 100.000, foglio « Trento », fu rilevata da Trener e risulterebbe costituita da « Porfido di Calamento, Porfidi basici e porfiriti delle colate basali, loro tufi e conglomerati (Cembra, Civezzano) ». Nelle note illustrative dello stesso foglio geologico è specificato che « formando il porfido di Calamento la colata più antica (e quindi di base) esso affiora in grandi masse lungo

(12) C. ANDREATTA, *Di un'interessante roccia filoniana dei Laghi d'Aje nel Lagorai (Trentino)*. « Studi Trent. Sc. Nat. », IX, pp. 173-184, Trento 1928.

l'orlo della piattaforma o tavolato e precisamente lungo l'orlo meridionale, che è quello rialzato ».

L'indicazione della carta geologica, che comprende tutti quanti i prodotti delle manifestazioni eruttive (porfidi, porfiriti, tufi, conglomerati) in un'unica tinta, è in contrasto con la indicazione separata dei « dicchi di porfiriti del sistema eruttivo porfirico » che sono segnati nella carta a nord di Nogarè ed a Viarago, e dei « filoni di porfiriti verdi nei porfidi di Calamento ». Ed è pure in contrasto con la separata segnatura di conglomerati, tufi, arenarie.

Le mie osservazioni mi hanno permesso di stabilire che nella parte meridionale dell'altopiano di Piné la massa dei cosiddetti « porfidi di Calamento » è in realtà costituita in assoluta prevalenza da alternanze di tufi e di porfiriti. Solo in qualche zona molto limitata affiorano rocce che pare si possano attribuire a schietti porfidi quarziferi: presso la chiesa di S. Caterina, nel burrone del torrente a N.-E. di Nogaré e in due punti del solco vallivo del Rio Negro, a est della chiesa di Montagnaga sul fianco destro e ad est del Vald sul fianco sinistro. Tranne l'affioramento del burrone di Nogaré, gli altri sono limitati a chiazze di pochi metri quadrati. Si deve però notare che tali rocce porfiriche non sono da attribuire con assoluta sicurezza a vere lave. Le loro limitatissime masse, la difficoltà di osservarne con precisione la giacitura, la struttura microscopica di molti tufi veri che assomiglia stranamente a quella di una lava, non permettono una definitiva classificazione senza approfondito studio.

Prescindendo da questi limitati e non sicuri affioramenti di porfidi quarziferi, la massa dei cosiddetti « porfidi di Calamento » nella parte meridionale dell'altopiano di Piné, risulta costituita da colate di lave porfiritiche alternate con banchi di tufi di vario tipo, con la presenza anche di conglomerati di origine alluvionale e di filoni successivi.

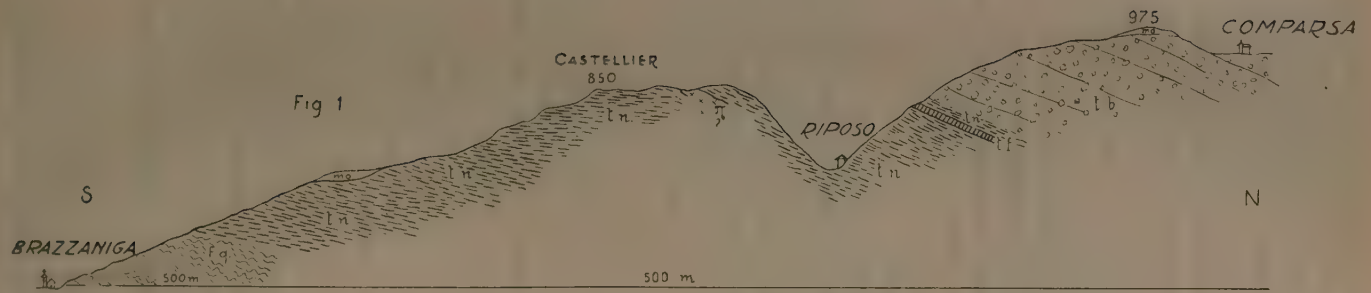
La serie stratigrafica e le relazioni di giacitura fra i diversi termini componenti il complesso dei porfidi è ben lontana dall'essere costante ed uniforme, come si potrebbe dedurre dalla sistematica proposta da Trener.

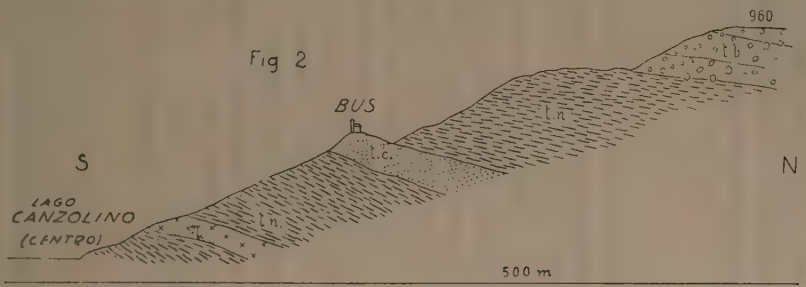
Al margine meridionale dell'altopiano, lungo la scarpata che degrada verso la conca di Pergine, si possono identificare diverse successioni di manifestazioni eruttive. Come esempio di queste diversità valgano le descrizioni delle tre seguenti sezioni, nelle quali i tufi sono semplicemente indicati coi nomi che ho loro assegnato. In una Nota successiva darò una breve descrizione geologica di questi tufi.

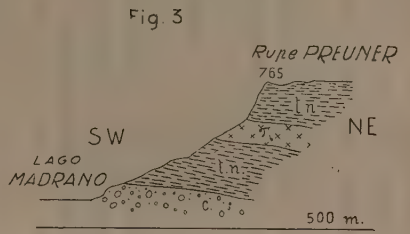
Sezione Brazzaniga-Castelleer–Riposo-Comparsa. – Nella fig. 1 è rappresentata questa sezione che si svolge secondo una linea spezzata passante per i punti indicati. Sopra le filladi quarzifere, aventi piani di scistosità quasi orizzontali, giace una notevole massa di tufi normali, che formano tutto il Casteller, mentre non esiste il cosiddetto « Verrucano », conglomerato di base, che il Trener segna nel suo rilevamento (13).

In un lieve avvallamento della parte settentrionale del pianoro dello stesso Casteller si nota un piccolo affioramento di porfirite che non si capisce se forma

(13) *Carta Geologica, foglio « Trento »*, op. cit.







FILLADI QUARZ. — CONGLOMER. — TUFI NORM. — TUFI FINI — TUFI CAOLIN. — TUFI A BOMBE — PORFIRITI

SCALA 1:12.500

Sezioni attraverso la scarpata meridionale dell'altopiano di Pinè.

Avvertenze. – Le quote segnate sono quelle delle tavolette dell'I. G. M. Nella prima sezione sono presenti due piccole placche di depositi morenici (*mo*).

un filone oppure una colata limitata, interstratificata nei tufi. In base ai caratteri petrografici della porfirite, che mi pare analoga alla roccia che forma distinte colate nella parte meridionale dell'altopiano di Piné, sono propenso ad attribuire alla porfirite del Casteller un'analoga giacitura in colata. In tal caso essa è da collegare con l'affioramento della stessa roccia che compare alla base settentrionale del Casteller, poco sopra la strada per Serso. Non è però escluso che possa trattarsi di un filone o addirittura di un grosso blocco compreso entro i tufi.

I tufi normali sono molto compatti e risultano particolarmente duri nella parte settentrionale del Casteller, verso la valle del Rio Negro; tuttavia è visibile in essi quasi sempre una distinta stratificazione, orizzontale sul pianoro culminante del Casteller, pendente di 10–20° verso N–W negli altri punti. In genere presentano una grana media, direi psammitica, e tessitura detritica identificabile in particolare al microscopio; frequenti in questo fondo psammitico fondamentale sono numerosi inclusi di vario tipo e di varia dimensione che descriverò brevemente dal punto di vista geologico in una Nota successiva.

Poco sopra il Riposo, verso la Comparsa, entro questi tufi normali si trova una intercalazione poco potente di un tufo grigio a grana finissima (v. fig. 1).

Segue infine, nella parte più alta della serie considerata nella sezione, una notevole massa di tufi particolari, formati da bombe vulcaniche di grandezza variabile, cementate da un fondo psammitico. Le bombe sono formate tutte dal medesimo tipo di roccia ed il cemento pare costituito dai più fini detriti della stessa lava.

Sezione Lago di Canzolino-Bus–Rentel. – La fig. 2 mostra una sezione tracciata lungo una linea formata da due tratti retti: Lago di Canzolino–chiesa di Bus e chiesa di Bus-colle di q. 960 fra Rentel e Puel. I tufi normali affiorano poco sopra il lago, mancando od essendo nascosto dal quaternario un eventuale conglomerato di base. Anche qui la potenza del tufo normale è notevole e nella massa si può distinguere una stratificazione con piani aventi direzione N 30 E e inclinazione debole verso N 60 W. La roccia è sempre molto compatta e si confonde facilmente, all'aspetto esteriore, con porfidi quarziferi.

Una colata di porfirite si nota intercalata in concordanza nei tufi, colata che si può seguire lungo la scarpata fino poco a W del Riposo.

Caratteristico è il tufo chiaro, biancastro, che forma un banco pure concordante entro i tufi normali in corrispondenza del paese di Bus. Si tratta di un tufo minuto, contenente però anche detriti maggiori, fortemente caolinizzato e impregnato di granulazioni di cristalli cubici di pirite, da parte di un convoglio idrotermale di bassa temperatura.

Nella parte più alta della serie, anche in questa sezione si ripresentano i caratteristici tufi a bombe.

Sezione Lago di Madrano-Rupe del Preuner. – Questa sezione, rappresentata nella fig. 3, è tracciata secondo una retta che dal centro circa del laghetto si dirige lungo la ripida scarpata fino alla sommità della rupe. La parte basale

della serie è qui data veramente da conglomerati nei quali i ciottoli si dimostrano sicuramente arrotondati dall'azione di un corso d'acqua. Lo spessore dello strato di conglomerato è limitato a qualche decina di metri; sopra si estende la massa dei tufi normali, avente le stesse caratteristiche di compattezza e di stratificazione descritte per le sezioni precedenti.

A circa metà della scarpata della Rupe del Preuner, si nota una netta intercalazione di lava porfiritica in una vera colata concordante con la stratificazione dei tufi. Anche questa colata è ben visibile a distanza per largo tratto della parete rocciosa che sta sopra al lago di Madrano.

Talassobiologia. — *Minore prodotto delle tonnare della Sicilia orientale nell'ultimo quinquennio e problemi relativi.* Nota(*) del Socio ACHILLE RUSSO.

Il diminuito prodotto delle tonnare nella Sicilia orientale, come risulta dai dati raccolti, fa nascere problemi biologici e di pratica utilità, che acquistano maggiore rilievo ove si consideri che lo stesso fenomeno fu constatato nelle tonnare del continente e delle isole, secondo notizie pubblicate dal *Ministero dell'Agricoltura* (1). Nei Compartimenti di Messina e di Siracusa tale diminuzione era già manifesta da alcuni anni, ma oggi è notevolmente accentuata non ostante la chiusura di alcune tonnare avesse fatto prevedere un aumento compensativo in quelle rimaste in funzione.

Per una migliore valutazione del numero dei tonni catturati in ciascun anno, tutto il prodotto fu raggruppato in due periodi quinquennali: uno precedente al 1943, nel quale tutte le tonnare della Sicilia orientale furono inattive per ragioni belliche, ed uno susseguente, nel quale si ebbe la ripresa dell'industria (2). Da tali aggruppamenti risultò che, nel Compartimento di Messina, la tonnara *Tono*, nel quinquennio 1938–42, catturò 7014 tonni ed in quello 1944–48, 1861; la tonnara *Oliveri* 3688 e 2217; la *S. Giorgio* 1385 e 995, e che analoghi risultati si ebbero nel Compartimento di Siracusa.

Oltre al numero dei tonni furono raccolti anche i dati sul loro peso nei due quinquenni, risultando che la tonnara *Tono* nel 1938–42 produsse 9056 quintali e 1937 nel 1944–48, la tonnara *Oliveri* rispettivamente quintali 4730 e 2288, la *S. Giorgio* 2526 e 1050.

Dal rapporto tra le pesate ed il numero dei tonni in ciascuno degli anni dei due quinquenni, è risultato inoltre che il peso medio nel periodo 1938–42 è stato di oltre 100 kg. e che nel periodo 1944-48 si è ridotto a minore proporzione, non tanto però quanto è segnato, per la campagna 1948, in alcune tonnare italiane del Continente e delle isole, nelle quali si raccolsero tonni di poco più di 10 kg.,

(*) Presentata nella seduta del 12 maggio 1949.

(1) « Bollettino di Pesca », pubblicazione del Ministero dell'Agricoltura e Foreste, nn. 1 2, Roma, 1949.

(2) A. Russo, *Prodotto delle Tonnare della Sicilia Orientale nell'ultimo decennio e sua diminuzione nel dopoguerra.* « Rendiconti Accad. Lincei », Roma, 1946.

come in quella di Camogli nel Compartimento di Genova e nelle due tonnare del Compartimento di Portoferraio (3).

Prodotto delle tonnare nel Circondario marittimo di Milazzo

(Giurisdizione marittima di Messina).

Nome della tonnara	Località	Numero di tonni catturati dal 1938 al 1948.										
		1938	*1939*	*1940*	*1941*	*1942*	*1943*	*1944*	*1945*	*1946*	*1947*	*1948*
Tono (*a*)	Milazzo	850	930	1.011	1.980	2.243	*d*	329	747	262	326	197
S. Lucia (*a*)	S. Filippo del Mela	190	*c*	113	*c*	*c*	*d*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*
Vaccarella (*b*)	Milazzo	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*d*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*
Pepe (*b*)	»	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*d*	*c*	*c*	*c*	*c*	
S. Antonino (*a*)	»	*c*	*c*	*c*	15	*c*	*d*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*
Calderà (*a*)	Barcellona Pozzo di Gotto	*c*	*c*	15	*c*	*c*	*d*	*c*	40	*c*	*c*	*c*
Salicà (*a*)	Furnari	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*d*	*c*	2	*c*	*c*	
Oliveri (*a*)	Oliveri	1.106	366	477	547	1.172	*d*	838	174	445	275	485
S. Giorgio (*a*)	Gioiosa marea	570	260	483	257	385	*d*	244	164	288	77	182

(*a*) Tonnara.
(*b*) Tonnarella.
(*c*) Non calata per poco rendimento.
(*d*) Non calata per azioni belliche.

Prodotto delle tonnare nella Giurisdizione marittima di Siracusa.

Nome della tonnara	Località	Numero di tonni catturati dal 1938 al 1948.										
		1938	*1939*	*1940*	*1941*	*1942*	*1943*	*1944*	*1945*	*1946*	*1947*	*1948*
Marzameni	Marzameni	215	102	835	143	622	*b*	154	281	372	112	77
S. Panagia	S. Panagia	502	404	227	74	120	*b*	86	107	200	39	70
Avola	Avola	532	362	1 543	*a*	*a*	*b*	421	224	589	302	49
Capo Passero grande e piccola	Capo Passero	447	247	771	*a*	*a*	*b*	82	110	144	190	174
Torrauzza	Torrauzza	94	68	102	*a*	*a*	*b*	39	59	120	50	34
Bafuto	Bafuto	304	66	462	*a*	*a*	*b*	111	*c*	*c*	*c*	*c*

(*a*) Distrutti i Registri per azioni belliche.
(*b*) Non calate per azioni belliche.
(*c*) Non calate per poco rendimento.

(3) « Bollettino di Pesca », avanti citato.

Numero di tonni catturati nel basso Tirreno e nel Jonio nel 1948 distinto per settimana.

Fasi lunari	Per 2 settimane	Pesca con luce	Totale tonni nel Plen. e nel Novil.
	Basso Tirreno (Pizzo, Tono, Oliveri, S. Giorgio)		
Plenilunio	dal 15 maggio 1948 al 28 maggio 1948	—	888
Novilunio	dal 29 maggio » al 13 giugno »	+	1.713
	Jonio (S. Panagia, Torrauzza, Avola, Capo Passero gr. e pic., Marzameni)		
Plenilunio	dal 17 maggio 1948 al 28 maggio 1948	—	21
Novilunio	dal 29 maggio » al 13 giugno »	+	37
Plenilunio	dal 14 giugno » al 27 giugno »	—	45
Novilunio	dal 28 giugno » all'11 luglio »	+	72
Plenilunio	dal 12 luglio » al 25 luglio »	—	110
Novilunio	dal 26 luglio » all' 8 agosto »		34
Plenilunio	dal 9 agosto » al 22 agosto »		75
Novilunio	dal 23 agosto » al 4 settembre »		26
Plenilunio	dal 5 settembre » al 19 settembre »		1
Novilunio	dal 20 settembre » al 3 ottobre »		10

I dati sopra riassunti e documentati nelle annesse tabelle, fanno sorgere problemi che solo i talassobiologi possono avviare verso una pratica soluzione a beneficio di un'industria fra le più produttive del Mediterraneo.

La minore produzione nell'anno successivo al 1943, in cui tutte le tonnare nei due Compartimenti furono chiuse e la pesca in genere cessò quasi del tutto, fu riferito all'aumento delle forme marine conviventi ed alla prevalenza di pesci carnivori, talchè l'equilibrio biologico venne alterato per distruzione di piccole specie e di stadi giovanili, come, con metodo matematico, fu studiato da Volterra e da D'Ancona applicato alla pesca nell'alto Adriatico [4].

Tale interpretazione del diminuito prodotto della pesca, nell'anno successivo al 1943, non potrebbe essere estesa agli anni successivi, tanto meno al 1948, in cui tutte le tonnare hanno dato un minimo rendimento.

Il risultato, particolarmente sfavorevole alla pesca, del tonno nel 1948, fu attribuito genericamente all'*incostanza del tempo*, come si legge nel « Bollettino di Pesca », avanti citato; ciò che induce a studiare il fenomeno, tenendo presente

(4) A. Russo, « Rend. Acc. Lincei », Roma, 1946.

le condizioni fisico-chimiche delle acque costiere, la natura del fondo marino nell'area delle tonnare, le zoocorrenti, le variazioni atmosferiche, i tropismi dei tonni in relazione al loro sviluppo, il regime delle maree per influenza sole-lunare, le acque Atlantiche trasgressive penetrate nel Mediterraneo ed altro, alla cui conoscenza ha già dato notevoli contributi C. Scordia [5] con ricerche, proseguite per più anni, nelle tonnare della Sicilia orientale e della costa calabra nel basso Tirreno.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Chiarimento a una Nota del professore W. Sierpiński.* Nota I di Sandro Faedo, presentata [*] dal Socio M. Picone.

In una mia ricerca [1] ho affermato che si può dare una legge con cui scegliere un elemento in ogni insieme chiuso di funzioni continue, definite su intervalli finiti o no dell'asse x.

Recentemente il prof. W. Sierpiński [2] è ritornato sull'argomento facendo osservare che se si avesse una tal legge di scelta si potrebbe ben ordinare l'insieme dei numeri reali. Egli scrive: « La démonstration de M. Faedo ne m'étant pas tout à fait claire, il est possible qu'il y a ici un malentendu ». Ora un malinteso c'è effettivamente e dipende dal fatto che *gli spazi di funzioni continue da Lui e da me considerati non sono gli stessi.*

Oltre a chiarire ciò dò una nuova dimostrazione di quel mio teorema, riesponendo anche in forma corretta quella che ne avevo già data.

1. Il prof. W. Sierpiński trasforma l'insieme C delle funzioni continue su $(-\infty , +\infty)$ nello spazio metrico C_1 definendo la distanza fra due elementi con

$$\rho(f,g) = \underset{-\infty < x < +\infty}{\text{estr. sup.}} |f(x) - g(x)| .$$

Io ho invece trasformato C [3] in uno spazio topologico C_2 dando la seguente definizione di elemento di accumulazione: $f_0(x)$ è *elemento di accumulazione* dell'insieme $I \subset C_2$ se, fissati ad arbitrio i numeri $\rho > 0$, $k > 0$, esistono sempre infinite $f(x) \subset I$ per cui

$$|f_0(x) - f(x)| \leq \rho \qquad \text{per } |x| \leq k .$$

(5) C. Scordia, *Le migrazioni dei Tonni Tirreno-Jonici e l'entrata di essi in tonnara.* « Atti del II Convegno di Biologia marina e sue applicazioni alla pesca », Messina, 1940.

(*) Nella seduta del 9 aprile 1949.

(1) S. Faedo, *Il principio di Zermelo per lo spazio delle funzioni continue.* « Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa », vol. X, pp. 209-214 (1941).

(2) V. Sierpiński, *Remarque sur l'axiome du choix pour l'espace de fonctions continues.* « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. III, pp. 216-217 (1947).

(3) Per i casi più generali v. n. 3.

È ovvio che se $f(x)$ è elemento di accumulazione di I in C_1 è pure tale anche in C_2. Perciò *Se* I *è chiuso in* C_2 *lo è pure in* C_1. *Il viceversa non è vero in generale,* come prova il seguente semplice esempio:

Sia I costituito dalle funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad x \leq n \\ x - n & \text{»} \quad n \leq x \leq n+1 \\ 1 & \text{»} \quad x \geq n+1 \end{cases} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

I è chiuso in C_1, non possedendo nessun elemento di accumulazione; ma non è chiuso in C_2 perchè non contiene la funzione $f(x) \equiv 0$, che è di accumulazione di I in C_2.

2. Nel suo ragionamento il prof. W. Sierpiński associa ad ogni insieme non vuoto F dell'intervallo $(0, 1)$ un insieme $C_F \subset C$ nel modo seguente: sia t un numero reale con $0 < t \leq 1$; allora è univocamente determinato lo sviluppo diadico

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} \qquad (a_n = 0, 1),$$

con la condizione che per infiniti valori dell'indice n sia $a_n = 1$. A t si associa la funzione $f_t(x) \subset C$ così definita:

$f_t(x) = 0$ per $x \leq 0$, $f_t(n) = a_n$ e $f_t(x)$ lineare in ogni intervallo $(n-1, n)$. Si ponga inoltre $f_0(x) \equiv 0$. L'insieme C_F è costituito dalle $f_t(x)$ con $t \in F$ ed è *sempre* chiuso in C_1, essendo $\rho(f_t, f_u) = 1$, per $t \neq u$, $t, u \in F$.

Se si avesse una legge di scelta di un elemento in ogni insieme chiuso di C_1 si avrebbe allora una corrispondente legge di scelta in ogni insieme F dell'intervallo $(0, 1)$; e da ciò seguirebbe la discussa proposizione di Zermelo della bene ordinabilità dell'insieme dei numeri reali. Si ha invece:

Se l'insieme C_F *è chiuso in* C_2, *si può dare una legge di scelta di un elemento nell'insieme lineare* F.

Indichiamo con F' il derivato di F e con C'_F il derivato di C_F in C_2. Sia $u \in F'$ e per nessun intero N si abbia

$$(1) \qquad u = \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{2^n} \quad \text{con} \quad a_n = 0, 1;$$

dimostriamo allora che $f_u \in C'_F$. Fissato l'intero k ad arbitrio, l'espressione

$$\left| u - \sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{2^n} \right| \qquad (a_n = 0, 1)$$

ammette un minimo $\varepsilon_k > 0$ ed esistono infiniti $t \in F$ con $|u - t| < \varepsilon_k$. Perciò i primi k coefficienti degli sviluppi diadici di u e t coincidono e quindi è $f_u(x) = f_t(x)$, per $x \leq k$, che prova l'asserto. Supponiamo ora che sussista

la (1) e che u sia elemento di accumulazione a sinistra per F. Si ha ancora $f_u \in C'_F$. Per un certo N è

$$u = \sum_{n=1}^{N} \frac{\bar{a}_n}{2^n} \quad , \quad \text{con } \bar{a}_n = 0,1 \quad , \quad \bar{a}_N = 1 ,$$

e lo sviluppo diadico di u ha i coefficienti $a_n = \bar{a}_n$ $(1 \leq n \leq N-1)$, $a_N = 0$, $a_n = 1$ $(n > N)$. Fissato un intero $k \geq N$ sia $t \in F$ con $0 < u - t < \frac{1}{2^k}$; i primi k coefficienti dello sviluppo diadico di t coincidono con quelli u e quindi è ancora $f_u(x) = f_t(x)$ per $x \leq k$.

Se è $C'_F \subset C_F$ allora F contiene tutti i propri punti di accumulazione a sinistra. Se $u_F \leq 1$ è l'estremo superiore di F è $u_F \in F$. Infatti u_F, se non è un elemento isolato, è di accumulazione a sinistra per F. La cercata legge si ha quindi scegliendo in ogni F, per cui $C'_F \subset C_F$, l'elemento u_F.

3. Nella sua Nota già citata il prof. W. Sierpiński ha dimostrato la proposizione seguente che chiamerò

Teorema di Ascoli–Sierpiński: « *Dato uno spazio metrico completo e separabile* M, *si sa fissare una legge con cui far corrispondere ad ogni sottoinsieme non vuoto e chiuso* I *di* M *un elemento di* I » (4).

Naturalmente il concetto di spazio separabile va inteso nel senso che si sappia definire una successione di elementi di M che sia densa in M.

Γ, $\Gamma^{+\infty}$, $\Gamma_{-\infty}$, $\Gamma^{+\infty}_{-\infty}$ siano gli insiemi di tutte le funzioni continue $f(x)$ definite rispettivamente su intervalli finiti oppure del tipo $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$ e infine $(-\infty, +\infty)$. Nella mia Nota già citata questi insiemi sono trasformati in spazi topologici con le seguenti definizioni di elemento di accumulazione:

Def. La funzione $f_0(x)$ è *elemento di accumulazione* per l'insieme I se, fissati ad arbitrio i numeri positivi ρ e t esistono infinite $f(x) \in I$ per cui

I°) se $I \subset \Gamma$ e $f_0(x), f(x)$ sono definite su $(a_0, b_0), (a, b)$ è

$$(2)\quad \begin{cases} |f_0(x) - f(x)| \leq \rho \text{ per } a_0 \leq x \leq b_0 \ , \ a \leq x \leq b , \\ |f_0(a_0) - f(x)| \leq \rho \text{ per } a \leq x \leq a_0 \ , \ |f_0(b_0) - f(x)| \leq \rho \text{ per } b_0 \leq x \leq b \\ |a_0 - a| \leq \rho \ , \ |b_0 - b| \leq \rho ; \end{cases}$$

II°) se $I \subset \Gamma^{+\infty}$ e $f_0(x), f(x)$ sono definite in $(a_0, +\infty), (a, +\infty)$ è

$$(3)\quad \begin{cases} |f_0(x_0) - f(x)| \leq \rho \text{ per } a_0 \leq x \leq a_0 + t \ , \ a \leq x \leq a_0 + t , \\ |f_0(a_0) - f(x)| \leq \rho \text{ per } a \leq x \leq a_0 , \\ |a_0 - a| \leq \rho . \end{cases}$$

Del tutto analoghe sono le definizioni per gli insiemi $\Gamma_{-\infty}$, $\Gamma^{+\infty}_{-\infty}$ (v. n. 1). Si ottengono così gli spazi di funzioni continue S, $S^{+\infty}$, $S_{-\infty}$, $S^{+\infty}_{-\infty}$.

(4) G. Ascoli, *Sugli spazi lineari metrici e le loro varietà lineari*. Mem. I, « Annali di Mat. pura ed appl. », ser. IV, t. X, pp. 59-60 (1932).

4. Il teorema della mia Nota citata si può enunciare:

Si può dare una legge con cui scegliere un elemento in ogni insieme I *chiuso e non vuoto degli spazi* S, $S^{+\infty}$, $S_{-\infty}$, $S_{-\infty}^{+\infty}$.

Mi propongo ora di dimostrare che esso si può far discendere dal teorema di Ascoli–Sierpiński.

Anzitutto occorre provare che si può introdurre negli spazi considerati un concetto di distanza che non ne muti la struttura topologica.

a) Si consideri dapprima lo spazio S e due suoi elementi $f_0(x), x \quad (a_0, b_0)$ e $f(x), x \in (a, b)$; prolungate $f_0(x)$ e $f(x)$ su $(a_0, b_0) + (a, b)$ in modo che risultino continue e costanti rispettivamente su $(a, b) - (a_0, b_0)$ e $(a_0, b_0) - (a, b)$, si definisca la distanza

$$\Delta(f_0, f) = |a_0 - a| + |b_0 - b| + \max_{x \in (a_0, b_0) + (a, b)} |f_0(x) - f(x)|.$$

Si indichi con $\bar{S}$ lo spazio metrico così ottenuto. È ovvio che se $f_0(x)$ è di accumulazione per un insieme $I \subset \bar{S}$, lo è pure per lo stesso insieme considerato in S. Viceversa, sia $f_0(x)$ di accumulazione per $I \subset S$. Fissato $\rho > 0$ ad arbitrio, esistono infinite $f(x) \in I$ per cui valgono le (2). Se è $a \leq a_0$, $b \geq b_0$ ne segue $\Delta(f_0, f) \leq 3\rho$; se fosse, ad esempio, $a_0 < a$ risulterebbe $\Delta(f_0, f) \leq 3\rho + \omega(\rho)$ essendo $\omega(\rho)$ l'oscillazione di $f_0(x)$ su $(a_0, a_0 + \rho)$. Perciò, $f_0(x)$ è di accumulazione anche per $I \subset \bar{S}$.

b) Passando ora allo spazio $S^{+\infty}$, si consideri la successione di intervalli $d_{2m+1} = (m, m+1)$, $d_{2m+2} = (-m-1, -m)$ $(m = 0, 1, \cdots)$. Siano $f_0(x), x \geq a_0$ e $f(x), x \geq a$, due elementi di $S^{+\infty}$; si ponga, se è $a_0 < a$, $f(x) = f(a)$ su (a_0, a) e, se è $a < a_0$, $f_0(x) = f_0(a_0)$ su (a, a_0).

Posto $\delta_n = d_n \cdot \{(a_0, +\infty) + (a, +\infty)\}$, si definisca la distanza

$$\Delta^{+\infty}(f_0, f) = |a_0 - a| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\max_{x \in \delta_n} |f_0(x) - f(x)|}{1 + \max_{x \in \delta_n} |f_0(x) - f(x)|},$$

dove son da considerare nulli quei termini della serie per cui δ_n è vuoto. Con questa distanza l'insieme $\Gamma^{+\infty}$ diviene lo spazio metrico $\bar{S}^{+\infty}$.

Sia $f_0(x), x \geq a_0$, elemento di accumulazione di $I \subset \bar{S}^{+\infty}$. Fissati $\rho > 0$ e $t > 0$ ad arbitrio, si determini il minimo intero $m \geq 1$ con

$$m\rho \geq 1, \quad -m \leq 2(a_0 - \rho), \quad m \geq 2(a_0 + t);$$

esistono infinite $f(x) \in I$, $x \geq a$, per cui è $\Delta^{+\infty}(f_0, f) \leq \frac{1}{2^m(m+1)}$, da cui intanto segue $|a_0 - a| \leq \rho$. È inoltre

$$\frac{\max_{x \in \delta_n} |f_0(x) - f(x)|}{1 + \max_{x \in \delta_n} |f_0(x) - f(x)|} \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{1} \qquad (n = 1, 2, \cdots, m)$$

da cui

$$\max_{x \in \delta_n} |f_0(x) - f(x)| \leq \rho \quad \text{per} \quad x \in \sum_{n=1}^{m} \delta_n \supset (a_0, a_0 + t) + (a, a_0 + t);$$

perciò è

$$|f_0(x) - f(x)| \leq \rho \quad \text{per} \quad x \in (a_0, a_0 + t), \; x \in (a, a_0 + t),$$

$$|f_0(a_0) - f(x)| \leq \rho \quad \text{per} \quad a \leq x \leq a_0;$$

$f_0(x)$ soddisfa alle (3) ed è quindi elemento di accumulazione di $I \subset S^{+\infty}$. Sia ora $f_0(x)$ elemento di accumulazione di $I \subset S^{+\infty}$. Fissato ad arbitrio $\varepsilon > 0$, si determini un numero positivo ρ tale che sia $6\rho < \varepsilon$, $6\omega(\rho) < \varepsilon$, dove $\omega(\rho)$ indica l'oscillazione di $f_0(x)$ su $(a_0, a_0 + \rho)$; inoltre, se N è il primo intero per cui è $\varepsilon 2^N > 3$, si determini t in modo che risulti $2(a_0 + t) \geq N + 1$. Esistono infinite $f(x) \in I$ che soddisfano alle (3) con i detti valori di ρ e t; per tali $f(x)$ è, se $a_0 \leq x \leq a$

$$|f_0(x) - f(a)| \leq \omega(\rho) + \rho$$

e quindi, ponendo $f_0(x) = f_0(a_0)$ per $a \leq x \leq a_0$ e $f(x) = f(a)$ per $a_0 \leq x \leq a$, è su $(a_0, a_0 + t) + (a, a_0 + t)$

$$|f_0(x) - f(x)| \leq \omega(\rho) + \rho.$$

Tale disuguaglianza sussiste anche sull'intervallo $\sum_{n=1}^{N} \delta_n$, l'ascissa del suo secondo estremo essendo $\leq (N + 1)/2 \leq a_0 + t$ e quindi è

$$\Delta^{+\infty}(f_0, f) < \rho + \frac{\omega(\rho) + \rho}{1 + \omega(\rho) + \rho} + \frac{1}{2^N} < \varepsilon,$$

ed è così provato che $f_0(x)$ è elemento di accumulazione di I in $\overline{S}^{+\infty}$.

c) Come si è fatto per $S^{+\infty}$ si può definire anche negli spazi $S_{-\infty}$, $S_{-\infty}^{+\infty}$ una distanza in modo da non mutare il concetto di intorno.

d) È immediato che gli spazi S, $S^{+\infty}$, $S_{-\infty}$, $S_{-\infty}^{+\infty}$ sono separabili; basta assumere come successione ovunque densa quella dei polinomi in x a coefficienti razionali. Sono quindi separabili anche gli spazi metrici $\overline{S}$, $\overline{S}^{+\infty}$, $\overline{S}_{-\infty}$, $\overline{S}_{-\infty}^{+\infty}$. Questi sono anche completi; ciò segue facilmente dalla completezza dello spazio delle funzioni continue su uno stesso intervallo (a, b) con distanza $\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|$.

Agli spazi $\overline{S}$, $\overline{S}^{+\infty}$, $\overline{S}_{-\infty}$, $\overline{S}_{-\infty}^{+\infty}$ si può quindi applicare il teorema di Ascoli - Sierpiński e si riottiene così il mio teorema per gli spazi S, $S^{+\infty}$, $S_{-\infty}$, $S_{-\infty}^{+\infty}$.

Osservazione. – Lo spazio funzionale C_1, considerato nel n. 1, è metrico, completo ma non separabile.

Analisi. — *Sul problema di Cauchy per l'equazione di tipo misto* $x^2 z_{xx} - y^2 z_{yy} = 0$ (*). Nota di ROBERTO CONTI, presentata (**) dal Corrisp. G. SANSONE.

1. Nell'ultima parte di una sua Memoria (1), Maria Cibrario ha trattato per l'equazione

$$x^2 z_{xx} - z_{yy} = 0 \tag{1}$$

il problema di Cauchy relativo ad una curva γ avente un estremo sull'asse y, o attraversante l'asse y, linea parabolica della (1), e per il resto completamente interna alla regione iperbolica.

Qui esaminiamo la stessa questione per la

$$x^2 z_{xx} - y^2 z_{yy} = 0 \tag{A}$$

equazione, come la (1), di tipo misto, ma da questa (come da tutte le altre di tipo parzialmente iperbolico fin qui studiate) sostanzialmente differente per essere la linea parabolica della (A) spezzata nei due assi coordinati.

Si presenta così, riteniamo per la prima volta, la circostanza di una linea parabolica con un punto doppio (l'origine O) e da quel che segue apparirà la notevole influenza che questo ha sull'andamento delle « soluzioni » della (A) in insiemi di cui faccia parte tale punto.

Anzitutto alcune precisazioni. Diremo che una funzione $z(x, y)$, definita in un insieme I del piano x, y è *in* I *una soluzione* della (A) se: 1° essa è continua in I; 2° nell'insieme I_0 dei punti interni ad I ammette continue le derivate z_x, z_y, z_{xx}, z_{yy}; 3° le z_{xx}, z_{yy} soddisfano in I_0 la (A).

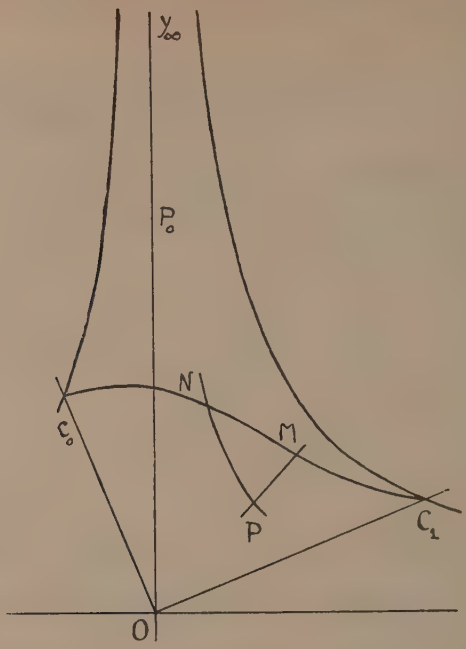
Nel seguito gli insiemi da prendere in esame saranno i due seguenti: 1° l'insieme T costituito dai punti del semiasse $O Y_\infty$ delle $y > 0$, dai punti del segmento (di retta caratteristica) di estremi $O, C_1 \equiv (x_1, y_1)$ $(x_1, y_1 > 0)$, da quelli dell'arco di iperbole (caratteristica) $C_1 Y_\infty$ di equazione $xy = x_1 y_1$ e da quelli interni al trilatero così delimitato $(0 < xy < x_1 y_1 \; ; \; 0 < x|y < x_1|y_1)$; 2° l'insieme D somma di T e di un insieme analogo T_1 appartenente al quadrante $x \leq 0, y \geq 0$.

Nel primo caso, una parte della frontiera appartiene alla linea parabolica ed allora diremo che una soluzione $z(x, y)$ della (A) in T è *regolare in* T — O (cioè nell'insieme T privato del punto O) se ammette derivate z_x, z_y, z_{xx}, z_{yy} continue anche nei punti di OY_∞, ad eccezione di O; diremo invece che è *regolare in* T se tale eccezione cade, vale a dire se z_y, z_{yy} sono continue anche in O e z_x, z_{xx} vi ammettono limite (superficiale) determinato e finito.

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto Matematico dell'Università di Firenze.

(**) Nella seduta del 9 aprile 1949.

(1) Ved. MARIA CIBRARIO, *Sui teoremi di esistenza e di unicità per le equazioni lineari alle derivate parziali del secondo tipo misto iperbolico paraboliche* $x^{2m} z_{xx} - z_{yy} = 0$. « Rend. C. M. Palermo », t. LVIII (1934), pp. 217–284; ved. in particolare il § 8.



Infine una soluzione in D della (A) (la quale è sempre necessariamente regolare in $T - O$ ed in $T_1 - O$) si dirà *regolare in* D se è regolare in T ed in T_1.

Per ridurre la questione all'essenziale supporremo che sia $x_1 = 1$, $y_1 = 1$ e che la curva γ portante i dati di Cauchy sia rappresentabile nella forma $y = f(x)$ con $f(1) = 1$ e con $f(x) > 0$, $f'(x)$ continue nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$. Inoltre la $f'(x)$ dovrà per ogni x soddisfare la

$$x^2 f'^2(x) - f^2(x) \neq 0 \tag{2}$$

in modo che γ sia incontrata al più in un punto dalle caratteristiche della (A).

Ora se $\varphi(x)$, $\psi(x)$ sono due funzioni *continue con le derivate prime* nell'intervallo $0 < x \leq 1$ (*aperto a sinistra*) dai teoremi sulle equazioni di tipo iperbolico discende l'esistenza ed unicità in $T - OY_\infty$ di una soluzione della (A) la quale soddisfi per $0 < x \leq 1$ le

$$z_x(x, f(x)) = \varphi(x) \quad , \quad z_y(x, f(x)) = \psi(x) , \tag{3}$$

ed assuma un valore dato in un punto di γ prefissato (problema di Cauchy).

L'applicazione del metodo di Riemann [2] permette di scrivere la formula risolutiva la quale esprime il valore $z(P)$ assunto dalla soluzione in un punto P

(2) Qui, come nel seguito, omettiamo i calcoli per non appesantire troppo la trattazione, tanto più trattandosi di un'equazione semplice come la (A) e dell'applicazione di metodi ben noti. Ci limitiamo soltanto a rilevare esplicitamente che la funzione di Riemann della (A), facilmente ottenibile, è la $u(X, Y; x, y) = |xy\,XY|^{1/2}\,(XY)^{-2}$.

di $T - OY_\infty$ per mezzo dei valori di $\theta(x) = z(x, f(x))$ e di $\varphi(x), \psi(x)$ per $0 < x \leq 1$. Condotte per $P \equiv (x, y)$ la retta e l'iperbole caratteristica ad incontrare γ risp. in $M \equiv (m, f(m))$ ed $N \equiv (n, f(n))$, ed avuto presente che in tal modo risulta

$$my = xf(m) \quad , \quad nf(n) = xy , \tag{4}$$

tale relazione può scriversi

$$z(P) = \theta(n) + \varphi(m)x - \varphi(n)n + \psi(m)y - \psi(n)f(n) + (xy)^{1/2}\,\mathfrak{I}_{m,n} , \tag{B}$$

dove

$$\mathfrak{I}_{m,n} \equiv \int_m^n \{(t/f)^{1/2}\varphi' + (f/t)^{1/2}\psi'\}\,dt . \tag{5}$$

Se φ e ψ sono assegnate nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$ (*chiuso*) basterà allora supporre che esse siano continue con le derivate prime anche nel punto zero per ottenere una soluzione in T del problema. Infatti se P_0 è un qualunque punto di OY_∞, essendo $\mathfrak{I}_{m,n}$ limitata, dalla (B) risulta che $z(P)$ tende per $P \to P_0$ (e quindi per x, m, n tendenti a zero) verso $\theta_0 - \psi_0 f_0 + \psi_0 y$ (dove θ_0 sta per $\theta(0)$, ecc.), cosicchè, posto

$$z(P_0) \equiv \theta_0 - \psi_0 f_0 + \psi_0 y , \tag{B_0}$$

questa, insieme con la (B), offre la soluzione suddetta. Si noti che *non* fa eccezione il caso $P_0 \equiv O$ perchè, pur non avendo, per $P \to O$, la m limite determinato, basta osservare che y tende a zero e la ψ è per ipotesi limitata.

È poi evidente che la soluzione (B), (B_0) è unica.

2. Occupiamoci ora della regolarità della soluzione trovata.

Con qualche riduzione le derivate prime della z in P possono scriversi

$$z_y(P) = \psi(m) - \frac{1}{2}(m/f(m))^{1/2}\,\mathfrak{I}_{0,m} + \frac{1}{2}(x/y)^{1/2}\,\mathfrak{I}_{0,n} , \tag{6}$$

$$z_x(P) = \varphi(m) - \frac{1}{2}(f(m)/m)^{1/2}\,\mathfrak{I}_{0,m} + \frac{1}{2}(y/x)^{1/2}\,\mathfrak{I}_{0,n} , \tag{7}$$

ed applicando agli integrali che compaiono in queste il I° teorema della media si ricava

$$\lim_{P \to P_0} z_y(P) = \psi_0 \quad ; \quad \lim_{P \to P_0} z_x(P) = \varphi_0 - \psi_0' f_0 + \psi_0' y$$

a condizione però che P_0 sia *diverso da* O. Il primo limite coincide con la $z_y(P_0)$ e dall'esistenza del secondo segue la continuità della z_x in P_0.

Avendo presenti le (4) dalle quali seguono le

$$m_x = \frac{f^2(m)}{f(m) - m f'(m)}\,\frac{1}{y} \quad ; \quad n_x = \frac{1}{f(n) + n f'(n)}\,\frac{y}{x} \tag{8}$$

si può dedurre dalla (7) la

$$(9)\quad \zeta_{xx}(P) = \frac{1}{2}\varphi'(m)\,m_x + \frac{1}{2}\varphi'(n)\,\frac{y}{f(n)}\,n_x - \frac{1}{4}\left(\frac{y}{x}\right)^{1/2}\frac{1}{x}\int_m^n (t/f)^{1/2}\varphi'\,dt +$$

$$+\frac{1}{2}[\psi'(n)f(n)\,n_x - \psi'(m)\,y m_x]\frac{1}{x} - \frac{1}{4}\left(\frac{y}{x}\right)^{3/2}\frac{1}{x}\int_m^n (f/t)^{1/2}\psi'\,dt\,.$$

Quando P tende verso P_0 (distinto da O), avuto presente che per le (8) m_x tende verso f_0/y ed n_x verso y/f_0 (ed applicando ancora il I° teorema della media al primo dei due integrali che compaiono nella (9), si riconosce facilmente che il gruppo dei primi tre termini della (9) ammette limite finito. Il penultimo termine è in generale infinito come $1/x$ e lo stesso può dirsi dell'ultimo, in virtù del teorema di l'Hôpital; in complesso $\zeta_{xx}(P)$ risulta in generale infinita come $1/x$.

Poichè ciò dipende soltanto dalla ψ, supporremo allora l'esistenza della $\psi''(x)$ (almeno in un intorno chiuso dello zero); in tal caso, integrando per parti l'ultimo integrale della (9), questa può scriversi (almeno per m, n appartenenti a detto intorno):

$$(9')\quad \zeta_{xx}(P) = \frac{1}{2}\varphi'(m)\,m_x + \frac{1}{2}\varphi'(n)\,\frac{y}{f(n)}\,n_x - \frac{1}{4}\left(\frac{y}{x}\right)^{1/2}\frac{1}{x}\int_m^n (t/f)^{1/2}\varphi'\,dt -$$

$$-\frac{1}{2}\left\{\psi'(n)f'(n)\,\frac{1}{f(n)[f(n)+nf'(n)]}\,y^2 + \psi'(m)f'(m)\,\frac{f^2(m)}{f(m)-mf'(m)}\,\frac{1}{y}\right\} +$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^{1/2}\frac{1}{x}\int_m^n t^{1/2}[f^{1/2}\psi']'\,dt\,.$$

È facile vedere, applicando ancora una volta il I° teorema della media, che la $\zeta_{xx}(P)$ rappresentata dalla (9') ammette limite finito per $P \to P_0$ e precisamente

$$(9'')\quad \lim_{P \to P_0} \zeta_{xx}(P) = \frac{1}{3}\frac{1}{f_0^2}[\varphi_0' - \psi_0' f_0' + \psi_0'' f_0]\,y^2 + \frac{1}{3}f_0[2\varphi_0' - 2\psi_0' f_0' - \psi_0'' f_0]\,\frac{1}{y}$$

e da ciò segue la continuità della ζ_{xx} nei punti P_0 (distinti da O): quella della ζ_{yy} risulta dall'essere in P soddisfatta la (A) e dall'aversi, dalla (B_0), $\zeta_{yy}(P_0) = 0$. Possiamo concludere col seguente (3)

Teorema I. – *Condizione sufficiente affinchè, per una data $f(x)$ (soddisfacente la (2) e continua con la derivata prima), la soluzione in T della (A) che per $0 \leq x \leq x_1$ soddisfa le condizioni di Cauchy (soddisfa cioè le (3) ed assume un dato valore in un dato punto di γ: $y = f(x)$), sia regolare in T – O, è che le funzioni $\varphi(x), \psi(x), \varphi'(x), \psi'(x)$ siano continue per $0 \leq x \leq x_1$ e la $\psi''(x)$ sia continua almeno in un intorno (destro, chiuso) del punto zero.*

(3) Questo risultato costituisce l'analogo del Teorema IX a p. 278 della Memoria di Maria Cibrario citata in (1): il Cor. successivo è l'analogo dell'estensione a p. 281 ivi.

Se la curva $\gamma : y = f(x)$ attraversa l'asse y avendo gli estremi in $C_1 \equiv (x_1, y_1)$ e $C_0 \equiv (x_0, y_0)$ con $x_0 < 0$, $y_0 > 0$ segue il

COR. – *Se* $f(x), \varphi(x), \psi(x)$ *sono assegnate nell'intervallo* $x_0 \leq x \leq x_1$ $(x_0 < 0 < x_1)$ *e si impongono le condizioni di Cauchy relativamente a tale intervallo, le ipotesi del Teorema I assicurano l'esistenza della soluzione nell'insieme* D *costituito da* T *e dall'analogo insieme* T_1 *di vertici* $C_0 \equiv (x_0, f(x_0))$, O, Y_∞.

3. In quel che precede abbiamo sempre dovuto escludere il caso $P_0 \equiv O$, poichè quando $P \to O$ la m non ha limite determinato; vogliamo ora mostrare come il problema di Cauchy sia in generale *impossibile* se dalla soluzione si richiede la regolarità in T, rimossa, cioè, l'eccezione di O.

Anzitutto, avendosi $\chi_y(O) = \psi_0$, la continuità della χ_y in O *equivale*, come mostra chiaramente la (6), all'essere

$$(10') \qquad \psi(\xi) - \frac{1}{2}(\xi/f)^{1/2}\,\mathfrak{I}_{0,\xi} = \psi_0 \quad ; \quad 0 \leq \xi \leq 1 .$$

Analogamente, poichè $\chi_x(P_0) = \varphi_0 - \psi_0' f_0 + \psi_0' y$ tende, per $P_0 \to O$, verso $\varphi_0 - \psi_0' f_0$, affinchè $\chi_x(P)$ ammetta limite finito e determinato per $P \to O$ è *necessario e sufficiente*, in virtù della (7), che sia

$$(10'') \qquad \varphi(\xi) - \frac{1}{2}(f/\xi)^{1/2}\,\mathfrak{I}_{0,\xi} = \varphi_0 - \psi_0' f_0 \quad ; \quad 0 \leq \xi \leq 1 .$$

D'altronde risolvendo sia la (10') che la (10'') rispetto ad $\mathfrak{I}_{0,\xi}$, derivando rispetto a ξ, moltiplicando la prima per $(f/\xi)^{1/2}$ e la seconda per $(\xi/f)^{1/2}$ ed infine integrando tra zero e ξ i risultati, si giunge in entrambi i casi alla

$$(C) \qquad \xi\varphi(\xi) - f(\xi)\,[\psi(\xi) - \psi_0] = \xi\,[\varphi_0 - \psi_0' f_0] \quad ; \quad 0 \leq \xi \leq 1 ,$$

e inversamente cosicchè possiamo concludere che le (10') e (10'') sono entrambe *equivalenti* alla (C).

Passiamo a considerare la $\chi_{xx}(P)$ che, nelle ipotesi del Teorema I, può scriversi con qualche riduzione, mediante le (4) e (8):

$$(11) \qquad \chi_{xx}(P) = \left[\varphi(m) - \frac{1}{2}(f/m)^{1/2}\,\mathfrak{I}_{0,m}\right]' m_x + \frac{1}{2}\varphi'(n)\,\frac{y}{f(n)}\,n_x -$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{y}{x}\right)^{1/2}\frac{1}{x}\int_0^n (t/f)^{1/2}\varphi'\,dt - \frac{1}{2}\psi'(n)f'(n)\,\frac{y}{f(n)}\,n_x + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^{1/2}\frac{1}{x}\int_0^n t^{1/2}(f^{1/2}\psi')'\,dt ,$$

l'apice al 1° termine indicando derivazione rispetto ad m.

Dalla (11) si vede che per $P \to O$ tutti i termini tendono a zero ad eccezione del 1° che dipende esclusivamente da m e che pertanto non ammette limite. L'esistenza del limite di $\chi_{xx}(P)$ per $P \to O$ (limite che per la (9''), esprimente la $\chi_{xx}(P_0)$, è necessariamente nullo se finito) equivale dunque all'annullarsi identicamente dell'espressione $\left[\varphi(\xi) - \frac{1}{2}(f/\xi)^{1/2}\,\mathfrak{I}_{0,\xi}\right]'$ e quindi alla (10') o infine alla (C). E poichè $\chi_{yy}(P) = \frac{x^2}{y^2}\chi_{xx}(P)$ si conclude che questa è con-

dizione necessaria e sufficiente per la regolarità in T della soluzione. Ma la (C) stessa rappresenta un legame tra i dati φ e ψ del problema, tale che assegnata $\psi(x)$ ad esempio (nonchè φ_0) resta completamente determinata la $\varphi(x)$ e ciò significa che

Teorema II. – *In generale il problema di Cauchy per* $0 \leq x \leq x_1$ *(o per* $x_0 \leq x \leq x_1$, *con* $x_0 < 0 < x_1$*) è impossibile quando si richieda la regolarità in* T *(in* D*) della soluzione.*

In altri termini, il complesso delle condizioni « quantitative » (di Cauchy) e di quelle « qualitative » (regolarità in T, o in D) è sovrabbondante.

Si noti che, assegnate $f(x)$, $\psi(x)$ (e quindi $f'(x)$, ψ_0, $\psi'(x)$, $\psi''(x)$) e φ_0, dalla (C) si può ricavare la $\varphi(x)$ e quindi $\varphi(x) + f'(x)\psi(x) = \theta'(x)$; se è dato anche un valore di $\theta(x)$ ad esempio ϑ_0, da questo e dalla (C) si ricava la $\theta(x)$ e sostituendo in (B) si ottiene a calcoli fatti:

$$(B') \quad z(P) = \int_0^{\infty} \left\{ f \frac{\psi - \psi_0}{t} + f'\psi \right\} dt - \psi_0 f(n) + \psi_0 y + [\varphi_0 - \psi_0' f_0] x + \theta_0.$$

Possiamo dunque affermare

Teorema III. – *Esiste una soluzione della* (A) *in* T [*in* D] *la quale sia regolare in* T [*in* D] *e soddisfi le condizioni*

$$(3') \quad z(0, f(0)) = \vartheta_0 \quad , \quad z_x(0, f(0)) = \varphi_0 \quad ; \quad z_y(x, f(x)) = \psi(x)$$

essendo ϑ_0, φ_0 *due costanti assegnate e* $\psi(x)$ *una funzione pure assegnata, continua con le derivate prima e seconda in* $0 \leq x \leq x_1$ [*in* $x_0 \leq x \leq x_1$ *con* $x_0 < 0 < x_1$]. *Tale soluzione è rappresentata dalla* (B'), *ed è unica.*

Matematica. — *Sul calcolo delle deformazioni, dotate di simmetria assiale, di uno strato sferico elastico* (*). Nota di Gaetano Fichera, presentata (**) dal Socio M. Picone.

I problemi al contorno, relativi all'equilibrio di una sfera elastica, oppure di uno strato elastico, hanno avuto molteplici trattazioni, la prima delle quali, dovuta a Lamè risale a quasi un secolo fa (1). È da notare, però, che i diversi metodi risolutivi impiegati dai vari Autori, che si sono occupati dell'argomento, presentano un grado di complicazione ben più elevato rispetto a quello dei problemi al contorno sferici per l'equazione $\Delta_2 u = f$, oppure, anche, $\Delta_{2n} u = f$, la cui trattazione, quando, ad esempio, venga condotta col metodo delle proprietà integrali del Picone, permette di conseguire rapidamente semplici formole risolutive (2).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(**) Nella seduta del 12 maggio 1949.

(1) Per una esauriente bibliografia sull'argomento cfr. R. Marcolongo, *Teoria matematica dell'equilibrio dei corpi elastici*. Hoepli, 1909, cap. VIII.

(2) Cfr. M. Picone, *Nuovi indirizzi di ricerca nella teoria e nel calcolo delle soluzioni di talune equazioni lineari alle derivate parziali della Fisica-matematica*. «Annali Scuola Normale Sup. di Pisa», ser. II, vol. V (1936)].

La ragione di ciò risiede nel fatto che non è noto un sistema di vettori, il quale compia per le equazioni dell'elasticità lo stesso ufficio che il sistema delle funzioni sferiche esplica per le funzioni armoniche e iperarmoniche.

In questa Nota, limitandomi a considerare quei problemi che dànno luogo a soluzioni simmetriche rispetto ad un asse della sfera, pervengo a risolverli, col metodo delle proprietà integrali anzidetto. Il sistema di vettori impiegato e che consente l'applicazione del metodo, è particolarmente semplice dato che esso è quello costituito dai vettori, aventi per componenti, radiale e trasversa, rispettivamente le due funzioni $X_n(\cos\varphi)$, $\frac{d}{d\varphi}X_n(\cos\varphi)$, essendo X_n il polinomio di Legendre di ordine n e φ la colatitudine del punto della superficie sferica, rispetto all'asse di simmetria della deformazione.

Presumo che l'ordine di idee seguìto possa anche condurre alla risoluzione del problema nel caso generale di una deformazione qualsiasi.

1. Sia C un corpo materiale elastico, isotropo e omogeneo, sottoposto alla forza di massa unitaria F e alla forza superficiale unitaria f. Detto u il vettore spostamento di un punto di C, le condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio di C si possono scrivere, in modo intrinseco, sotto la forma seguente:

$$k\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,u - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,u + \mathrm{F} = 0 \tag{1}$$

nell'interno di C, e

$$(k-2)\,\mathrm{div}\,u\cdot\nu + 2\frac{du}{d\nu} + (\nu\wedge\mathrm{rot}\,u) + f = 0 \tag{2}$$

sulla superficie di C.

Avverto che ho seguitato ad indicare con F e f le forze di massa e superficiali moltiplicate per date costanti. Con ν denoto il versore normale alla superficie di C diretto verso l'interno di C; k è una costante maggiore di $4/3$.

Riferito lo spazio ad un sistema di coordinate curvilinee ortogonali (q_1, q_2, q_3) si abbia per l'elemento d'arco

$$ds^2 = Q_1^2\,dq_1^2 + Q_2^2\,dq_2^2 + Q_3^2\,dq_3^2.$$

Se con una data lettera indicherò un vettore, con la stessa lettera munita di indice i $(i = 1, 2, 3)$ denoterò la componente, secondo l'asse tangente positivo alla linea coordinata q_i in un suo punto.

Ricordando le note espressioni delle componenti del gradiente e del rotore in coordinate curvilinee ortogonali (3) la (1), posto $\omega = \mathrm{rot}\,u$, equivale al sistema:

(3) Se A è una funzione scalare; posto $v = \mathrm{grad}\,A$ si ha $v_i = \frac{1}{Q_i}\frac{\partial A}{\partial q_i}$ $(i = 1, 2, 3)$. Per le componenti del vettore $\omega = \mathrm{rot}\,u$ si ha

$$\omega_1 = \frac{1}{Q_2 Q_3}\left(\frac{\partial Q_3 u_3}{\partial q_2} - \frac{\partial Q_2 u_2}{\partial q_3}\right), \quad \text{ecc.}$$

Si ha inoltre

$$\mathrm{div}\,u = \frac{1}{Q_1 Q_2 Q_3}\left(\frac{\partial Q_2 Q_3 u_1}{\partial q_1} + \frac{\partial Q_3 Q_1 u_2}{\partial q_2} + \frac{\partial Q_1 Q_2 u_3}{\partial q_3}\right).$$

$$\frac{k}{Q_1}\frac{\partial \operatorname{div} u}{\partial q_1}+\frac{1}{Q_2 Q_3}\left(\frac{\partial Q_2\,\omega_2}{\partial q_3}-\frac{\partial Q_3\,\omega_3}{\partial q_2}\right)+F_1=0,$$

$$\frac{k}{Q_2}\frac{\partial \operatorname{div} u}{\partial q_2}+\frac{1}{Q_3 Q_1}\left(\frac{\partial Q_3\,\omega_3}{\partial q_1}-\frac{\partial Q_1\,\omega_1}{\partial q_3}\right)+F_2=0,$$

$$\frac{k}{Q_3}\frac{\partial \operatorname{div} u}{\partial q_3}+\frac{1}{Q_1 Q_2}\left(\frac{\partial Q_1\,\omega_1}{\partial q_2}-\frac{\partial Q_2\,\omega_2}{\partial q_1}\right)+F_3=0.$$

Facciamo l'ipotesi che le superficie d'equazione $q_1 = \text{costante}$ siano superficie chiuse e limitate e che Q_1, Q_2, Q_3 non dipendano da q_3.

Supponiamo che il corpo C, nel suo stato naturale, possa schematizzarsi nel dominio T definito dalla limitazione $r_1 \leq q_1 \leq r_2$, essendo r_1 ed r_2 due valori $(r_1 < r_2)$ fissati nell'intervallo di variabilità del parametro q_1. Si constata che, in tale ipotesi per C, l'equazione vettoriale (2) equivale alle tre seguenti scalari

$$(3)\qquad \begin{cases} 2\dfrac{\partial}{\partial q_1}\dfrac{u_1}{Q_1}+2\dfrac{1}{Q_1}\left(\dfrac{\partial Q_1}{\partial q_1}\dfrac{u_1}{Q_1}+\dfrac{\partial Q_1}{\partial q_2}\dfrac{u_2}{Q_2}+\dfrac{\partial Q_1}{\partial q_3}\dfrac{u_3}{Q_3}\right)+ \\ \qquad +(k-2)\operatorname{div} u+f_1=0, \\ \dfrac{Q_1}{Q_2}\dfrac{\partial}{\partial q_2}\dfrac{u_1}{Q_1}+\dfrac{Q_2}{Q_1}\dfrac{\partial}{\partial q_1}\dfrac{u_2}{Q_2}+f_2=0, \\ \dfrac{Q_3}{Q_1}\dfrac{\partial}{\partial q_1}\dfrac{u_3}{Q_3}+\dfrac{Q_1}{Q_3}\dfrac{\partial}{\partial q_3}\dfrac{u_1}{Q_1}+f_3=0. \end{cases}$$

Sulla frontiera $\mathfrak{F}T$ di T sia definito un operatore lineare L, che trasformi il vettore u in un vettore $L[u]$, e sia tale che, allorquando u non dipende dalla coordinata q_3 ed ha nulla la componente u_3, $L[u]$ goda della stessa proprietà. Ad esempio è tale l'operatore interveniente al primo membro della (2)

$$L[u] \equiv (k-2)\operatorname{div} u\cdot\nu + 2\frac{du}{d\nu}+(\nu\wedge\operatorname{rot} u)$$

Si voglia risolvere il seguente problema al contorno nel dominio T per il vettore incognito u, nella classe dei vettori continui in T assieme alle derivate prime – vettori biregolari in T –:

$$(4)\qquad k\operatorname{grad}\operatorname{div} u-\operatorname{rot}\operatorname{rot} u=0 \qquad \text{in} \quad T-\mathfrak{F}T,$$

$$(5)\qquad L[u]+f=0 \qquad \text{su} \quad \mathfrak{F}T,$$

essendo L un operatore del tipo anzidetto.

Sia (α_2,β_2) l'intervallo descritto da q_2 quando il punto (q_1,q_2,q_3) descrive T e consideriamo il seguente problema al contorno relativo al dominio rettangolare R e due dimensioni del piano cartesiano $q_1 q_2$, di punti estremi (r_1,α_2) ed (r_2,β_2), nel vettore incognito a due componenti $u(q_1,q_2)$

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{k}{Q_1}\dfrac{\partial \operatorname{div} u}{\partial q_1}-\dfrac{1}{Q_1 Q_3}\dfrac{\partial Q_3\,\omega_3}{\partial q_2}=0, \\ \dfrac{k}{Q_2}\dfrac{\partial \operatorname{div} u}{\partial q_2}+\dfrac{1}{Q_3 Q_1}\dfrac{\partial Q_3\,\omega_3}{\partial q_1}=0 \qquad \text{in} \quad R-\mathfrak{F}R, \end{cases}$$

$$L[u]+f'(q_2)=0 \quad \text{per} \quad q_1=r_1 \quad , \quad L[u]+f''(q_2)=0 \quad \text{per} \quad q_1=r_2.$$

Inoltre u sia assoggettato alla ulteriore condizione qualitativa di essere, considerato come vettore dello spazio ordinario avente la $u_3 = 0$, biregolare in T.

Se, ad esempio, i punti dello spazio per i quali è $q_2 = \alpha_2$ coincidono con quelli pei quali è $q_2 = \beta_2$, tale condizione qualitativa si traduce nelle seguenti quantitative

$$u\ (q_1, \alpha_2) = u\ (q_1, \beta_2),$$
$$u_{iq_j}(q_1, \alpha_2) = u_{iq_j}(q_1, \beta_2) \qquad (i, j = 1, 2).$$

È evidente che se questo problema ha soluzione, questa lo è anche per il problema (4), (5).

Tale ovvia considerazione permette di ridurre il problema da tre a due dimensioni.

2. Nello spazio cartesiano $xy\zeta$ consideriamo lo strato sferico T con centro nell'origine limitato internamente dalla superficie sferica di raggio r_1 ed esternamente da quella di raggio r_2. Diremo che T è sottoposto ad una deformazione elastica, dotata di simmetria assiale rispetto a ζ, se il vettore spostamento u di un punto P di T è sempre contenuto nel piano meridiano passante per P e non varia al variare di questo piano.

Introdotto un sistema di coordinate polari di polo O, tali che sia

$$x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \quad , \quad y = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \quad , \quad \zeta = \rho\cos\varphi$$
$$\rho \geq 0 \quad , \quad 0 \leq \varphi \leq \pi \quad , \quad 0 \leq \theta < 2\pi,$$

assumiamo ρ come coordinata q_1, φ come q_2 e θ come q_3. Si ha $Q_1 = 1$, $Q_2 = \rho$, $Q_3 = \rho \operatorname{sen}\varphi$, per cui, dalle (6), si deduce che, per una deformazione di T simmetrica rispetto a ζ, il vettore spostamento – in assenza di forze di massa – verifica il seguente sistema, dato che non dipende da q_3 ed è $u_3 = 0$:

$$(7)\quad \begin{cases} k\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial(\rho^2 u_1)}{\partial\rho} + \dfrac{1}{\rho\operatorname{sen}\varphi}\dfrac{\partial(\operatorname{sen}\varphi\, u_2)}{\partial\varphi}\right) - \dfrac{1}{\rho^2\operatorname{sen}\varphi}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(\dfrac{\partial(\rho u_2)}{\partial\rho} - \dfrac{\partial u_1}{\partial\varphi}\right) = 0, \\ k\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial(\rho^2 u_1)}{\partial\rho} + \dfrac{1}{\rho\operatorname{sen}\varphi}\dfrac{\partial(\operatorname{sen}\varphi u_2)}{\partial\varphi}\right) + \dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\dfrac{\partial(\rho u_2)}{\partial\rho} - \dfrac{\partial u_1}{\partial\varphi}\right) = 0. \end{cases}$$

Si moltiplichino ambo i membri della prima delle (7) per $X_n(\cos\varphi)\operatorname{sen}\varphi$ e quelli della seconda per $\dfrac{d}{d\varphi}X_n(\cos\varphi)\operatorname{sen}\varphi$. Fissato ρ nell'interno dell'intervallo (r_1, r_2), integriamo rispetto a φ fra 0 e π. Tenendo presente l'identità

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\operatorname{sen}\varphi\frac{dX_n(\cos\varphi)}{d\varphi}\right) = -n(n+1)\operatorname{sen}\varphi X_n(\cos\varphi)$$

si deduce, dopo operate opportune integrazioni per parte, che le funzioni così definite

$$U_1^{(n)}(\rho) = \int_0^\pi u_1(\rho, \varphi) X_n(\cos\varphi)\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi,$$

$$U_2^{(n)}(\rho) = \int_0^\pi u_2(\rho, \varphi)\frac{dX_n(\cos\rho)}{d\varphi}\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi,$$

debbono soddisfare al seguente sistema differenziale ordinario

$$(8)\quad \begin{cases} k\dfrac{d}{d\rho}\left(\dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{d\left(\rho^2 U_1^{(n)}\right)}{d\rho} - \dfrac{1}{\rho}U_1^{(n)}\right) + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{d\left(\rho U_2^{(n)}\right)}{d\rho} - \dfrac{n(n+1)}{\rho^2}U_1^{(n)} = 0, \\ k\left(\dfrac{n(n+1)}{\rho^2}\dfrac{d\left(\rho^2 U_1^{(n)}\right)}{d\rho} - \dfrac{n(n+1)}{\rho}U_2^{(n)}\right) + \dfrac{d}{d\rho}\left(\dfrac{d\left(\rho U_2^{(n)}\right)}{d\rho} - n(n+1)U_1^{(n)}\right) = 0. \end{cases}$$

Si riconosce subito che questo sistema è del tipo di Eulero e, pertanto, determinatone l'integrale generale, si deducono le seguenti *proprietà integrali* per le soluzioni del sistema (7):

$$(9)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^\pi u_1(\rho,\varphi)\,X_n(\cos\varphi)\,\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi = c_1^{(n)}\alpha_k^{(n)}\rho^{n-1} + c_2^{(n)}\beta_k^{(n)}\rho^{n+1} + \\ \qquad + c_3^{(n)}\alpha_k^{(n)}\rho^{-n} + c_4^{(n)}\beta_k^{(n)}\rho^{-n-2}, \\ \displaystyle\int_0^\pi u_2(\rho,\varphi)\,\frac{dX_n(\cos\varphi)}{d\varphi}\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi = n(n+1)\left[c_1^{(n)}\gamma_k^{(n)}\rho^{n-1} + \right. \\ \qquad \left. + c_2^{(n)}\delta_k^{(n)}\rho^{n+1} + c_3^{(n)}\eta_k^{(n)}\rho^{-n} + c_4^{(n)}\lambda_k^{(n)}\rho^{-n-2}\right]. \end{cases}$$

essendo $c_1^{(n)}, c_2^{(n)}, c_3^{(n)}, c_4^{(n)}$ costanti ed avendo posto:

$$\alpha_k^{(n)} = n[(n-1) - k(n+1)], \quad \beta_k^{(n)} = (n+1)[(n+2) - kn],$$
$$\gamma_k^{(n)} = (1-k)(n-1) - 2k, \quad \delta_k^{(n)} = (1-k)(n+1) - 2k,$$
$$\eta_k^{(n)} = (k-1)n - 2k, \quad \lambda_k^{(n)} = (k-1)(n+2) - 2k.$$

Le funzioni $u_1(\rho,\varphi)$ e $u_2(\rho,\varphi)$ per ogni fissato ρ, interno a (r_1, r_2), ammettono i seguenti sviluppi uniformemente convergenti al variare di φ fra 0 e π:

$$u_1(\rho,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{2}\int_0^\pi u_1(\rho,\psi)\,X_n(\cos\psi)\operatorname{sen}\psi\,d\psi\right)X_n(\cos\varphi),$$

$$u_2(\rho,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{2n(n+1)}\int_0^\pi u_2(\rho,\psi)\,\frac{dX_n(\cos\psi)}{d\psi}\operatorname{sen}\psi\,d\psi\right)\frac{dX_n(\cos\varphi)}{d\varphi}.$$

Segue allora dalle (9) che ogni vettore, soluzione delle (7), si può rappresentare nell'interno di T al modo seguente

$$(10)\quad \begin{cases} u_1(\rho,\varphi) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2}\left[c_1^{(n)}\alpha_k^{(n)}\rho^{n-1} + c_2^{(n)}\beta_k^{(n)}\rho^{n+1} + \right. \\ \qquad \left. + c_3^{(n)}\alpha_k^{(n)}\rho^{-n} + c_4^{(n)}\beta_k^{(n)}\rho^{-n-2}\right]X_n(\cos\varphi), \\ u_2(\rho,\varphi) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{2}\left[c_1^{(n)}\gamma_k^{(n)}\rho^{n-1} + c_2^{(n)}\delta_k^{(n)}\rho^{n+1} + \right. \\ \qquad \left. + c_3^{(n)}\eta_k^{(n)}\rho^{-n} + c_4^{(n)}\lambda_k^{(n)}\rho^{-n-2}\right]\frac{dX_n(\cos\varphi)}{d\varphi}. \end{cases}$$

Si hanno ormai tutti gli elementi per applicare i noti procedimenti del metodo delle proprietà integrali e pervenire alle formole risolutive dei vari problemi al contorno, che possono porsi per le soluzioni del sistema (7). A puro scopo indicativo, occupiamoci di quello consistente nell'assegnare su tutta $\mathfrak{F}T$ un sistema di forze in equilibrio e simmetrico rispetto all'asse z. Ciò equivale ad imporre al vettore u, soluzione delle (7), le seguenti condizioni al contorno

$$(11)\qquad \begin{cases} L_1[u] + f_1'(\varphi) = 0 \quad , \quad L_2[u] + f_2'(\varphi) = 0 \quad \text{per} \quad \rho = r_1 \\ L_1[u] + f_1''(\varphi) = 0 \quad , \quad L_2[u] + f_2''(\varphi) = 0 \quad \text{per} \quad \rho = r_2 , \end{cases}$$

avendo posto:

$$L_1[u(\rho,\varphi)] = 2\frac{\partial u_1}{\partial \rho} + (k-2)\left(\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial(\rho^2 u_1)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho \operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial(\operatorname{sen}\varphi u_2)}{\partial \varphi}\right),$$

$$L_2[u(\rho,\varphi)] = \frac{1}{\rho}\frac{\partial u_1}{\partial \varphi} + \rho\frac{\partial}{\partial \rho}\frac{u_2}{\rho}.$$

Si moltiplichino ambo i membri della prima di queste relazioni per $X_n(\cos\varphi) \times$ $\times \operatorname{sen}\varphi$ e quelli della seconda per $\frac{dX_n(\cos\varphi)}{d\varphi}\operatorname{sen}\varphi$ e, supposto $r_1 < \rho < r_2$, si integri fra 0 e π. Si ottiene:

$$\int_0^\pi L_1[u(\rho,\varphi)]\, X_n(\cos\varphi)\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi = 2\frac{dU_1^{(n)}}{d\rho} + (k-2)\left(\frac{1}{\rho^2}\frac{d\left(\rho^2 U_2^{(n)}\right)}{d\rho} - \frac{1}{\rho}U_2^{(n)}\right)$$

$$\int_0^\pi L_2[u(\rho,\varphi)]\frac{dX_n(\cos\varphi)}{d\varphi}\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi = \frac{n(n+1)}{\rho}U_1^{(n)} + \rho\frac{dU_2^{(n)}}{d\rho}$$

Per la biregolarità della u_1 e della u_2 in T, possiamo nelle soprascritte eguaglianze far tendere ρ ad r_1 oppure ad r_2. Otteniamo in tal modo le seguenti condizioni ai limiti per il sistema (8):

$$\begin{cases} 2\dfrac{dU_1^{(n)}}{d\rho} + (k-2)\left(\dfrac{1}{r_1^2}\dfrac{d\left(\rho^2 U_1^{(n)}\right)}{d\rho} - \dfrac{1}{r_1}U_2^{(n)}\right) + \displaystyle\int_0^\pi f_1'(\varphi)\, X_n(\cos\varphi)\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi = 0 , \\ \dfrac{n(n+1)}{r_1}U_1^{(n)} + r_1\dfrac{dU_2^{(n)}}{d\rho} + \displaystyle\int_0^\pi f_2'(\varphi)\dfrac{dX_n(\cos\varphi)}{d\varphi}\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi = 0 , \end{cases} \qquad \text{per} \quad \rho = r_1$$

$$\begin{cases} 2\dfrac{dU_1^{(n)}}{d\rho} + (k-2)\left(\dfrac{1}{r_2^2}\dfrac{d\left(\rho^2 U_1^{(n)}\right)}{d\rho} - \dfrac{1}{r_2}U_2^{(n)}\right) + \displaystyle\int_0^\pi f_1''(\varphi)\, X_n(\cos\varphi)\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi = 0 , \\ \dfrac{n(n+1)}{r_2}U_1^{(n)} + r_2\dfrac{dU_2^{(n)}}{d\rho} + \displaystyle\int_0^\pi f_2''(\varphi)\dfrac{dX_n(\cos\varphi)}{d\varphi}\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi = 0 , \end{cases} \qquad \text{per} \quad \rho = r_2 .$$

Pertanto, per ogni fissato n, le costanti $c_1^{(n)}, c_2^{(n)}, c_3^{(n)}, c_4^{(n)}$ debbono soddisfare ad un sistema lineare algebrico di quattro equazioni. Scritto tale sistema si riconosce che per ogni $n \neq 1$ il determinante $D_n(r_1, r_2)$ dei coefficienti è diverso da zero. Ciò può constatarsi con il calcolo diretto, oppure – più semplicemente – ponendo mente al fatto che, per $n \neq 1$, il vettore di componenti polari

$$U_1^{(n)}(\rho) X_n(\cos\varphi) \quad , \quad U_2^{(n)}(\rho) \frac{dX_n(\cos\varphi)}{d\varphi} \quad , \quad 0 \, ,$$

comunque si assumano le costanti $c_i^{(n)}$ rappresenta lo spostamento di un punto di T, dovuto ad una effettiva deformazione elastica e mai uno spostamento rigido. Ciò è subito visto passando dalle componenti polari su scritte a quelle cartesiane u_x, u_y, u_z. Se allora per qualche n fosse $D_n(r_1, r_2) = 0$ si avrebbe l'assurdo che esistono deformazioni di T senza che questo sia sottoposto all'azione di alcuna forza e ciò contraddice, dal punto di vista analitico, al noto teorema di unicità per il problema in questione, secondo cui le uniche autosoluzioni sono gli spostamenti rigidi di T, che, nel nostro caso, dovendo essere u (P) contenuto nel piano meridiano passante per P, si riducono alle sole traslazioni parallele all'asse z.

Nel caso $n = 1$ riesce $D_1(r_1, r_2) = 0$ e la matrice di tale determinante ha caratteristica 3, laddove il sistema omogeneo associato ha l'autosoluzione $c_1^{(1)} = 1$, $c_2^{(1)} = c_3^{(1)} = c_4^{(1)} = 0$. Un facile calcolo mostra che la condizione di compatibilità è la seguente

$$\int_0^{\pi} [r_1^2 f_1'(\varphi) - r_2^2 f_1''(\varphi)] \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi - \int_0^{\pi} [r_1^2 f_2'(\varphi) - r_2^2 f_2''(\varphi)] \operatorname{sen}^2\varphi \, d\varphi = 0 \, ,$$

la quale è certo soddisfatta perchè essa altro non esprime se non che il sistema di forze agenti su $\mathfrak{F}T$ è in equilibrio. Calcolate per ogni n le costanti $c_i^{(n)}$, la soluzione è fornita dagli sviluppi in serie (10) ed è determinata a meno di un vettore di componenti $v_1 = c\cos\varphi$, $v_2 = -c\operatorname{sen}\varphi$, che rappresenta una traslazione parallela all'asse di simmetria.

3. In applicazione alle cose dette, supponiamo che T sia pesante e sottoposto sulla superficie esterna a pressione idrostatica. Si tratta allora di determinare il vettore $v \equiv (v_1, v_2)$, verificante in $T - \mathfrak{F}T$ il sistema

$$(12) \quad E_{11}[v_1] + E_{12}[v_2] = p\cos\varphi \quad , \quad E_{21}[v_1] + E_{22}[v_2] = -p\operatorname{sen}\varphi \, ,$$

ove gli E_{ij} indicano gli operatori differenziali che intervengono nei primi membri delle (7), e su $\mathfrak{F}T$ le condizioni

$$L_1[u] = q_0 + q_1 r_2 \cos\varphi \quad , \quad L_2[u] = 0 \, , \qquad \text{per} \quad \rho = r_2 \, ,$$
$$L_1[u] = L_2[u] = 0 \quad , \qquad \text{per} \quad \rho = r_1 \, .$$

Le costanti p e q_1 debbono soddisfare alla seguente condizione (d'equilibrio)

$$(r_2^3 - r_1^3) p + r_2^2 q_1 = 0 \, .$$

Il vettore

$$v_1^* = \frac{p}{2k}\rho^2\cos^3\varphi \quad , \quad v_2^* = -\frac{p}{2k}\rho^2\cos^2\varphi\,\operatorname{sen}\varphi$$

è una soluzione particolare di (12). Posto $u_1 = v_1 - v_1^*$, $u_2 = v_2 - v_2^*$, il vettore $u \equiv (u_1, u_2)$ è soluzione del problema (7), (11), con

$$f_1''(\varphi) = \frac{p}{k}(4k-7)\,r_2\cos^3\varphi - \left[\frac{p(k-2)}{k}r_2 + q_1(3k-4)\right]\cos\varphi\,,$$

$$f_2''(\varphi) = -\frac{2p}{k}\,r_2\cos^2\varphi\,\operatorname{sen}\varphi\,,$$

$$f_1'(\varphi) = \frac{p}{k}(4k-7)\,r_1\cos^3\varphi - \frac{p(k-2)}{k}\,r\cos\varphi\,,$$

$$f_2'(\varphi) = -\frac{2p}{k}r_1\cos^2\varphi\,\operatorname{sen}\varphi\,.$$

Poichè riesce per $n > 3$:

$$\int_0^\pi f_1'(\varphi)\,X_n(\cos\varphi)\,\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi = \int_0^\pi f_1''(\varphi)\,X_n(\cos\varphi)\,\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi = 0\,,$$

$$\int_0^\pi f_2'(\varphi)\,\frac{dX_n(\cos\varphi)}{d\varphi}\,\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi = \int_0^\pi f_2''(\varphi)\,\frac{dX_n(\cos\varphi)}{d\varphi}\,\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi = 0\,,$$

ne segue che la soluzione del problema in questione si esprime in termini finiti, riuscendo tutti nulli i termini della serie (10) con indice maggiore di 3. Per modo che la soluzione si scriverà al modo seguente

$$u_1 = c\cos\varphi + A_1(\rho)\cos\varphi + B_1(\rho)\cos^3\varphi\,,$$

$$u_2 = -c\,\operatorname{sen}\varphi + A_2(\rho)\operatorname{sen}\varphi + B_2(\rho)\cos^2\varphi\,\operatorname{sen}\varphi\,,$$

con

$$A_i(\rho) = a_{i1}\rho^2 + a_{i2}\rho^4 + a_{i3}\rho^{-1} + a_{i4}\rho^{-3} + a_{i5}\rho^{-5}\,,$$

$$B_i(\rho) = b_{i1}\rho^2 + b_{i2}\rho^4 + b_{i3}\rho^{-3} + b_{i4}\rho^{-5} \qquad (i = 1, 2),$$

ed essendo a_{ij} e b_{ij} costanti ben determinate che dipendono unicamente da r_1, r_2, p, q_0, q_1. Tralascio l'elementare calcolo materiale di tali costanti.

Sviluppi in serie. — *Sviluppi in serie della funzione ipergeometrica di Kummer.* Nota di LETTERIO TOSCANO, presentata (*) dal Corrisp. G. SANSONE.

1. In questa Nota mi propongo di sviluppare la funzione ipergeometrica di Kummer in serie di polinomi di Laguerre o di altre funzioni di Kummer a parametri diversi. E tale scopo raggiungo fissando dapprima uno sviluppo più ampio della funzione ipergeometrica confluente Ψ_1 in serie di funzioni di Kummer.

In particolare trovo, fra l'altro, sviluppi della funzione di Hermite di seconda specie e della funzione di Weber del cilindro parabolico in serie di polinomi di Hermite.

2. Prendiamo le mosse dalla funzione ipergeometrica a due variabili

$$(1) \qquad F_2(\alpha;\beta,\beta';\gamma,\gamma';x,y) = \sum_{m,n}^{0\cdots\infty} \frac{(\alpha,m+n)(\beta,m)(\beta',n)}{(\gamma,m)(\gamma',n)\,m!\,n!}\,x^m y^n$$

$$|x|+|y|<1,$$

e particolarmente dal suo sviluppo in serie di potenze della x

$$(2) \qquad F_2(\alpha;\beta,\beta';\gamma,\gamma';x,y) =$$

$$= \sum_m^{0\cdots\infty} \frac{(\alpha,m)(\beta,m)}{(\gamma,m)\,m!}(1-y)^{-\beta'}\,{}_2F_1\left(\gamma'-\alpha-m,\beta',\gamma';\frac{y}{y-1}\right)x^m.$$

Posto $y=-\frac{y}{\beta'}$ e procedendo al limite per $\beta'\to\infty$, dalla (1) si passa alla funzione ipergeometrica confluente

$$\Psi_1(\alpha;\beta;\gamma,\gamma';x,y) = \sum_{m,n}^{0\cdots\infty} \frac{(\alpha,m+n)(\beta,m)}{(\gamma,m)(\gamma',n)\,m!\,n!}\,x^m y^n,$$

e dal fattore della (2)

$$(1-y)^{-\beta'}\,{}_2F_1\left(\gamma'-\alpha-m,\beta',\gamma';\frac{y}{y-1}\right)$$

si ottiene

$$e^y\,{}_1F_1(\gamma'-\alpha-m,\gamma';-y)$$

con la funzione di Kummer

$${}_1F_1(\gamma'-\alpha-m,\gamma';-y) = \sum_r^{0\cdots\infty} \frac{(\gamma'-\alpha-m,r)}{(\gamma',r)\,r!}(-y)^r.$$

Vale allora lo sviluppo

$$(3) \qquad \Psi_1(\alpha;\beta;\gamma,\gamma';x,y) = e^y \sum_m^{0\cdots\infty} \frac{(\alpha,m)(\beta,m)}{(\gamma,m)\,m!}\,{}_1F_1(\gamma'-\alpha-m,\gamma';-y)\,x^m,$$

dal quale ci proponiamo di ricavare risultati notevoli.

(*) Nella seduta del 12 maggio 1949.

Sostituiamo α con $\alpha + 1$, y con $-y$, e poniamo $\gamma' = \alpha + 1$. Poichè

$$ {}_1F_1(-m, \alpha + 1; y) = \frac{m!}{(\alpha + 1, m)} L_m^{(\alpha)}(y), $$

con

$$ L_m^{(\alpha)}(x) = \sum_r^{0 \cdots m} (-1)^r \binom{m+\alpha}{m-r} \frac{x^r}{r!} $$

polinomio di Laguerre generalizzato, segue lo sviluppo per Ψ_1

$$ (4) \qquad \Psi_1(\alpha + 1; \beta; \gamma, \alpha + 1; x, -y) = e^{-y} \sum_m^{0 \cdots \infty} \frac{(\beta, m)}{(\gamma, m)} x^m L_m^{(\alpha)}(y); $$

e da questo, posto $\gamma = \alpha + 1$ e tenendo presente che

$$ \Psi_1(\alpha + 1; \beta; \alpha + 1, \alpha + 1; x, -y) = (1 - x)^{-\beta} e^{-y} {}_1F_1\left(\beta, \alpha + 1; \frac{-xy}{1-x}\right), $$

si ottiene lo sviluppo notevole ($|x| < 1$)

$$ (5) \qquad (1 - x)^{-\beta} {}_1F_1\left(\beta, \alpha + 1; \frac{-xy}{1-x}\right) = \sum_m^{0 \cdots \infty} \frac{(\beta, m)}{(\alpha + 1, m)} x^m L_m^{(\alpha)}(y). $$

Gli sviluppi (4) e (5) si possono ottenere con altro procedimento, che qui riportiamo per illustrare ancora un metodo di studio iniziato in precedente ricerca.

È noto che la funzione ipergeometrica di Gauss soddisfa alla relazione

$$ {}_2F_1(\alpha + 1, \beta, \gamma; x) - {}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; x) = \frac{\beta}{\gamma} x \, {}_2F_1(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1; x), $$

ovvero

$$ \Delta_\alpha \, {}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; x) = \frac{\beta}{\gamma} x \, {}_2F_1(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1; x) $$

con l'operazione di differenza finita

$$ \Delta_\alpha f(\alpha) = f(\alpha + 1) - f(\alpha). $$

Segue

$$ \Delta_\alpha^m \, {}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; x) = \frac{(\beta, m)}{(\gamma, m)} x^m \, {}_2F_1(\alpha + m, \beta + m, \gamma + m; x). $$

Inoltre

$$ e^{-u\Delta_\alpha} \, {}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; x) = \sum_m^{0 \cdots \infty} \frac{(-u)^m}{m!} \Delta_\alpha^m \, {}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma; x) = $$

$$ = \sum_m^{0 \cdots \infty} \frac{(\beta, m)}{(\gamma, m) \, m!} \, {}_2F_1(\alpha + m, \beta + m, \gamma + m; x) (-ux)^m. $$

D'altra parte, introdotta la funzione ipergeometrica a due variabili

$$ (6) \qquad F_1(\alpha; \beta, \beta'; \gamma; x, y) = \sum_{m,n}^{0 \cdots \infty} \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)(\beta', n)}{(\gamma, m+n) \, m! \, n!} x^m y^n \qquad |x| < 1 \; |y| < 1, $$

si ha lo sviluppo in serie di potenze della x

$$ (7) \qquad F_1(\alpha; \beta, \beta'; \gamma; x, y) = $$

$$ = \sum_m^{0 \cdots \infty} \frac{(\alpha, m)(\beta, m)}{(\gamma, m) \, m!} (1 - y)^{\alpha - m} \, {}_2F_1\left(\alpha + m, \gamma - \beta' + m, \gamma + m; \frac{y}{y - 1}\right) x^m. $$

E da questo, posto $x \equiv \frac{x}{\beta}$, procedendo al limite per $\beta \to \infty$, e introducendo la funzione ipergeometrica confluente

$$\Phi_1(\alpha;\beta;\gamma;x,y) = \sum_{m,n}^{0\cdots\infty} \frac{(\alpha, m+n)(\beta, m)}{(\gamma, m+n)\, m!\, n!} x^m y^n,$$

si ha

$$\Phi_1(\alpha;\beta';\gamma;y,x) =$$

$$= \sum_m^{0\cdots\infty} \frac{(\alpha, m)}{(\gamma, m)\, m!} (1-y)^{-\alpha-m}\, {}_2F_1\left(\alpha+m, \gamma-\beta'+m, \gamma+m, \frac{y}{y-1}\right) x^m.$$

Per confronto con il precedente sviluppo di $e^{-u\Delta\alpha}\, {}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;x)$ si ha

$$(1-x)^{-\beta}\, \Phi_1\left(\beta;\gamma-\alpha;\gamma;\frac{x}{x-1},\frac{ux}{x-1}\right) = e^{-u\Delta\alpha}\, {}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;x).$$

Ma la stessa funzione $e^{-u\Delta\alpha}\, {}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;x)$ è uguale ancora a

$$e^{-u\Delta\alpha} \sum_m^{0\cdots\infty} \frac{(\alpha, m)(\beta, m)}{(\gamma, m)\, m!} x^m = \sum_m^{0\cdots\infty} \frac{(\beta, m)}{(\gamma, m)} x^m\, e^{-u\Delta\alpha} \binom{\alpha+m-1}{m},$$

e poichè

$$e^{-u\Delta\alpha} \binom{\alpha+m-1}{m} = L_m^{(\alpha-1)}(u),$$

si deduce (sostituendo α con $\alpha+1$)

$$(8) \qquad (1-x)^{-\beta}\, \Phi_1\left(\beta;\gamma-\alpha-1;\gamma;\frac{x}{x-1},\frac{ux}{x-1}\right) = \sum_m^{0\cdots\infty} \frac{(\beta, m)}{(\gamma, m)} x^m\, L_m^{(\alpha)}(u).$$

Si tratta ora di stabilire un legame tra la Φ_1 e la Ψ_1.

Tra le F_1 e F_2 vale la relazione

$$F_2(\alpha;\beta,\beta';\gamma,\alpha;x,y) = (1-y)^{-\beta'}\, F_1\left(\beta;\alpha-\beta',\beta';\gamma;x,\frac{x}{1-y}\right).$$

Inoltre

$$F_1(\alpha;\beta_1,\beta_2;\gamma;x_1,x_2) = (1-x_1)^{-\alpha}\, F_1\left(\alpha;\gamma-\beta_1-\beta_2,\beta_2;\gamma;\frac{x_1}{x_1-1},\frac{x_1-x_2}{x_1-1}\right),$$

per cui

$$F_2(\alpha;\beta,\beta';\gamma,\alpha;x,y) =$$

$$= (1-y)^{-\beta'}(1-x)^{-\beta}\, F_1\left(\beta;\gamma-\alpha,\beta';\gamma;\frac{x}{x-1},\frac{xy}{(x-1)(y-1)}\right).$$

Posto $y \equiv \frac{y}{\beta'}$ e procedendo al limite per $\beta' \to \infty$ si ha

$$(9) \qquad (1-x)^{-\beta}\, \Phi_1\left(\beta;\gamma-\alpha;\gamma;\frac{x}{x-1},\frac{xy}{1-x}\right) = e^{y}\, \Psi_1(\alpha;\beta;\gamma,\alpha;x,y).$$

In virtù di questa i due sviluppi in serie (4) e (8) coincidono.

Per $\gamma = \alpha + 1$, dallo sviluppo di definizione della Φ_1 si ha subito

$$\Phi_1\left(\beta\,;\,0\,;\,\alpha+1\,;\,\frac{x}{x-1}\,,\,\frac{xy}{1-x}\right) = {}_1F_1\left(\beta\,,\,\alpha+1\,,\,\frac{xy}{1-x}\right),$$

e quindi dalla (8) segue la (5).

Mentre facendo $\gamma = \alpha + 1$ nella (9) (previa sostituzione di α con $\alpha + 1$) si riottiene per altra via la relazione

$$\Psi_1(\alpha+1\,;\beta\,;\,\alpha+1\,,\,\alpha+1\,;\,x\,,\,y) = (1-x)^{-\beta}\,e^{y}\,{}_1F_1\left(\beta\,,\,\alpha+1\,,\,\frac{xy}{1-x}\right).$$

3. Fermiamo ora la nostra attenzione sullo sviluppo (5) che riportiamo

$$(1-x)^{-\beta}\,{}_1F_1\left(\beta\,,\,\alpha+1\,,\,\frac{-xy}{1-x}\right) = \sum_{m}^{0\cdots\infty} \frac{(\beta\,,m)}{(\alpha+1\,,m)}\,x^m\,L_m^{(\alpha)}(y).$$

Per $\beta = \alpha + 1$, poichè

$${}_1F_1\left(\alpha+1\,,\,\alpha+1\,,\,\frac{-xy}{1-x}\right) = e^{\frac{-xy}{1-x}}$$

si ha

$$(10)\qquad (1-x)^{-\alpha-1}\,e^{\frac{-xy}{1-x}} = \sum_{m}^{0\cdots\infty} x^m\,L_m^{(\alpha)}(y)\,, \qquad |x|<1.$$

E per $x \equiv \frac{x}{\beta}$ e $\beta \to \infty$, poichè

$$\lim_{\beta\to\infty} {}_1F_1\left(\beta\,,\,\alpha+1\,,\,\frac{-xy}{\beta}\Big/1-\frac{x}{\beta}\right) = \Gamma(\alpha+1)\,(xy)^{-\frac{\alpha}{2}}\,J_\alpha\left(2\sqrt{xy}\right)$$

con

$$J_\alpha(x) = \sum_{m}^{0\cdots\infty} \frac{(-1)^m\,x^{\alpha+2m}}{2^{\alpha+2m}\,m!\,\Gamma(\alpha+m+1)}$$

funzione di Bessel di prima specie, segue

$$(11)\qquad e^{x}\,(xy)^{-\frac{\alpha}{2}}\,J_\alpha\left(2\sqrt{xy}\right) = \sum_{m}^{0\cdots\infty} \frac{x^m}{\Gamma(\alpha+m+1)}\,L_m^{(\alpha)}(y).$$

I due sviluppi in serie (10) e (11) sono notissimi nello studio delle funzioni generatrici dei polinomi di Laguerre. Il Doetsch ha dimostrato come dall'uno si passa all'altro mediante una trasformazione di Laplace. Mentre qui discendono dallo sviluppo (5) che li generalizza.

Dalla (5) si possono ottenere altri importanti e nuovi sviluppi.

a) Per $\beta = \alpha + n + 1$, con n intero positivo, il primo membro della (5) diventa

$$(1-x)^{-\alpha-n-1}\,{}_1F_1\left(\alpha+n+1\,,\,\alpha+1\,;\,\frac{-xy}{1-x}\right) =$$

$$= (1-x)^{-\alpha-n-1}\,e^{\frac{-xy}{1-x}}\,{}_1F_1\left(-n\,,\,\alpha+1\,;\,\frac{xy}{1-x}\right) =$$

$$= \frac{n!}{(\alpha+1\,,n)}\,(1-x)^{-\alpha-n-1}\,e^{\frac{-xy}{1-x}}\,L_n^{(\alpha)}\left(\frac{xy}{1-x}\right).$$

Vale allora lo sviluppo (Bottema) $(|x|<1)$

$$(12)\quad \frac{n!}{(\alpha+1,n)}(1-x)^{-\alpha-n-1}e^{\frac{-xy}{1-x}}L_n^{(\alpha)}\left(\frac{-xy}{1-x}\right)=\sum_m^{0\cdots\infty}\frac{(\alpha+n+1,m)}{(\alpha+1,m)}x^m L_m^{(\alpha)}(y),$$

ovvero

$$(12')\quad n!(1-x)^{-\alpha-n-1}e^{\frac{-xy}{1-x}}L_n^{(\alpha)}\left(\frac{xy}{1-x}\right)=\sum_m^{0\cdots\infty}\frac{\Gamma(\alpha+n+m+1)}{\Gamma(\alpha+m+1)}x^m L_m^{(\alpha)}(y).$$

b) Per $\beta=\frac{\alpha+1}{2}$ si può applicare al primo membro della (5) la formula di Kummer

$${}_1F_1\left(\frac{\alpha+1}{2},\alpha+1;u\right)=\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)\left(\frac{-4i}{u}\right)^{\frac{\alpha}{2}}e^{\frac{u}{2}}J_\alpha\left(\frac{-u}{2i}\right)\qquad i^2=-1.$$

Questa formula si può ricavare facilmente dalla nostra relazione integrale

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x}x^{\sigma-\alpha-1}\left|J_\alpha(\sqrt{x})\right|^2dx=$$

$$=\frac{\Gamma(\sigma)}{\{\Gamma(\alpha+1)\}^2\,2^{2\alpha}\lambda^\sigma}\,{}_2F_2\left(\sigma,\alpha+\frac{1}{2},\alpha+1,2\alpha+1;\frac{-1}{\lambda}\right).$$

Basta porre in essa $\sigma=\alpha+1$, confrontare con l'integrale di Sonine

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x}\left|J_\alpha(\sqrt{x})\right|^2dx=\frac{i^\alpha}{\lambda}e^{\frac{-1}{2\lambda}}J_\alpha\left(\frac{1}{2i\lambda}\right),$$

sostituire α con $\frac{\alpha}{2}$ e $\frac{1}{\lambda}$ con $-u$.

Ciò premesso, dalla (5) si deduce $(|x|<1)$

$$(13)\quad \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)(1-x)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{4i}{xy}\right)^{\frac{\alpha}{2}}e^{\frac{-xy}{2(1-x)}}J_\alpha\left[\frac{xy}{2i(1-x)}\right]=$$

$$=\sum_m^{0\cdots\infty}\frac{\left(\frac{\alpha+1}{2},m\right)}{(\alpha+1,m)}x^m L_m^{(\alpha)}(y).$$

Per $\alpha=0$ si ha in particolare

$$(13')\quad (1-x)^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{-xy}{2(1-x)}}J_0\left[\frac{xy}{2i(1-x)}\right]=\sum_m^{0\cdots\infty}\frac{\left(\frac{1}{2},m\right)}{m!}x^m L_m(y),$$

ovvero

$$(13'')\quad (1-x)^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{-xy}{2(1-x)}}J_0\left[\frac{xy}{2i(1-x)}\right]=\sum_m^{0\cdots\infty}\binom{2m}{m}\left(\frac{x}{4}\right)^m L_m(y).$$

c) Per $\alpha = \pm \frac{1}{2}$ e $\beta = -n \pm \frac{1}{2}$ si possono sviluppare le funzioni di Hermite di seconda specie

$$h_{2n}(x) = (-1)^n 2^n n! \, x \, {}_1F_1\left(-n + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \frac{x^2}{2}\right)$$

$$h_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1} 2^n n! \, {}_1F_1\left(-n - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{x^2}{2}\right)$$

in serie di polinomi di Hermite

$$H_{2n}(x) = \frac{(2n)!}{(-2)^n n!} \, {}_1F_1\left(-n, \frac{1}{2}; \frac{x^2}{2}\right) = (-2)^n n! \, L_n^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

$$H_{2n+1}(x) = \frac{(2n+1)!}{(-2)^n n!} \, x \, {}_1F_1\left(-n, \frac{3}{2}; \frac{x^2}{2}\right) = (-2)^n n! \, x \, L_n^{\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{x^2}{2}\right).$$

Infatti dalla (5), con lieve cambiamento di variabili, si ottengono i due sviluppi ($|x| < 1$)

$$(14) \qquad \frac{(-1)^n (1+x)^n}{2^n n! \sqrt{x}} \, h_{2n}\left(y \sqrt{\frac{x}{1+x}}\right) = \sum_m^{0 \ldots \infty} \frac{\left(-n + \frac{1}{2}, m\right)}{\left(\frac{3}{2}, m\right) m!} \left(\frac{x}{2}\right)^m H_{2m+1}(y)$$

$$(15) \qquad \frac{(-1)^{n+1} (1+x)^{n+\frac{1}{2}}}{2^n n!} \, h_{2n+1}\left(y \sqrt{\frac{x}{1+x}}\right) = \sum_m^{0 \ldots \infty} \frac{\left(-n - \frac{1}{2}, m\right)}{\left(\frac{1}{2}, m\right) m!} \left(\frac{x}{2}\right)^m H_{2m}(y).$$

d) Troviamo ora lo sviluppo della funzione di Weber del cilindro parabolico in serie di polinomi di Hermite.

Dalla (5) per $\alpha = -\frac{1}{2}$ e $\beta = -\frac{\nu}{2}$, oppure per $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{-\nu+1}{2}$, si hanno i due sviluppi

$$(1-x)^{\frac{\nu}{2}} \, {}_1F_1\left(\frac{-\nu}{2}, \frac{1}{2}; \frac{-xy}{1-x}\right) = \sum_m^{0 \ldots \infty} \frac{\left(\frac{-\nu}{2}, m\right)}{(2m)!} (-2x)^m H_{2m}(\sqrt{2y})$$

$$(1-x)^{\frac{\nu-1}{2}} \, {}_1F_1\left(\frac{-\nu+1}{2}, \frac{3}{2}; \frac{-xy}{1-x}\right) = \sum_m^{0 \ldots \infty} \frac{\left(\frac{-\nu+1}{2}, m\right)}{(2m+1)!} \frac{(-2x)^m}{\sqrt{2y}} H_{2m+1}(\sqrt{2y}).$$

Introdotta la funzione di Weber

$$D_\nu(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{-\nu+1}{2}\right)} 2^{\frac{\nu}{2}} e^{-\frac{z^2}{4}} \, {}_1F_1\left(\frac{-\nu}{2}, \frac{1}{2}; \frac{z^2}{2}\right) +$$

$$+ \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{-\nu}{2}\right)} 2^{\frac{\nu-1}{2}} e^{-\frac{z^2}{4}} z \, {}_1F_1\left(\frac{-\nu+1}{2}, \frac{3}{2}; \frac{z^2}{2}\right)$$

segue

$$(1-x)^{\frac{\nu}{2}} e^{\frac{1}{2}\frac{xy}{x-1}} D_\nu\left(\sqrt{\frac{2xy}{x-1}}\right) =$$

$$= \frac{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{-\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{-\nu}{2}\right)} \sum_m^{0\ldots\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{-\nu}{2}+m\right)}{(2m)!}(-2x)^m H_{2m}\left(\sqrt{2y}\right) +$$

$$+ \frac{2^{\frac{\nu-1}{2}}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{-\nu}{2}\right)}\sqrt{-x} \sum_m^{0\ldots\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{-\nu+1}{2}+m\right)}{(2m+1)!}(-2x)^m H_{2m+1}\left(\sqrt{2y}\right).$$

Intanto

$$\Gamma\left(\frac{-\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{-\nu}{2}\right) = 2^{\nu+1}\sqrt{\pi}\,\Gamma(-\nu)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad , \quad \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}\,;$$

e sostituendo ancora x con $\frac{-x^2}{2}$ e y con $\frac{y^2}{2}$ si ha

$$2\Gamma(-\nu)(x^2+2)^{\frac{\nu}{2}} e^{\frac{1}{4}\frac{x^2+y^2}{x^2+2}} D_\nu\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+2}}\right) =$$

$$= \sum_m^{0\ldots\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{-\nu+2m}{2}\right)}{(2m)!} x^{2m} H_{2m}(y) - \sum_m^{0\ldots\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{-\nu+2m+1}{2}\right)}{(2m+1)!} x^{2m+1} H_{2m+1}(y).$$

Da questa si ottiene infine

$$(16)\quad 2\Gamma(-\nu)(x^2+2)^{\frac{\nu}{2}} e^{\frac{1}{4}\frac{x^2+y^2}{x^2+2}} D_\nu\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+2}}\right) = \sum_m^{0\ldots\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{-\nu+m}{2}\right)}{m!}(-x)^m H_m(y).$$

4. Ritorniamo alla (3) e, lasciando $\gamma' \neq \alpha$, facciamo $\beta = \gamma$. Si ha

$$\Psi_1 = \sum_{m,n}^{0\ldots\infty} \frac{(\alpha, m+n)}{(\gamma', n)\, m!\, n!} x^m y^n = \sum_n^{0\ldots\infty} \frac{y^n}{n!\,(\gamma', n)} \sum_m^{0\ldots\infty} \frac{(\alpha, m+n)}{m!} x^m =$$

$$= \sum_n^{0\ldots\infty} \frac{(\alpha, n)}{(\gamma', n)\, n!} y^n \sum_m^{0\ldots\infty} \frac{(\alpha+n, m)}{m!} x^m = \sum_n^{0\ldots\infty} \frac{(\alpha, n)}{(\gamma', n)\, n!} y^n (1-x)^{-\alpha-n} =$$

$$= (1-x)^{-\alpha} \sum_n^{0\ldots\infty} \frac{(\alpha, n)}{(\gamma', n)\, n!}\left(\frac{y}{1-x}\right)^n = (1-x)^{-\alpha} {}_1F_1\left(\alpha, \gamma'; \frac{y}{1-x}\right);$$

e così si perviene alla formula di riduzione

$$\Psi_1(\alpha; \beta; \beta, \gamma'; x, y) = (1-x)^{-\alpha} {}_1F_1\left(\alpha, \gamma'; \frac{y}{1-x}\right).$$

Vale allora lo sviluppo ($|x|<1$)

$$(17)\quad (1-x)^{-\alpha} e^{-y}\,{}_1F_1\left(\alpha,\gamma';\frac{y}{1-x}\right)=\sum_m^{0\cdots\infty}\frac{(\alpha,m)}{m!}x^m\,{}_1F_1(\gamma'-\alpha-m,\gamma';-y).$$

Se $\gamma'=2\alpha$, applicando la formula di Kummer, si ha

$$(18)\quad \Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)(1-x)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{-4i}{y}\right)^{\alpha-\frac{1}{2}} e^{\frac{y(2x-1)}{2(1-x)}}\,J_{\alpha-\frac{1}{2}}\left[\frac{-y}{2i(1-x)}\right]=$$
$$=\sum_m^{0\cdots\infty}\frac{(\alpha,m)}{m!}x^m\,{}_1F_1(\alpha-m,2\alpha;-y).$$

Se $\alpha=1$ e $\gamma'=\frac{3}{2}$ la (17) ci dà

$$\frac{e^{-y}}{1-x}\,{}_1F_1\left(1,\frac{3}{2};\frac{y}{1-x}\right)=\sum_m^{0\cdots\infty}x^m\,{}_1F_1\left(-m+\frac{1}{2},\frac{3}{2};-y\right).$$

E questa, introducendo la funzione di Hermite di seconda specie e di indice pari, diventa

$$\frac{e^{\frac{xy}{1-x}}}{\sqrt{1-x}}\,h_0\left(\sqrt{\frac{-2y}{1-x}}\right)=\sum_m^{0\cdots\infty}\left(\frac{-x}{2}\right)^m\frac{h_{2m}\left(\sqrt{-2y}\right)}{m!}.$$

Sostituendo poi x con $-x$ e $-2y$ con y^2 si ha il notevole sviluppo ($|x|<1$)

$$(19)\quad \frac{e^{\frac{xy^2}{2(1+x)}}}{\sqrt{1+x}}\,h_0\left(\frac{y}{\sqrt{1+x}}\right)=\sum_m^{0\cdots\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^m\frac{h_{2m}(y)}{m!}.$$

Facendo invece nella (17) $\alpha=1$ e $\gamma'=\frac{1}{2}$, si ottiene analogamente ($|x|<1$)

$$(20)\quad \frac{e^{\frac{xy^2}{2(1+x)}}}{1+x}\,h_1\left(\frac{y}{\sqrt{1+x}}\right)=\sum_m^{0\cdots\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^m\frac{h_{2m+1}(y)}{m!}$$

per le funzioni di Hermite di seconda specie e di indice dispari.

Meccanica. — *Deduzione dalla meccanica statistica di una legge di dipendenza della compressibilità dei solidi dalla temperatura.* Nota di PIERO GIORGIO BORDONI, presentata (*) dal Socio A. SIGNORINI.

1. SCOPO DEL LAVORO. – La dipendenza delle costanti elastiche dei solidi dalla temperatura è stata considerata sinora sotto un aspetto prevalentemente empirico, ed i tentativi di dedurre una legge di dipendenza per via teorica non hanno condotto a risultati concreti (1).

In questa Nota viene succintamente esposto come l'uso di metodi statistici e la scelta di una opportuna forma dell'equazione di stato abbiano permesso di

(*) Nella seduta del 12 maggio 1949.

(1) L. BRILLOUIN, *Les tenseurs en mécanique et en élasticité*. Dover Ed., New York, p. 341 (1946).

superare le difficoltà che sinora erano state incontrate, e di determinare una relazione tra la compressibilità isotermica χ e la temperatura assoluta T che si accorda soddisfacentemente con i dati dell'esperienza.

Tale relazione è stata ottenuta con procedimenti di carattere sostanzialmente meccanico, analoghi a quelli adoperati nel calcolo del calore specifico [2] e della dilatazione termica [3], considerando cioè un solido, costituito da N atomi, come un insieme di $3N$ oscillatori quantizzati [4], e scegliendo come coordinate lagrangiane le ampiezze dei modi di vibrazione. In questa maniera gli oscillatori risultano sensibilmente indipendenti tra di loro, e, in condizioni di equilibrio statistico, le loro proprietà corrispondono a quelle di un opportuno *insieme canonico quantizzato*.

La legge di dipendenza delle variazioni relative di compressibilità che è stata dedotta ha carattere universale, in quanto la sua espressione è identica per tutti i solidi che rientrano nello schema meccanico considerato; le proprietà fisiche delle diverse sostanze risultano sintetizzate in un unico coefficiente moltiplicativo, e la variabile indipendente è data, come nel caso del calore specifico del rapporto tra la temperatura assoluta e la temperatura di Debye ϑ.

2. Calcolo della compressibilità in base all'equazione di stato. – Tra il volume V di un solido, il suo volume V_0 allo zero assoluto ed in assenza di pressione, e la pressione P alla temperatura T sussiste la seguente relazione, valida per tutte le deformazioni elastiche che lasciano inalterata la forma del solido stesso, quando si arresti al secondo ordine lo sviluppo dell'energia potenziale elastica

$$(1) \qquad P = P_1^{(0)}\left(\frac{V_0 - V}{V_0}\right) + P_2^{(0)}\left(\frac{V_0 - V}{V_0}\right)^2 + \frac{1}{V}\sum_{j=1}^{3N} \gamma_j \frac{h\nu_j}{e^{\frac{h\nu_j}{kT}} - 1}$$

dove: h, k = costanti di Plank e di Boltzmann;

$$\gamma_j = -\frac{\partial \log \nu_j}{\partial \log V} \text{ coefficiente di Gruneisen;}$$

ν_j = autofrequenze del solido.

I due primi termini del secondo membro della (1) corrispondono allo sviluppo in serie dell'energia potenziale del reticolo atomico allo zero assoluto, e pertanto $P_1^{(0)}$ e $P_2^{(0)}$ sono indipendenti da T; il terzo termine corrisponde all'effetto dell'agitazione termica degli atomi.

Per rendere il calcolo più rapido, al posto della compressibilità conviene in un primo tempo procurarsi il suo inverso che è dato da $-V(\partial P/\partial V)_T$. Va osservato che la sommatoria della (1) dipende da V anche attraverso le ν_j.

(2) B. Finzi, *Meccanica Razionale*. Zanichelli Ed., Bologna, vol. II, p. 421 (1946).

(3) J. C. Slater, *Introduction to Chemical Physics*. Mc. Graw-Hill Ed., New York, p. 219 (1939).

(4) Le $3N$ coordinate debbono soddisfare a 6 relazioni esprimenti l'annullarsi di ogni variazione della quantità di moto e del suo momento in assenza di forze esterne, ma è evidentemente lecito confondere $3N-6$ con $3N$.

Supporremo con Grüneisen, che i $3N$ parametri γ_j siano indipendenti dalla particolare autofrequenza considerata e dalla temperatura, cioè che sia:

$$(2) \qquad \gamma_j = \gamma \quad ; \quad \frac{\partial \nu_j}{\partial V} = -\frac{\nu_j}{V}\gamma \quad ; \quad \frac{\partial \gamma}{\partial T} = 0 ,$$

e si ha allora per l'inverso della compressibilità:

$$(3) \qquad \frac{1}{\chi} = \frac{V}{V_0}\left\{ P_1^{(0)} + 2P_2^{(0)}\left(\frac{V_0 - V}{V_0}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\gamma}{V_0}\left[(1+\gamma)\sum_{j=1}^{3N} \frac{h\nu_j}{e^{\frac{h\nu_j}{kT}} - 1} - \frac{\gamma}{kT}\sum_{j=1}^{3N} \frac{h^2 \nu_j^2 e^{\frac{h\nu_j}{kT}}}{\left(e^{\frac{h\nu_j}{kT}} - 1\right)^2} \right] \right\} .$$

Al posto dello spettro discreto di autofrequenze si può sostituire un opportuno spettro continuo, come si fà nel calcolo del calore specifico o della dilatazione. Assumendo proprio la distribuzione statistica di frequenze proposta da Debye (5), secondo la quale in numero dN di autofrequenze nell'intervallo $d\nu$ è dato da:

$$dN = 4\pi\nu^2 V\left(\frac{1}{v_l^3} + \frac{2}{v_t^3}\right) d\nu$$

dove v_l, v_t velocità di propagazione delle onde elastiche longitudinali e trasversali.

Assumendo come frequenza massima il seguente valore ν_m, in modo che il numero totale di autofrequenze sia proprio $3N$

$$(5) \qquad \nu_m = \left[\frac{9}{4\pi}\frac{N}{V}\frac{1}{\frac{1}{v_l^3} + \frac{2}{v_t^3}} \right]^{\frac{1}{3}} ,$$

la (3) assume dopo qualche trasformazione la forma:

$$(6) \qquad \frac{1}{\chi} = \frac{V}{V_0}\left\{ P_1^{(0)} + 2P_2^{(0)}\left(\frac{V_0 - V}{V_0}\right) + \gamma\frac{9Nk\vartheta}{V_0}\left[\frac{1 - 3\gamma}{3}\frac{D(x_0)}{x_0} + \gamma\frac{1}{e^{x_0} - 1} \right] \right\}$$

dove:

$$D(x_0) = \frac{3}{x_0^3}\int_0^{x_0} \frac{x^3}{e^x - 1}\, dx \quad ; \quad x = h\nu/kT \quad ; \quad x_0 = h\nu_m/kT = \vartheta/T .$$

Per completare il calcolo della compressibilità occorre esprimere le costanti $P_1^{(0)}$ e $P_2^{(0)}$ che figurano nella (6) in funzione di parametri fisicamente più significativi; ciò può essere fatto osservando che allo zero assoluto, ed in assenza di pressione, il secondo membro della (6) si riduce a $P_1^{(0)} = 1/\chi_0$. Sempre alla stessa

(5) Una migliore approssimazione potrebbe evidentemente ottenersi, a costo di una notevole complicazione dei calcoli, tenendo conto della variazione della velocità di propagazione con la frequenza, e della condizione di minima lunghezza d'onda. Si veda in proposito: L. BRILLOUIN, *Wave propagation in periodic structures*. Mc. Graw-Hill Ed., New York, p. 162 (1946).

temperatura si ha, considerando ora direttamente la compressibilità χ, e limitando i calcoli, come sarà fatto anche in seguito, ai primi termini dello sviluppo:

$$\chi = \chi_0 \frac{V_0}{V}\left[1 - 2\frac{P_2^{(0)}}{P_1^{(0)}}\left(\frac{V_0 - V}{V_0}\right)\right] \tag{7}$$

da cui, derivando logaritmicamente rispetto a V, e calcolando la derivata in $V = V_0$:

$$\left[\frac{\partial \log \chi}{\partial \log V}\right]_{V=V_0} = 2\frac{P_2^{(0)}}{P_1^{(0)}} - 1 . \tag{8}$$

Se si indica con ν una qualsiasi autofrequenza del solido, la compressibilità riesce proporzionale a V/ν^2, e si ha in definitiva [6]:

$$\frac{P_2^{(0)}}{P_1^{(0)}} = \gamma + 1 . \tag{9}$$

D'altra parte le variazioni relative di volume $(V_0 - V)/V_0$ al variare della temperatura sono date, a meno del segno, dall'integrale rispetto a T del coefficiente di dilatazione cubica α, che è a sua volta una funzione di χ, γ, V e del calore specifico c_v [7]; si ha cioè:

$$\left(\frac{V_0 - V}{V_0}\right) = -\int_0^T \alpha\, dT = -\frac{\gamma\chi_0}{V_0}\int_0^T c_v\, dT = -\gamma\chi_0 \frac{3Nk\vartheta}{V_0}\frac{D(x_0)}{x_0} \tag{10}$$

sostituendo le (8) (10) nella (6), e raccogliendo i termini comuni, si ha l'espressione della compressibilità:

$$\chi = \chi_0\left[1 + \frac{9N_0 k\vartheta}{A_m}\rho_0\gamma^2\chi_0\left(\frac{5}{3}\frac{D\left(\frac{\vartheta}{T}\right)}{\frac{\vartheta}{T}} - \frac{1}{e^{\frac{\vartheta}{T}} - 1}\right)\right] \tag{11}$$

dove N_0 = numero di Avogadro; ρ_0 = densità; A_m = massa atomica.

3. Significato fisico della (11) e suo accordo con i dati sperimentali. – La (11) da una legge di dipendenza della compressibilità isotermica dalla temperatura analoga a quelle determinate da Debye e da Grüneisen per il calore specifico e la dilatazione termica. Le proprietà fisiche del solido considerato sono sintetizzate nel coefficiente che figura nel secondo membro, mentre la legge di variazione ha lo stesso andamento per tutti i solidi [8], purchè sia riferita al rapporto tra la temperatura di Debye e la temperatura assoluta.

(6) La (8) coincide sensibilmente, in quanto è generalmente $\gamma = 2$, con la relazione analoga ottenuta nel lavoro citato nella nota (3), p. 239 formula (4. 6), partendo da ipotesi considerevolmente diverse.

(7) Op. citata nella nota (3), p. 219.

(8) È sottintesa la condizione che essi possano essere schematizzati come un insieme di oscillatori indipendenti e che valga la distribuzione di frequenza adottata.

Si può osservare che in sostanza le variazioni di χ in base ai calcoli svolti, sono date dalla somma delle corrispondenti variazioni dei termini di ordine zero e di ordine uno rispetto a $(V_0 - V)/V_0$ nello sviluppo in serie della sommatoria che figura nella (11). Del termine di ordine zero, che caratterizza la pressione di radiazione delle onde elastiche dovute all'agitazione termica [9], si tiene conto indirettamente, esprimendo il secondo termine della (6) in funzione del coefficiente di dilatazione termica.

Il termine del primo ordine in $(V_0 - V)/V_0$ è stato invece calcolato direttamente, e corrisponde all'espressione in parentesi quadre nel secondo membro della (6).

Nei pressi dello zero assoluto la funzione di ϑ/T che figura nella (11) è infinitesima del quarto ordine; la derivata della compressibilità rispetto alla temperatura è quindi infinitesima del terzo ordine, proprio come c_v ed α.

I risultati della teoria svolta sono stati controllati confrontando le variazioni, in funzione della temperatura, dei moduli di elasticità adiabatici calcolati mediante la (11) e mediante le note relazioni termodinamiche, con le variazioni rilevate sperimentalmente misurando la velocità delle onde elastiche longitudinali in sbarre sottili [10]. Si vede che per uno stesso valore ϑ/T i valori del coefficiente strutturale che figura nel secondo membro della (11) relativi a materiali diversi debbono stare tra loro sensibilmente nello stesso rapporto delle variazioni relative delle autofrequenze dei provini su cui si esegue la misura, cioè debbono essere proporzionali a $(\nu_0 - \nu)/\nu_0$ essendo ν_0 l'autofrequenza misurata nei pressi dello zero assoluto, e ν il suo valore alla temperatura T.

I valori del coefficiente strutturale indicato sono dati nella Tabella seguente, per quattro metalli aventi temperature di Debye molto diverse, e per i quali sono stati misurati sperimentalmente i valori di $(\nu_0 - \nu)/\nu_0$ dalla temperatura di 4,5 K° fino a temperatura ambiente (fig. 1).

TABELLA.

Valori del coefficiente $C = \frac{9 N_0 k \vartheta}{A_m} \rho_0 \gamma^2 \chi_0$ *per diversi metalli.*

Unità c. g. s. *e temperatura in gradi assoluti* [11].

Metallo	ϑ	ρ_0	γ	χ_0	A_m	C
Al	398°	2,7	2,17	1,37 10-12	27	19,1 10-2
Cu	315°	8,95	1,96	0,73	63,6	9,16
Ag	215°	10,50	2,40	1,01	107,9	9,05
Pb	88°	11,35	2,73	2,42	207	6,52

(9) Si veda in proposito l'opera citata nella nota (1), p. 335.

(10) Sui dettagli sperimentali di tale misura sarà riferito in altra sede.

(11) Per i valori di γ e di χ_0 si veda ad esempio: M. J. DRUYVENSTEIN, *Some remarks on the thermal expansion and the Poisson contraction of the cubic metals.* « Philips Research Reports », 1, p. 77 (1940).

Si vede che la legge di variazione di $(\nu_0 - \nu)/\nu_0$ è proprio quella corrispondente alla funzione (11); inoltre, come è indicato dai valori della Tabella, a parità di T/ϑ, le variazioni maggiori di compressibilità, e quindi di frequenza, sono quelle subìte dall'alluminio, seguìto nell'ordine dal rame, dall'argento e dal piombo. Va osservato che, date le notevoli differenze della temperatura di Debye nei quattro metalli considerati, l'ordine in cui si succedono le variazioni di frequenza è strettamente legato all'uso della variabile T/ϑ; se ci si riferisce

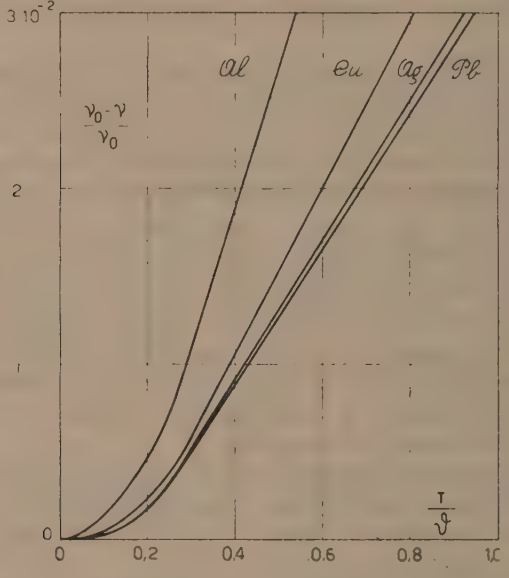


Fig. 1. – Variazioni relative di un'autofrequenza longitudinale ν misurate sperimentalmente su campioni di alluminio, rame, argento, piombo, in funzione del rapporto T/ϑ.

invece direttamente alla temperatura assoluta è il piombo che subisce le variazioni maggiori.

Per valori piccoli del rapporto T/ϑ, cioè quando nel secondo membro della (11) $(e^{\frac{\vartheta}{T}} - 1)^{-1}$ è trascurabile di fronte a $\frac{5}{3}\frac{T}{\vartheta} D\left(\frac{\vartheta}{T}\right)$ l'accordo quantitativo tra le variazioni di frequenza calcolate e quelle sperimentali è soddisfacente, mentre a temperatura più elevata la compressibilità, per il fatto stesso di essere una derivata seconda, è più sensibile del calore specifico, che è una derivata prima, alle approssimazioni introdotte nei calcoli, ed in particolare alla sostituzione dello spettro di frequenza con la semplice distribuzione data dalla (4), e va quindi scostandosi dai dati sperimentali.

Meccanica. — *Sulla stabilità delle vibrazioni quasi armoniche di un sistema dissipativo* (*). Nota di RENATO NARDINI, presentata (**) dal Corrisp. G. SANSONE.

1. È noto (1) che il moto di un sistema dissipativo a un sol grado di libertà soggetto a forze elastiche variabili periodicamente col tempo è retto, nell'intorno della configurazione di equilibrio $y = 0$, da un'equazione differenziale del tipo

$$y'' + 2cy' + \omega^2(t)\, y = 0 \tag{1}$$

dove c è una costante positiva dipendente dall'intensità delle azioni dissipative ed $\omega(t)$ è una funzione periodica il cui periodo sarà indicato con $T > 0$.

Detto M il massimo di $\omega(t)$, nell'ipotesi che $\omega(t)$ sia continua, il professore R. Einaudi (2), per $c \geqq M$, ha dimostrato che l'integrale generale di (1) tende a zero per $t \to +\infty$ e quindi la configurazione $y = 0$ è di equilibrio stabile per qualunque T di ω, mentre, per $c < M$, ha esposto un procedimento generale che permette di determinare i limiti delle zone di stabilità e instabilità in relazione ai valori di c e di T, costruendo infine una funzione $T^*(c)$, che approssima per difetto la funzione $T_1(c)$, limite superiore della prima zona di stabilità.

Nel presente lavoro *si suppone* $\omega(t) > 0$, *limitata e continua con derivata prima continua.* Nel n. 2 si dimostra *che ogni integrale di* (1) *e la sua derivata prima tendono a zero per* $t \to +\infty$ *(e quindi si ha stabilità), se è soddisfatta la condizione*

$$c > \frac{1}{2} \max \left| \frac{\omega'}{\omega} \right|$$

dove la notazione $\max \left| \frac{\omega'}{\omega} \right|$ *sta a indicare il massimo del modulo di* $\frac{\omega'(t)}{\omega(t)}$. Nel n. 3 *si suppone che* ω *abbia un numero finito di punti estremanti nell'intervallo* $(t_0 - t_0 + T)$ *e, detto* $m > 0$ *il minimo di* ω, *nell'ipotesi che sia* $c < m$, *si ricava che, fissato* c, *ogni integrale di* (1) *e la sua derivata prima tendono a zero per* $t \to +\infty$, *se* T *è superiore a una funzione di* c *e dei valori estremi relativi di* ω; *tale funzione quindi approssima per eccesso il limite superiore dell'ultima zona di instabilità* (3).

Nel n. 4 si dà un esempio pratico di applicazione dei due risultati facendo vedere che, anche mediante il primo di essi, si può approssimare per eccesso il limite superiore suddetto.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Matematico dell'Università di Ferrara.

(**) Nella seduta del 12 maggio 1949.

(1) Si veda ad esempio il trattato di G. KRALL (redatto con la collaborazione di R. EINAUDI), *Meccanica tecnica delle vibrazioni.* Parte I, Cap. II.

(2) R. EINAUDI, *Sulle vibrazioni quasi armoniche d'un sistema dissipativo.* « Atti dell'Istituto Veneto 1935-36 », tomo XCV. Parte II.

(3) È probabile che un risultato simile valga anche senza la restrizione $c < m$. È mio proposito eseguire in seguito una ricerca in tal senso.

2. Per dimostrare il primo enunciato, preso un numero σ tale che sia $0 < \sigma \leq c$, possiamo porre $c = p + \sigma$, con $p \geq 0$ e quindi eseguire nella (1) un cambiamento della funzione incognita mediante la trasformazione

$$y = e^{-\sigma t} \cdot z \tag{2}$$

ottenendo l'equazione

$$z'' + 2pz' + [\omega^2(t) - \sigma(\sigma + 2p)]z = 0.$$

Si può porre

$$\omega^2(t) - \sigma(\sigma + 2p) = \alpha^2(t) \qquad \text{con} \quad \alpha^2(t) > 0,$$

purchè si prenda σ sufficientemente piccolo. Infatti l'uguaglianza sopra scritta vale sicuramente se è

$$m^2 > \sigma(\sigma + 2p);$$

ma essendo

$$\sigma(\sigma + 2p) = \sigma(2c - \sigma)$$

basta che sia

$$m^2 > 2\sigma c$$

e quindi è sufficiente supporre

$$\sigma < \frac{m^2}{2c}. \tag{3}$$

Si ha allora l'equazione

$$z'' + 2pz' + \alpha^2(t)z = 0. \tag{1'}$$

Si consideri la funzione

$$\Lambda^2(t) = z^2(t) + \frac{z'^2(t)}{\alpha^2(t)}$$

dove $z(t)$ è un integrale qualunque della (1'); tale funzione è sempre > 0 se si esclude la soluzione $z \equiv 0$, e per la sua derivata si ha la relazione

$$\frac{d\Lambda^2}{dt} = 2zz' + \frac{2z'z''}{\alpha^2} + z'^2 \frac{d}{dt}\frac{1}{\alpha^2} = \frac{2z'(z'' + \alpha^2 z)}{\alpha^2} - z'^2 \frac{2\alpha'}{\alpha^3}$$

e ricordando la (1') si ottiene

$$\frac{d\Lambda^2}{dt} = 2\frac{z'^2}{\alpha^2}\left(-2p - \frac{\alpha'}{\alpha}\right). \tag{4}$$

Ora, se è

$$p \geq \frac{1}{2} \max\left|\frac{\alpha'}{\alpha}\right| \tag{5}$$

tale derivata è sempre ≤ 0 e la funzione Λ^2 risulta non crescente; indicando con t_0 il valore iniziale del tempo si ha quindi

$$z^2(t) + \frac{z'^2(t)}{\alpha^2(t)} \leq z^2(t_0) + \frac{z'^2(t_0)}{\alpha^2(t_0)} = C_0.$$

Ritornando alla (1), poichè da (2) si ottiene,

$$z^2(t) + \frac{z'^2(t)}{\alpha^2(t)} = \left[y^2(t) + \frac{[\sigma y(t) + y'(t)]^2}{\alpha^2(t)}\right] e^{2\sigma t} \tag{6}$$

si conclude che

$$y^2(t) + \frac{[\sigma y(t) + y'(t)]^2}{\omega^2 - \sigma(2p + \sigma)} \leq e^{-2\sigma t} C_0$$

cioè qualunque integrale della (1) e la sua derivata prima tendono a zero per $t \to +\infty$, purchè valga la relazione, dedotta dalla (5),

$$(5') \qquad c - \sigma \geqq \frac{1}{2} \max \left| \frac{\omega'}{\omega - \frac{\sigma(2c - \sigma)}{\omega}} \right| .$$

È poi facile vedere che, se vale la relazione

$$(7) \qquad c > \frac{1}{2} \max \left| \frac{\omega'}{\omega} \right|$$

vale anche la (5') per un'opportuna scelta di σ; infatti si ponga per esempio

$$c = \frac{1}{2} \max \left| \frac{\omega'}{\omega} \right| + \eta \qquad \text{con} \qquad \eta > 0 .$$

Si imponga ulteriormente a σ di essere $\leq \frac{\eta}{2}$; allora

$$c - \sigma \geqq \frac{1}{2} \max \left| \frac{\omega'}{\omega} \right| + \frac{\eta}{2}$$

e affinchè si abbia

$$\frac{1}{2} \left| \frac{\omega'}{\omega} \right| + \frac{\eta}{2} > \frac{1}{2} \frac{|\omega'|}{\omega - \frac{2\sigma c}{\omega}} > \frac{1}{2} \frac{|\omega'|}{\omega - \frac{\sigma(2c - \sigma)}{\omega}}$$

basta che sia, oltre alla (3),

$$\sigma < \min \left\{ \frac{\omega^2}{2c} \left[1 - \frac{|\omega'|}{|\omega'| + \eta\omega} \right] \right\} .$$

Con questo il primo enunciato risulta dimostrato.

OSSERVAZIONE. – Il ragionamento seguìto vale anche se si suppone la c funzione positiva di t ed uguale a $c(t)$ e si arriva al seguente teorema: se è sempre $c(t) > \frac{1}{2} \frac{\omega'(t)}{\omega(t)}$, tutti gli integrali dell'equazione

$$(1'') \qquad y'' + 2c(t)\, y' + \omega^2(t)\, y = 0$$

tendono a zero con le loro derivate prime per $t \to +\infty$ [4]. Inoltre non appare esplicitamente il periodo T di ω, anzi il procedimento non si serve della periodicità di ω; però come si può vedere dall'esempio portato al n. 4, $\max \left| \frac{\omega'}{\omega} \right|$ può dipendere da T e nei casi particolari si potrà quindi ricavare una relazione fra T e c.

(4) Nei casi particolari in cui $c(t) = \frac{1}{2} \frac{\omega'(t)}{\omega(t)}$, allora si ottiene subito un integrale primo della (1'').

3. Per ottenere una condizione di stabilità in cui compare esplicitamente T, si può nella (2) supporre $\sigma = c$ (e quindi $p = 0$). Per poter procedere *occorre supporre che la* ω *abbia un numero finito di punti estremanti nell'intervallo* $(t_0 - t_0 + T)$ *e che sia* $c < m$; la (4) allora diventa

$$\frac{d\Lambda^2}{dt} = -\frac{2\zeta'^2}{\alpha^2}\frac{\alpha'}{\alpha}.$$

Considerando che

$$\frac{\frac{d\Lambda^2}{dt}}{\Lambda^2} = -\frac{\frac{2\zeta'^2}{\alpha^2}\cdot\frac{\alpha'}{\alpha}}{\zeta^2 + \frac{\zeta'^2}{\alpha^2}} = -\frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{\alpha'}{\alpha}\frac{\zeta^2 - \frac{\zeta'^2}{\alpha^2}}{\zeta^2 + \frac{\zeta'^2}{\alpha^2}}$$

si ha, integrando fra t_0 e t,

$$\log\frac{\Lambda^2(t)}{\Lambda^2(t_0)} = \log\frac{\alpha(t_0)}{\alpha(t)} + \int_{t_0}^{t}\frac{\alpha'}{\alpha}\frac{\zeta^2 - \frac{\zeta'^2}{\alpha^2}}{\zeta^2 + \frac{\zeta'^2}{\alpha^2}}\,dt$$

da cui si ottiene

$$\Lambda^2(t) \leq \frac{\Lambda^2(t_0)\,\alpha(t_0)}{\alpha(t)}\,e^{\int_{t_0}^{t}\frac{|\alpha'|}{\alpha}\,dt}.$$

Ora

$$\int_{t_0}^{t}\frac{|\alpha'|}{\alpha}\,dt = \int_{t_0}^{t}\frac{\omega|\omega'|}{\omega^2 - c^2}\,dt$$

e quest'ultimo integrale si può calcolare nel modo seguente: per fissare le idee supponiamo di scegliere per t_0 un punto in cui la $\omega(t)$ ha un minimo relativo m_1. Consideriamo l'intervallo $(t_0 - t_0 + T)$ e lo dividiamo in intervalli parziali scegliendo come punti di suddivisione tutti i punti $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3 \cdots < \tau_{2k} = t_0 + T$, che siano per la ω estremanti, necessariamente in numero pari in quanto per la periodicità di ω

$$\omega(t_0 + T) = \omega(t_0) = m_1.$$

In ciascuno di questi intervalli la ω', che è supposta continua [5], sarà alternativamente sempre ≥ 0 e sempre ≤ 0, allora il suo modulo coinciderà con la derivata stessa nel primo caso, con la derivata preceduta dal segno – nel secondo caso. Si ottiene allora

$$\int_{t_0}^{t_0+T}\frac{\omega\omega'}{\omega^2 - c^2}\,dt = \int_{t_0}^{\tau_1}\frac{\omega\omega'}{\omega^2 - c^2}\,dt - \int_{\tau_1}^{\tau_2}\frac{\omega\omega'}{\omega^2 - c^2}\,dt + \cdots - \int_{\tau_{2k-1}}^{t_0+T}\frac{\omega\omega'}{\omega^2 - c^2}\,dt =$$

$$= \log\left|\sqrt{\omega^2 - c^2}\right|_{t_0}^{\tau_1} + \log\left|\sqrt{\omega^2 - c^2}\right|_{\tau_2}^{\tau_1} + \log\left|\sqrt{\omega^2 - c^2}\right|_{\tau_2}^{\tau_3} + \cdots + \log\left|\sqrt{\omega^2 - c^2}\right|_{t_0+T}^{\tau_{2k}}.$$

(5) La continuità della derivata prima è ammessa in questo n. solo per comodità di dimostrazione, perchè, con qualche precisazione, il ragionamento seguito continua a valere anche se la ω presenta in $(t_0 - t_0 + T)$ un numero finito di punti in cui la derivata non è definita ed è discontinua.

Ponendo $\omega(\tau_1) = M_1$, $\omega(\tau_2) = m_2, \cdots \omega(\tau_{2k-1}) = M_k$ [6], si ottiene

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \left| \frac{\omega}{\omega^2} \frac{\omega'}{c^2} \right| dt = \log \left[\frac{M_1^2 - c^2}{m_1^2 - c^2} \frac{M_2^2 - c^2}{m_2^2 - c^2} \cdots \frac{M_k^2 - c^2}{m_k^2 - c^2} \right].$$

Indicando con λ il prodotto sotto log si ha

$$\lambda = \frac{M_1^2 - c^2}{m_1^2 - c^2} \frac{M_2^2 - c^2}{m_2^2 - c^2} \cdots \frac{M_k^2 - c^2}{m_k^2 - c^2} \leq \left(\frac{M^2 - c^2}{m^2 - c^2} \right)^k, \tag{8}$$

Per la periodicità di ω si ottiene identico risultato nel calcolo degli integrali di $\frac{\omega \omega'}{\omega^2 - c^2}$ negli intervalli $t_0 + T - t_0 + 2T$, ecc. quindi, in generale, per

$$t_0 + (n-1)T < t \leq t_0 + nT \qquad (n = 1, 2 \cdots)$$

si avrà

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\omega |\omega'|}{\omega^2 - c^2} dt \leq n \log \lambda$$

e quindi

$$\Lambda^2(t) \leq \frac{\Lambda^2(t_0)\,\alpha(t_0)}{\alpha(t)} e^{n \log \lambda}$$

e per la (6), in cui si faccia $\sigma = c$

$$y^2 + \frac{(cy + y')^2}{\omega^2 - c^2} \leq \frac{\Lambda^2(t_0)\,\alpha(t_0)}{\alpha(t)} e^{-2ct} e^{n \log \lambda} \leq \frac{\Lambda^2(t_0)\,\alpha(t_0)}{\alpha(t)} e^{2cT} e^{n[-2cT + \log \lambda]}.$$

Quest'ultima espressione per $T < +\infty$ è limitata, se è $\log \lambda - 2cT \leq 0$, anzi tende a zero per $t \to +\infty$ se vale il segno $<$. È quindi sufficiente che sia

$$T \geq \frac{1}{2c} \log \lambda \tag{9}$$

oppure, maggiorando il valore di λ mediante la (8)

$$T \geq \frac{k}{2c} \log \frac{M^2 - c^2}{m^2 - c^2} \tag{10}$$

per concludere che ogni $y(t)$ soluzione della (1) e la sua derivata prima sono limitate, anzi tendono a zero per $t \to +\infty$ quando nella (9) o nella (10) vale il segno $>$. Con ciò resta dimostrato il secondo enunciato.

4. Per avere un esempio di applicazione delle formule (7) e (9) e per confrontare i risultati ottenuti con esse, si supponga $\omega^2 = \omega_0^2 (1 + \operatorname{sen}^2 \Omega t)$. In tal caso è

$$T = \frac{\pi}{\Omega} \qquad M^2 = 2\omega_0^2 \qquad m^2 = \omega_0^2 \qquad \max \left| \frac{\omega'}{\omega} \right| = \frac{\sqrt{2}\,\Omega}{4} = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{4T}.$$

(6) Si ha evidentemente $M_1 \geq m_1$, $M_2 \geq m_2 ; \cdots M_k \geq m_k$.

In base alla (7) si ha stabilità per

$$c \geqq \frac{\sqrt{2}\,\pi}{8\,T} \quad \text{cioè per} \quad T \geqq \frac{\sqrt{2}\,\omega}{8\,c} \qquad (\text{per } c \text{ qualunque})$$

mentre in base alla (9), valida per $c < \omega_0$, si ha stabilità per

$$T \geqq \frac{1}{2\,c} \log \frac{2\,\omega_0^2 - c^2}{\omega_0^2 - c^2}.$$

La seconda formula risulta più vantaggiosa della prima nell'approssimare per eccesso il limite superiore dell'ultima zona di instabilità se è

$$\log \frac{2\,\omega_0^2 - c^2}{\omega_0^2 - c^2} < \frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}$$

e ciò accade (in questo caso) per c sufficientemente piccolo.

Meccanica. — *Verifica sismica di massima di una torre metallica.* Nota di Enzo Cambi, presentata (*) dal Corrisp. G. Albenga.

1. Generalità. – Lo studio di cui alla Nota presente fu istituito, con riferimento ad un particolare caso numerico, per la verifica sismica di uno dei progetti studiati per l'attraversamento elettrico Calabria–Sicilia (1). Dato però che la trattazione fu condotta con una certa generalità, si ritiene che i risultati raggiunti possano presentare un interesse analitico, prescindendo dalle conclusioni numeriche, che del resto furono poi superate dalle successive revisioni del progetto.

Ai fini della verifica sismica, la torre è riguardata come un solido incastrato a un estremo e sottoposto ad una accelerazione periodica che si traduce nell'applicazione di un sistema di forze periodiche orizzontali. È ovvio che l'effettivo comportamento della struttura (reticolare) dipende allora dalla massa e dalla elasticità di ognuno dei suoi elementi; ma, in sede di verifica *di massima*, si dovrà adottare una schematizzazione che permetta di formulare risultati aventi forma quanto possibile compatta, e che al tempo stesso si possano presumere non eccessivamente discosti dal vero.

La necessità di ottenere risultati compatti comporta un grado considerevole di schematizzazione. Lo studio di massima avrà dunque valore di *verifica* solo se si possa essere certi che gli inevitabili scostamenti dalla realtà siano *nel senso della sicurezza*. Se, come nel caso attuale, la verifica è basata sull'accertamento che il periodo fondamentale di oscillazione libera cada al di fuori della gamma sismica, saranno ammissibili le semplificazioni che corrispondono ad un *irrigidimento* (o a una *diminuzione della massa inerte*) quando la frequenza propria debba cadere *al di sotto* della minima frequenza sismica; o viceversa.

La torre in parola, a base quadrata, e a rastremazione costante, viene assimilata ad una mensola in cui il momento d'inerzia di ogni sezione si riduca a

(*) Nella seduta del 12 maggio 1949.

(1) Lo studio fu condotto a Dalmine (Bergamo), per conto di quegli Stabilimenti, nel giugno 1947.

quello delle sezioni dei quattro montanti, considerati a distanza invariabile fra loro. Questo corrisponde all'assunzione di una rigidezza infinita delle aste di parete, cioè ad un *irrigidimento*: si troverà dunque con tale approssimazione un periodo proprio *inferiore* al vero [2]. La mensola è caricata all'estremo libero da una massa inerte, a sbalzo, rappresentante la traversa degli ancoraggi, che non partecipa alla resistenza.

Data la costanza dell'angolo di rastremazione, la legge di variazione del momento d'inerzia, in ogni tratto in cui la sezione del montante si mantenga costante, è del tipo $\mathfrak{J} = \Omega a^2 (1 - \gamma x)^2$ ove x sia l'ascissa corrente, a il lato alla base, Ω la sezione del montante, e γ un coefficiente costante. Si considera la torre costituita da tronchi successivi, in ciascuno dei quali Ω è separatamente costante; a e γ sono uguali per tutti i tronchi.

Per ciascun tronco, sia μ la densità lineare, che pure riguardiamo costante in ciascun tronco.

2. LE VIBRAZIONI LIBERE. – Se, come d'abitudine, si trascurano i termini d'inerzia rotatoria (approssimazione « di sicurezza »), l'equazione indefinita delle oscillazioni libere è notoriamente

$$(1) \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{E\mathfrak{J}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right\} + \mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.$$

In un tronco in cui μ sia costante, e $\mathfrak{J}$ vari con la legge $\mathfrak{J} = \Omega a^2 (1 - \gamma x)^2$ con Ω pure costante, l'equazione è quindi

$$(1') \qquad E\Omega a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{(1 - \gamma x)^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right\} + \mu\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.$$

Se si cerca una soluzione della forma $y = X(x) \cdot T(t)$, che sia armonica rispetto al tempo ($T(t) = e^{i\omega t}$), si trova per la X una equazione differenziale ordinaria, del quarto ordine, contenente il parametro incognito ω. In termini di una nuova variabile $z = a(1 - \gamma x)\sqrt{\Omega} = \sqrt{\mathfrak{J}}$, l'equazione risulta

$$(2) \qquad z^2\frac{d^4 X}{dz^4} + 4z\frac{d^3 X}{dz^3} + 2\frac{d^2 X}{dz^2} = \left(z\frac{d^2}{dz^2} + \frac{d}{dz}\right)\left(z\frac{d^2 X}{dz^2} + \frac{dX}{dz}\right) = \frac{\omega^2\mu}{E\Omega^2\gamma^4 a^4} X = \lambda^4 X.$$

Ogni soluzione di ciascuna delle equazioni

$$z\frac{d^2 X}{dz^2} + \frac{dX}{dz} \pm \lambda^2 X = 0$$

è quindi integrale della (2).

(2) Un'idea dell'ordine di grandezza dell'errore può aversi dal confronto di due deformate statiche corrispondenti rispettivamente al caso reale, e all'ipotesi di rigidezza infinita delle aste di parete. Assimilando allora la maggiore flessibilità della trave reale ad un abbassamento del modulo di elasticità della trave a diagonali rigide, si trovò, nel caso numerico considerato, un abbassamento « equivalente » del modulo pari al 15 % circa. Nella espressione del periodo, il modulo di elasticità figura alla potenza 1/4: l'errore prevedibile nel periodo era quindi dell'ordine del 4 %, nel senso della sicurezza.

Tali soluzioni sono notoriamente le funzioni di Bessel di ordine zero e di argomento reale (funzioni $\mathbf{J}_0$, $\mathbf{Y}_0$) e immaginario puro (funzioni $\mathbf{I}_0$, $\mathbf{K}_0$) rispettivamente, nell'argomento $2\lambda\sqrt{\zeta}$, che, in forza delle posizioni, vale

$$2\lambda\sqrt{\zeta} = 2\frac{\sqrt{\omega}}{\gamma\sqrt{a}}\sqrt[4]{\frac{\mu}{E\Omega}}\sqrt{1-\gamma x} = q\sqrt{1-\gamma x} = \frac{2}{\gamma a}\sqrt{\frac{\omega}{\Omega}}\sqrt[4]{\frac{\mu}{E}}\sqrt[4]{\mathfrak{J}}\,.$$

Nel coefficiente adimensionale, q, di $\sqrt{1-\gamma x}$, μ e Ω sono stati ammessi costanti per ciascun tronco di torre; quindi, q è essa stessa costante in ciascun tronco. Riservando la notazione q alla costante relativa ad un particolare tronco, ad esempio al tronco di base, scriveremo $q\sigma_n$ per l'analoga costante relativa all'n–mo tronco $\left(\sigma_n^4 = \dfrac{\mu_n E_o \Omega_o}{\mu_o E_n \Omega_n}\right)$.

La funzione X ha quindi in ogni tronco l'espressione

$$X = A_n \mathbf{J}_0 + B_n \mathbf{Y}_0 + C_n \mathbf{I}_0 + D_n \mathbf{K}_0$$

dove l'argomento delle funzioni di Bessel è $q\sigma_n\sqrt{1-\gamma x}$, e le A, B, C, D sono costanti di integrazione. σ vale per definizione uno nel tronco di base, mentre q è una costante *incognita* i cui «autovalori» sono da determinarsi in base alla condizione che il problema ai limiti ammetta soluzione.

Ad ogni valore di q corrisponde un valore di ω, cioè ad ogni autovalore una *autofrequenza* di oscillazione libera.

La continuità della X e delle sue prime tre derivate (la quarta è discontinua per l'ammessa discontinuità del rapporto $\mu/\mathfrak{J}$) stabilisce quattro equazioni lineari fra le quattro costanti di integrazione del tronco n–mo e le analoghe del tronco $(n-1)$–mo. Le condizioni contengono per definizione le prime tre derivate delle quattro funzioni di Bessel nei due argomenti diversi corrispondenti all'ascissa del punto di passaggio fra i due tronchi: ma la stessa equazione differenziale, e quella che se ne ottiene con una derivazione, permettono di esprimere le derivate seconda e terza in termini della funzione e della derivata prima, cioè delle funzioni di ordine zero e uno.

Le costanti di integrazione di ciascun tronco si potranno così esprimere in termini di quelle del tronco precedente, cioè ad esempio, ricorrentemente, in termini delle costanti del tronco di base (3).

Siamo ora in grado di imporre le condizioni ai limiti. Se l'estremo inferiore è incastrato, a tangente verticale, si dovrà annullare qui la X e la sua derivata prima. L'argomento delle funzioni di Bessel è qui semplicemente q, in quanto $x = 0$, e, nel tronco di base, $\sigma = 1$. Si hanno così due condizioni fra le quattro costanti del tronco di base.

L'estremo superiore ($x = h$) è collegato rigidamente ad una massa inerte M alla distanza L (distanza fra il baricentro del castello di estremità e il vertice dello stelo). Nell'ultimo tronco, la deflessione dinamica ha la forma

$$X = a\mathbf{J}_0 + b\mathbf{Y}_0 + c\mathbf{I}_0 + d\mathbf{K}_0\,.$$

(3) La complicazione formale delle soluzioni del sistema di quattro equazioni sconsiglia la espressione di esse in termini letterali; le relazioni *numeriche* tra le costanti si scrivono invece senza difficoltà.

L'argomento delle funzioni di Bessel è $q\sigma\sqrt{1-\gamma x}$, con la σ dell'ultimo tronco: le costanti di integrazione a, b, c, d sono collegate in modo noto, attraverso le equazioni di raccordo, con le A, B, C, D del tronco di base.

Le condizioni relative al momento e alla forza di taglio all'estremo superiore si scrivono

$$E\mathfrak{J}\frac{d^2X}{dx^2} = ML\omega^2\left\{X + L\frac{dX}{dx}\right\}$$

$$\frac{d}{dx}\left\{E\mathfrak{J}\frac{d^2X}{dx^2}\right\} = -M\omega^2\left\{X + L\frac{dX}{dx}\right\}$$

in quanto l'elongazione della massa M è evidentemente data da $X + L\frac{dX}{dx}$ ove le funzioni siano calcolate per $x = h$.

Attraverso le equazioni di raccordo, le condizioni scrivono altre due equazioni omogenee fra le costanti del tronco di base. A coefficienti di queste nelle complessive quattro equazioni figurano funzioni di Bessel di argomento q e funzioni di argomento $q\sigma\sqrt{1-\gamma h}$. Le (infinite) radici del determinante del sistema omogeneo forniscono gli autovalori di q, a ciascuno dei quali corrisponde direttamente una autofrequenza, e attraverso la soluzione del sistema omogeneo a determinante nullo, una autofunzione. Le successive autofunzioni rappresentano come è noto le deformate dinamiche di vibrazioni libere a frequenza crescente, e a zero, uno, due, ecc. nodi intermedi.

È ovvio che, data la complicazione del problema nella attuale generalità, non si può pensare di esprimere in forma analitica compatta la equazione di definizione degli autovalori, nè di esprimerne analiticamente le soluzioni. Queste si possono invece determinare *numericamente*, caso per caso, senza gravi difficoltà.

Per ottenere risultati di interesse analitico più generale è cioè necessario limitarsi a problemi più schematici di quello reale considerato. Ad esempio le conclusioni precedenti permettono di determinare le oscillazioni della trave a momento d'inerzia variabile come $(a - bx)^2$ (piramide di quattro montanti) che si aggiunge ad altri casi di distribuzione variabile del momento d'inerzia per cui è già nota la soluzione (4). Alla soluzione di questo caso si accenna brevemente nel paragrafo seguente.

3. LA MENSOLA A MOMENTO D'INERZIA DELLA FORMA $(a - bx)^2$. – Quando Ω sia costante in tutta la trave, ferma restando la costanza di μ (cioè nel caso del tronco di piramide di quattro montanti, di cui però sia mantenuta la distanza), la funzione X ha una espressione valida per tutta la trave, della forma $X = AJ_0 + BY_0 + CI_0 + DK_0$ in cui l'argomento delle funzioni di Bessel è ovunque

$$2\frac{\sqrt{\omega}}{\gamma\sqrt{a}}\sqrt[4]{\frac{\mu}{E\Omega}}\sqrt{1-\gamma x} = \frac{2}{\gamma a}\sqrt{\frac{\omega}{\Omega}}\sqrt[4]{\frac{\mu}{E}}\sqrt{\mathfrak{J}}.$$

(4) Problemi di questo tipo si trovano esemplificati nel trattato del prof. G. KRALL, *Meccanica Tecnica delle Vibrazioni*. Bologna 1940, vol. II, p. 283.

L'argomento all'incastro, e quello all'estremo libero, siano, per brevità, Z e ζ. Essi sono, per definizione, proporzionali alle radici quarte dei momenti d'inerzia massimo e minimo.

Se supponiamo ancora, per semplicità, che l'estremo non incastrato sia *libero* (e *non* collegato con una massa inerte come nel caso della torre) si dovranno annullare la X e la derivata prima all'incastro (argomento Z) e le derivate seconda e terza all'estremo libero (argomento ζ). L'equazione degli autovalori si scrive allora facilmente annullando il determinante formato dalle quattro funzioni e dalle prime tre derivate (rispetto a x) calcolate rispettivamente negli argomenti Z (funzione e derivata prima) e ζ (derivate seconda e terza). Il determinante è suscettibile di ovvie riduzioni (che lo esprimono in termini delle funzioni di ordine zero e uno soltanto), su cui non vogliamo ora insistere.

Vogliamo invece considerare il comportamento *asintotico* del determinante, che interessa per la determinazione delle autofrequenze superiori. Quando l'argomento x sia elevato, le quattro funzioni di Bessel tendono notoriamente alla *proporzionalità* con

$$\begin{matrix} \mathbf{J}_0(x) \\ \mathbf{Y}_0(x) \end{matrix} \sim \frac{1}{\sqrt{x}} \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \quad , \quad \begin{matrix} \mathbf{I}_0(x) \\ \mathbf{K}_0(x) \end{matrix} \sim \frac{e^{\pm x}}{\sqrt{x}} .$$

Si trova allora subito che la equazione determinantica tende asintoticamente alla

$$1 + \cos(Z - \zeta) \operatorname{ch}(Z - \zeta) = 0$$

in cui, sostituendo a Z e ζ le loro espressioni ed esprimendo anche γ in termini dei momenti d'inerzia di estremità si ha

$$Z - \zeta = \sqrt{\omega} \cdot b \cdot \sqrt[4]{\frac{\mu}{E}} \frac{2}{\sqrt[4]{\mathfrak{I}_{max}} + \sqrt[4]{\mathfrak{I}_{min}}} .$$

L'equazione degli autovalori tende quindi asintoticamente ad identificarsi con quella della mensola a sezione costante, di momento d'inerzia definito dalla

$$\sqrt[4]{\mathfrak{I}} = \frac{\sqrt[4]{\mathfrak{I}_{max}} + \sqrt[4]{\mathfrak{I}_{min}}}{2} \text{ (5)}.$$

4. Vibrazioni forzate della torre. – La conoscenza dei modi liberi permette di determinare l'andamento della vibrazione forzata, quando la torre sia sottoposta ad una accelerazione della forma $G \sin pt$, che applica in ogni tronco un carico distribuito periodico $\mu G \sin pt$.

Le autofunzioni X_r corrispondenti ai successivi autovalori $q_1, q_2, \cdots, q_r, \cdots$, sono ortogonali fra loro nel campo di variabilità della x. È quindi possibile scrivere una serie

$$1 = \sum \alpha_r X_r \qquad (3)$$

(5) Cfr. Krall, loc. cit., p. 281.

in cui il coefficiente α_r è dato, per noti teoremi, da

$$\alpha_r = \int_0^h X_r \, dx \Big/ \sqrt{\int_0^h X_r^2 \, dx} \, .$$

Scrivendo allora il carico distribuito come risultante dalla somma di infinite componenti $\mu G \sin pt \cdot \alpha_r X_r$, il moto forzato risulterà dalla composizione di infinite vibrazioni – aventi l'andamento spaziale delle successive autofunzioni – di cui quella di modo r–mo soddisfi l'equazione completa

$$(4) \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{ E\mathfrak{J} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right\} + \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \mu \alpha_r X_r G \sin pt$$

con le condizioni iniziali $y \equiv 0$, $\partial y/\partial t \equiv 0$ per $t = 0$.

Riguardando il termine forzante come costituito da una successione di impulsi elementari $\mu \alpha_r X_r G \sin p\theta \, d\theta$ – ciascuno dei quali determina l'insorgenza di una oscillazione libera, di modo r–mo, soddisfacente le condizioni iniziali $y(\theta) = 0$, $\left[\frac{\partial y}{\partial t}\right]_\theta = \alpha_r X_r G \sin p\theta \, d\theta$ – e integrando nel tempo, si ottiene la cercata soluzione di (4) nella forma

$$(5) \qquad y = \frac{\alpha_r G X_r(x)}{p^2 - \omega_r^2} \left\{ \frac{p}{\omega_r} \sin \omega_r t - \sin pt \right\}$$

dove $\omega_r / 2\pi$ è l'autofrequenza del modo r–mo. Se p coincide con ω_r si ha

$$y = \frac{\alpha_r G X_r(x)}{2 \omega_r^2} \{ \sin \omega_r t - \omega_r t \cos \omega_r t \} .$$

La vibrazione forzata risulta allora costituita dalla somma di infinite y della forma (5), dove i coefficienti α_r sono quelli delle serie (3). La conoscenza di y in funzione di x e di t permette di determinare in ogni punto l'accelerazione $\partial^2 y/\partial t^2$ che si stabilisce nel moto forzato. La forza d'inerzia che cimenta elasticamente la torre non è però distribuita come $\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ ma, in forza della stessa (4) è data da

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{ E\mathfrak{J} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right\} = \alpha_r \mu X_r G \sin pt - \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

per la componente di modo r–mo.

Se p non coincide con una delle ω_r la forza d'inerzia distribuita è data dalla somma di infiniti termini della forma

$$\alpha_r \mu X_r G \omega_r \frac{p \sin \omega_r t - \omega_r \sin pt}{p^2 - \omega_r^2}$$

che diviene

$$\alpha_r \mu X_r G \frac{\sin \omega_r t - \omega_r t \cos \omega_r t}{2}$$

se p coincide con ω_r.

La conoscenza delle forze d'inerzia permette poi, con un calcolo statico, di determinare le sollecitazioni che si verificano nella struttura durante la vibrazione forzata.

5. Considerazioni pratiche. – Il procedimento esposto permette di determinare l'andamento della vibrazione con tutto il rigore consentito dalla schematizzazione introdotta nella formulazione del problema. Ma è evidente che il calcolo completo è notevolmente laborioso; occorre quindi tener presenti nel corso di esso tutti gli accorgimenti che possono valere ad abbreviarlo senza pregiudizio della sicurezza. Ad esempio, nella divisione della torre in tronchi è da tener presente che due tronchi per cui il rapporto μ/Ω sia lo stesso, pur essendo diversi μ ed Ω, si comportano come un tronco unico, in quanto in essi la grandezza qui indicata con σ ha lo stesso valore.

Se si tiene presente che μ/Ω è in sostanza il rapporto (*inerzia/rigidezza*) si può spesso limitare il numero di tronchi in cui viene divisa la torre tenendo presente che l'assunzione di una σ leggermente maggiore del vero porta alla determinazione di frequenze proprie inferiori al vero e viceversa. La riduzione del numero di tronchi riduce il numero delle equazioni di raccordo, cioè dei sistemi di quattro equazioni che occorre risolvere per esprimere le costanti di ogni tronco in termini di quelle del tronco di base, e quindi per scrivere l'equazione degli autovalori.

Vale poi la nota considerazione generale in forza della quale la vibrazione spontanea più pericolosa è sempre quella di frequenza più bassa. Ciò sia perchè è certamente la più prossima alle vibrazioni sismiche di bassa frequenza, sia, e soprattutto, perchè è quella per cui le autofunzioni hanno la maggiore ampiezza (a meno di risonanze). Ciò è intuitivo, data la presenza di *nodi intermedi* nelle autofunzioni superiori, ed è messo chiaramente in evidenza dalla presenza di termini in ω_r^2 a denominatore del coefficiente di X_r in tutti gli sviluppi. Questo anche a prescindere dalla decrescenza dei coefficienti α_r della serie (3) al crescere di r.

Si può in generale concludere (sempre a meno di risonanze) che già risultati significativi si ottengono limitandosi alla prima autofunzione, e quindi alla determinazione del solo primo autovalore. L'approssimazione conseguita è meno buona nella determinazione dell'accelerazione che in quella della elongazione, ma anche nel primo caso si ottengono già dalla considerazione della prima componente risultati molto significativi per la determinazione degli ordini di grandezza delle forze e spostamenti, che rappresenta lo scopo di un calcolo di massima.

Idrodinamica. — *Sul moto irrotazionale dei liquidi viscosi.* Nota I di GIULIO SUPINO, presentata (*) dal Socio A. SIGNORINI.

1. Il moto irrotazionale costituisce, in un liquido perfetto, il tipo di moto più importante dal punto di vista meccanico e più semplice dal punto di vista analitico, perchè, in virtù del teorema di Lagrange, ogni moto, che avvenga partendo dalla quiete e sotto l'azione di sole forze conservative, è certamente irrotazionale e d'altra parte, la determinazione di un moto di questo tipo si riconduce alla determinazione di una funzione armonica: le difficoltà di integrazione delle equazioni indefinite (*non* lineari) sono così superate.

Nel caso del moto irrotazionale di un liquido viscoso, mancherebbe una interpretazione meccanica analoga al teorema di Lagrange, ma resterebbero valide le semplificazioni analitiche; senonchè, allo stato attuale delle cognizioni sul comportamento dei fluidi reali, dobbiamo imporre, senza possibilità di altra alternativa, che il liquido « attacchi » alle pareti ed in queste condizioni è possibile dimostrare:

1° che un liquido viscoso non può muoversi di moto irrotazionale, se il campo di moto è limitato, per una parte anche piccola del contorno, da una parete rigida fissa (o animata di solo moto di traslazione);

2° che nei campi con pareti rigide mobili (e in stato cinetico elicoidale o almeno di rotazione) la ricerca di moti irrotazionali porta a scrivere delle condizioni esuberanti ed in generale incompatibili; non si può affermare che siano incompatibili in ogni caso perchè, saranno esposti due esempi di moto, parallelo ad un piano fisso, che hanno carattere irrotazionale, ma si può mostrare che questi esempi sono i soli nei campi in due dimensioni;

3° che nel caso di liquido (viscoso) limitato da sole superficie libere non esistono moti irrotazionali se il campo è semplicemente connesso e tutto al finito, mentre nel caso di un canale non esistono onde irrotazionali permanenti (cioè non esistono onde irrotazionali del tipo permanente, neppure in canali di larghezza e profondità infinita, gli altri casi essendo esclusi da quanto osservato in 1).

In una seconda Nota svolgeremo osservazioni di carattere energetico.

2. Dimostriamo ora la prima affermazione. Se il moto è irrotazionale deve essere:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad , \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad , \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} .$$

Quindi per ogni punto della parete (dove $u = v = w = 0$) segue

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial t_2} = 0$$

(*) Nella seduta del 12 maggio 1949.

essendo n la normale alla parete e t_1, t_2 due direzioni ortogonali nel piano tangente. Queste condizioni equivalgono a $\Phi = \text{cost}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$ alla parete; poiché $\nabla^2 \Phi = 0$, così segue [1], che è $\Phi = \text{cost}$ in tutto il campo: cioè che il liquido è in quiete.

Se la parete si muove di un semplice moto di traslazione allora basta sostituire agli assi fissi una terna solidale alla parete ed osservare che, se il moto è irrotazionale rispetto alla terna fissa, lo è anche rispetto alla terna mobile (animata di sola velocità di traslazione), sicchè « un liquido viscoso non può muoversi di moto irrotazionale se il campo di moto è limitato, per una parte comunque piccola del contorno da una parete fissa o mobile in stato cinetico di traslazione, se si esclude, si intende, il caso banale di una traslazione di insieme ».

Questo risultato ha anche un'altra interpretazione: esso equivale a mostrare che nella soluzione irrotazionale di liquido perfetto, quando il contorno sia limitato, in parte, da una parete fissa o mobile in moto di traslazione, il liquido è certamente animato di una velocità tangenziale non nulla alla parete.

3. Passiamo alla seconda affermazione. Data una parete rigida mobile, operiamo una trasformazione di coordinate, scegliendo i nuovi assi solidali con la superficie. Relativamente a questi assi, la parete è fissa, ma il moto non è più irrotazionale; si vede subito che il moto è caratterizzato da vortici costanti (nello spazio ma non nel tempo) e che le componenti del vortice ξ_0, η_0, ζ_0 sono rispettivamente uguali alle componenti p, q, r del vettore ω che nella meccanica del corpo rigido dà la rotazione istantanea del sistema mobile in confronto al sistema fisso [2].

Pertanto la soluzione generale rispetto ai nuovi assi può essere scritta nella forma

$$(1) \qquad u = -2\zeta_0 y + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad , \quad v = -2\xi_0 z + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad , \quad w = -2\eta_0 x + \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

essendo Φ sempre armonica e ξ_0, η_0, ζ_0 costanti nello spazio [3].

(1) KIRCHHOFF, *Mechanik*, pp. 187–188. Ved. anche ALMANSI, *Un Teorema sulle deformazioni elastiche dei solidi isotropi*. « Rendiconti Acc. Naz. dei Lincei », 1° sem., pp. 865–867, 1907.

(2) Si veda per esempio T. LEVI-CIVITA ed U. AMALDI, *Lezioni di Meccanica razionale*, vol I, pp. 178–179, Bologna 1923.

(3) Se il vortice ha per componenti ξ_0, η_0, ζ_0 allora una soluzione particolare possibile è data da

$$\bar{u} = \eta_0 z - \zeta_0 y \quad , \quad \bar{v} = \zeta_0 x - \xi_0 z \quad , \quad \bar{w} = \xi_0 y - \eta_0 x ,$$

ma un'altra soluzione particolare è rappresentata da

$$u = -2\zeta_0 y \quad , \quad v = -2\xi_0 z \quad , \quad w = -2\eta_0 x$$

come si verifica subito con le relazioni

$$(2) \qquad 2\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \quad , \quad 2\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial x} \quad , \quad 2\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} .$$

La differenza tra le due soluzioni particolari è compensata dalla soluzione generale del sistema omogeneo: $u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ ecc.; basta porre $\Phi = \xi_0 yz + \eta_0 zx + \zeta_0 xy$ che risulta subito: $\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \eta_0 z + \zeta_0 y = \bar{u} - u$ ecc.

Possiamo orientare gli assi, solidali con la parete, in modo che in un dato istante sia $\eta_0 = \xi_0 = 0$.

Quindi

$$(1') \qquad u = -2\zeta_0 y + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad , \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad , \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} .$$

Sulla parete deve essere $u = v = w = 0$ (perchè il liquido «attacca» alla parete).

4. Se supponiamo $\Phi = 0$ allora:

$$u = -2\zeta_0 y \quad , \quad v = 0 \quad , \quad w = 0 .$$

Questa soluzione corrisponde al moto laminare tra due piani paralleli di cui uno, il piano coordinato (x, z) fisso, l'altro (di equazione $y = y_0$) mobile con velocità $-2\zeta_0 y_0$.

Tale moto rispetto ad una terna animata di conveniente moto rigido diviene irrotazionale, ma non dà luogo in nessun caso ad uno stato di quiete perchè, come è noto, la velocità di deformazione è diversa da zero [4]. Si ha così un primo esempio di moto irrotazionale in un campo limitato da sole pareti mobili. Si osservi che il moto è parallelo al piano (x, z) (mobile).

5. In luogo di porre $u = v = w = 0$ scriviamo ora

$$(3) \qquad u \cos(n, x) + v \cos(n, y) + w \cos(u, z) = 0$$

e le altre due analoghe riferendoci alla normale n e a due direzioni ortogonali t_1 e t_2 nel piano tangente. Sostituendo le (1') nelle (3) si ottiene:

$$(4) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 2\zeta_0 y \cos(n, x) \quad , \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t_1} = 2\zeta_0 y \cos(t_1, x) \quad , \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t_2} = 2\zeta_0 y \cos(t_2, x) .$$

La prima di queste, se il liquido non ha altro contorno che la superficie mobile, definisce senz'altro la Φ: essa non è in generale compatibile con le rimanenti due. Ma, se la superficie è un cilindro circolare di asse z e la Φ è funzione nelle sole x, y si ha sul contorno $[r = R]$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 2\zeta_0 R \cos\theta \operatorname{sen}\theta \quad , \quad \frac{1}{R}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -2\zeta_0 R \operatorname{sen}^2\theta$$

e se si tien conto che queste due condizioni devono essere verificate soltanto su R si può scrivere:

$$\Phi = \zeta_0 r^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta - \zeta_0 R^2 \theta$$

(4) Questo moto è stato più volte studiato, specie nella teoria della lubrificazione. Si ha qui un moto non rigido pur essendo $\Phi = 0$ perchè ci siamo riferiti alla (1) invece che alle espressioni solite $u = \eta_0 z - \zeta_0 y + \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ ecc. (vedi in proposito la nota (3)).

soddisfacendo così alle condizioni poste. Con questa determinazione si ha (indicando con u_r, u_θ la velocità radiale e tangenziale):

$$(5) \qquad u_r = 0 \quad , \quad u_\theta = \zeta_0 r - \zeta_0 \frac{R^2}{r}$$

sicchè effettivamente per $r = R$ la velocità è nulla. Occorre poi che il campo di moto sia limitato da un'altro cilindro (concentrico a quello di raggio R) e che si muova con velocità differente; precisamente se R_1 è il raggio del secondo cilindro la sua velocità tangenziale rispetto al primo deve essere: $\zeta_0 (R_1^2 - R^2)$ [5].

6. Gli esempi precedenti rappresentano per altro dei casi di carattere eccezionale nel moto di un liquido viscoso.

Possiamo infatti dimostrare:

a) che se il campo è limitato da sole superficie rigide solidali tutte con il sistema di coordinate mobili allora il moto non può essere irrotazionale.

E ciò perchè valgono le (1′) e quindi su *tutte* le pareti è

$$(6) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2 \zeta_0 y \quad , \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 .$$

Ora v e w sono armoniche sicchè $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ sono nulle in tutto il campo e quindi $\Phi = f(x) = ax + b$ (per l'armonicità) in contraddizione con la prima delle (6) (salvo che il contorno sia rappresentato dal piano $a = 2 \zeta_0 y$ che ci riporta all'esempio del n. 4).

b) una funzione armonica che assume valori assegnati per essa e per la sua derivata normale su una porzione di contorno comunque piccola, quando esiste, è unica (come segue dal teorema di Kirchhoff).

Pertanto qualunque sia il campo di moto, se esso contiene un elemento piano o di cilindro a sezione circolare orientato rispetto al vettore ω nel modo rappresentato dalle (4) e se il moto non è quello indicato in uno degli esempi dei nn. 4 e 5, allora la soluzione non esiste (perchè l'unica soluzione esistente è quella riportata negli esempi stessi); se l'orientamento di ω è diverso da quello indicato in quei numeri allora non si trova, per una superficie piana (o cilindrica circolare), una soluzione del problema e non è possibile trovarla variando il contorno all'esterno della zona considerata perchè la compatibilità o meno delle condizioni relative alle Φ e a $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ è determinata « in piccolo » [6].

(5) Le (5) mostrano chiaramente che il campo non può essere esteso fino ad $r = 0$ perchè nascerebbe una singolarità per u_θ. Invece può mancare il cilindro esterno ed il moto può estendersi all'infinito perchè il termine $\zeta_0 r$ compare in quanto ci riferiamo ad assi mobili e si annulla con riferimento ad assi fissi (rispetto ai quali è calcolato il moto irrotazionale).

(6) Basta osservare che scrivendo u, v, w nella forma (1) si possono scegliere gli assi in modo che y e z stiano sul piano di σ. Ciò porta come conseguenza:

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right]_\sigma = 2 \xi_0 z \quad , \quad \left[\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right]_\sigma = 0 \quad , \quad \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right]_\sigma = 2 \zeta_0 y$$

c) Se il moto è parallelo ad un piano fisso, consideriamo un elemento della parete rigida mobile e fissiamo l'origine delle coordinate nel centro del cerchio osculatore a quell'elemento. Dovremo avere in base alle (4)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = 2\,\zeta_0\,R\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta \quad , \quad \frac{1}{R}\frac{\partial \Phi}{\partial \rho} = 2\,\zeta_0\,R\,\mathrm{sen}^2\,\theta$$

equazioni che abbiamo già visto nel caso del cilindro circolare: anche qui l'unica espressione di Φ che possa soddisfare ad esse è, in base al teorema di Kirchhoff, quella allora trovata: ne segue che i soli moti irrotazionali possibili nei campi in due dimensioni sono quello compreso tra due circonferenze concentriche (indicato al n. 5 e ora ritrovato) e quello tra due rette parallele (che sfugge alla rappresentazione attuale perchè allora $R = \infty$, e) che si ottiene ponendo $\Phi = 0$ (ved. n. 4).

7. Ci resta da accennare ai campi di moto limitati da soli peli liberi. Se il moto è irrotazionale e si tien conto che in superficie è $\sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy}\cos(u, y) + \tau_{zx}\cos(n, z) = 0$ (e le analoghe) e che nei fluidi viscosi è $\sigma_x = p - 2\,\mu\,\frac{\partial \Phi}{\partial x}$, $\tau_{xy} = -\mu\left\{\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right\}\cdots$ si ottiene facilmente:

$$(7) \qquad p\cos(n, x) - 2\,\mu\,\frac{\partial^2 \Phi}{\partial n\,\partial x} = 0 \qquad \text{(e le analoghe)}$$

od anche indicando con n, t_1, t_2 la normale e due direzioni ortogonali nel piano tangente:

$$(8) \qquad p - 2\,\mu\,\frac{\partial^2 \Phi}{\partial n^2} = 0 \quad , \quad 2\,\mu\,\frac{\partial^2 \Phi}{\partial n\,\partial t_1} = 0 \quad , \quad 2\,\mu\,\frac{\partial^2 \Phi}{\partial n\,\partial t_2} = 0 .$$

La prima delle (8) serve a definire la p; dalle altre due si deduce che su un pelo libero si deve avere $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \text{cost}$ e ciò mostra che nel caso di un campo di moto limitato da un solo pelo libero *tutto al finito* non è possibile il moto irrotazionale essendo $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \text{cost}$ sul contorno, incompatibile con la condizione $\nabla^2 \Phi = 0$ (nell'interno del campo). Per esempio una sfera liquida (con viscosità) non può essere in moto irrotazionale con pressioni nulle su tutta la superficie: su di essa non si possono avere onde irrotazionali permanenti o smorzate (7).

e quindi $[\Phi]_\sigma = 2\,\xi_0\,xy + f_1(x, z)$ (dalla prima delle precedenti) $[\Phi]_\sigma = f_2(x, y)$ (dalla seconda delle precedenti).

È chiaro che questa seconda non è compatibile con la prima per piccola che sia la zona piana salvo per il caso lineare in x già considerate. Ad analoghe conclusioni si giunge sul cilindro.

(7) In campi di moto più volte connessi, la condizione $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \text{cost}$ può essere compatibile con l'armonicità perchè il valore della costante può essere diverso da un polo libero all'altro. Perciò non può estendersi a questo caso la precedente conclusione negativa.

Alla stessa conclusione si può giungere per altra via relativamente alle onde permanenti in un canale con profondità infinita (come quello nel quale il Levi–Civita ha dedotto le onde irrotazionali del tipo permanente per un liquido perfetto [8].

Fisica. — *È possibile determinare la velocità della luce in percorsi aperti?* Nota I di MARIO GALLI, presentata [*] dal Corrisp. L. TIERI.

1. Recentemente Amerio ha proposto un nuovo metodo per determinare la velocità della luce [1]. Il vantaggio maggiore consiste non tanto nella possibilità di eseguire misure assolute più precise di quelle ordinarie quanto piuttosto nella possibilità di eseguire misure relative idonee a far risaltare un eventuale effetto ottico del moto di traslazione terrestre.

È ben noto, è ciò risulta da un teorema generale di Lorentz [2], che, se determiniamo la velocità della luce in percorsi chiusi, l'influenza del moto di traslazione terrestre è al più di second'ordine in v/c, per conseguenza non rilevabile se non con delicatissimi procedimenti interferometrici.

L'esperienza di Amerio è, come si esprime l'autore, « fondata sul paragone del comportamento di un raggio che si propaga in un senso con quello di un raggio che si propaga in senso contrario, perciò ha il vantaggio di essere legata alla misura della prima potenza del rapporto v/c ... che è dell'ordine di 10^{-4} ed è perciò comodamente accessibile » [3].

(8) La impossibilità di onde permanenti in un canale di profondità infinita può essere mostrata direttamente riferendosi al procedimento proposto dal Levi-Civita e che nel caso di un liquido perfetto porta a scrivere l'equazione funzionale $\frac{d\tau}{d\sigma} - = pe^{-3\tau}\operatorname{sen}\vartheta$. Ved. T. LEVI-CIVITA, *Détermination rigoreuse des ondes permanentes d'ampleur finie*. « Math. Annalen », Bd. 93, pp. 264–314. L'equazione qui riportata è scritta con le stesse notazioni del Levi–Civita sicchè p, per esempio, non rappresenta la pressione, ma un parametro ausiliario (< 1).

Nel caso di liquido viscoso, seguendo passo passo la trattazione del Levi-Civita, si giunge alla equazione

$$\frac{4\pi\mu}{c\lambda}\left[\frac{d^2\tau}{d\sigma^2}+\left(\frac{d\tau}{d\sigma}\right)^2\right]-\frac{d\tau}{d\sigma}=-pe^{-3\tau}\operatorname{sen}\vartheta$$

(nella quale μ è il coefficiente di viscosità e gli altri simboli sono gli stessi che nella Memoria citata), e questa equazione non ammette soluzioni diverse da zero perchè integrando i vari termini sulla circonferenza (sulla quale è rappresentata conformemente una lunghezza d'onda) si trova che tutti gli integrali sono nulli, salvo naturalmente $\int_0^{2\pi}\left(\frac{d\tau}{d\sigma}\right)^2 d\sigma$ sicchè si conclude che $\frac{d\tau}{d\sigma}=0$ cioè che *non* esistono le onde cercate.

(*) Nella seduta del 12 maggio 1949.

(1) A. AMERIO, « Rend. Linc. », ser. VIII, vol. II, p. 238 e 736 (1947); ser. IV, vol. IV, p. 158 (1948).

(2) LORENTZ, *Optischen Erscheinungen in bewegter Körper*. « Collected Papers », V; H. THIRRING, *Elektrodynamik bewegter Körper*. « Handbuch der Physik », XII, 291.

(3) Cfr. la seconda delle note citate.

L'autore non intende in alcun modo di rimettere in discussione la teoria della relatività. Tuttavia egli ritiene che il suo esperimento potrebbe costituire una utilissima per quanto non necessaria conferma.

Nessuno esiterà a condividere questa opinione, se è veramente possibile concettualmente e praticamente mettere in evidenza effetti di prim'ordine. Ma su questo punto d'importanza fondamentale si può nutrire qualche dubbio.

Oggetto di questa Nota è una generica discussione circa la possibilità di determinare la velocità della luce in percorsi aperti, i soli per i quali esista la possibilità di rilevare effetti di prim'ordine, senza particolare riferimento alle Note di Amerio.

2. Ed incominciamo con una precisazione di carattere storico. L'idea di determinare la velocità della luce in percorsi aperti (ovvero di semplice andata da A a B) non è nuova. Non è neppure nuova l'iniziativa di assumere come mezzo idoneo due cellule di Kerr opportunamente sincronizzate.

Già fin dall'anno 1904 Wien e Schweitzer (4) proponevano un metodo del genere allo scopo di determinare un eventuale effetto di prim'ordine del moto di traslazione terrestre. Anche Michelson subito dopo considera tale possibilità (5), ma conclude che i vari metodi con i quali si potrebbero sincronizzare due ruote dentate o due specchi rotanti posti a notevole distanza non sono sicuramente validi dal lato concettuale e comunque non pratici.

Nell'anno 1928 Karolus e Mittelstaedt determinarono la velocità della luce col metodo di Fizeau, introducendo però una importante innovazione, poichè alla ruota dentata sostituirono molto felicemente una cellula di Kerr, seguendo un suggerimento dato fin dal 1925 da Gaviola (6). In seguito ai brillanti risultati da essi conseguiti rinverdì la speranza di determinare la velocità della luce in percorsi aperti, usando due cellule di Kerr opportunamente sincronizzate. Data la relativa facilità con la quale si possono far vibrare con uguale periodo due campi elettrici oscillanti sembrava di avere finalmente trovato la via per giudicare perentoriamente tra fisica classica e realistica. Ma nessuno, per quanto ci consti, ha tentato pratiche realizzazioni (7).

3. Ed ora vogliamo esporre una critica generica delle varie possibilità pratiche e concettuali delle varie proposte.

In primo luogo occorre fare una premessa di carattere epistemologico. La teoria della relatività non è soltanto una organica coordinazione dei dati sperimentali, ma si basa pure su peculiari criteri interpretativi dell'esperienza. Secondo lo spirito genuinamente positivo della relatività la questione posta non ha significato

(4) W. WIEN, « Phys. Zeit. », V, p. 585 e 604 (1904); A. SCHWEITZER, « Phys. Zeit. », V, p. 809 (1904). Qui intendiamo discutere solo esperienze di laboratorio, ma possiamo notare di passaggio che già Maxwell aveva proposto una ingegnosa esperienza astronomica per risolvere la questione. Cfr. J. C. MAXWELL, « Papers », vol. II, p. 769 (1890); « Nature », XXI, p. 314 (1880).

(5) A. MICHELSON, « Phil. Mag. », 8, p. 716 (1904).

(6) A. KAROLUS e O. MITTELSTAEDT, « Phys. Zeit. », XXVIII, 698; E. GAVIOLA, « Zeit. f. Phys. », XXXV, 748 (1926).

(7) JACOB, « C. R. », 184, p. 1432 (1927); B. ZANELLA, *L'Elettricista*, XXXVIII, I, p. 4.

se non dopo avere preventivamente assegnato un criterio opportuno, fondato su operazioni concettualmente possibili, per definire la contemporaneità di due eventi lontani. Portando questo modo di vedere alle estreme conseguenze si giunge molto naturalmente alla conclusione che la costanza della velocità della luce è un postulato, non già un risultato sperimentale. Per essere più precisi si deve aggiungere che il relativista, pur adottando la propagazione della luce per sincronizzare orologi lontani, non sostiene affatto che non si possa fare, assolutamente parlando, un'altra convenzione [8]. Egli sostiene semplicemente l'imprescindibilità di una qualunque convenzione, e richiede che questa sia di carattere positivo. Insomma esclude in modo radicale il concetto di tempo assoluto della meccanica classica.

Accettando questo modo di vedere, può sembrare che due sole vie rimangano aperte davanti a noi:

a) Considerare come priva di senso ogni ricerca del genere.

b) Premettere un'altra definizione positiva diversa da quella usuale in relatività della contemporaneità di due eventi lontani.

Ciò nonostante riteniamo che, nel giudicare della possibilità di un esperimento del genere, ci si possa collocare da un punto di vista classico, non già per condannare la relatività ma per stabilirla.

Se infatti, basandoci sul concetto di spazio e tempo assoluti siamo costretti ad attenderci fenomeni che l'osservazione non conferma ne conseguirà la necessità di aderire alle innovazioni relativistiche. Comunque è questo il punto di vista nel quale ci collochiamo, e per conseguenza impostiamo così la questione: Accettando il concetto di spazio e tempo assoluti è possibile determinare con un metodo pratico la velocità della luce in un percorso di semplice andata da A a B con una precisione maggiore dell'ordine di grandezza della velocità del moto di traslazione terrestre?

4. Precisato superiormente il senso della questione, procediamo ad un'analisi delle possibilità che ci sono offerte dai vari dispositivi in possesso del fisico.

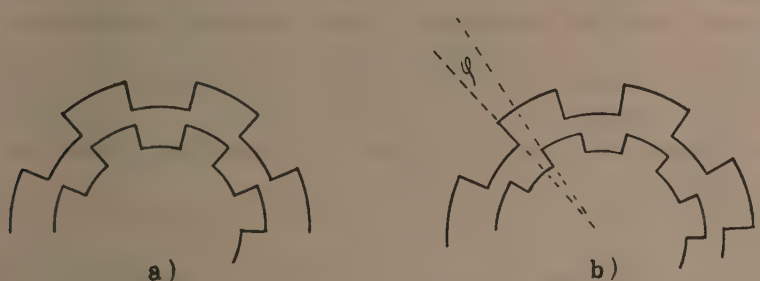
A nessuno può sfuggire la necessità di risolvere la seguente questione preliminare: Come realizzare ed accertare il rigoroso sincronismo di due intercettatori periodici di luce? Si può prescindere in qualche modo da una previa risoluzione con qualche via indiretta? E, se non si può, quali sono i limiti di tolleranza delle eventuali imprecisioni pratiche?

Per comprendere bene il significato della questione, supponiamo che si voglia determinare la velocità della luce col metodo di Fizeau, con l'unica variante che ora vogliamo applicarlo a percorsi di semplice andata. Avremo perciò bisogno di adoperare due ruote, invece di una sola, poste là dove ha inizio e termine il percorso del raggio luminoso. Da principio, volendo esaminare le cose da un punto di vista concettuale, prescindiamo dalle difficoltà pratiche. Supponiamo che inizialmente queste due ruote siano coassiali e perfettamente simmetriche rispetto ad un piano ortogonale all'asse e che ruotino con velocità costante conservando costantemente la predetta simmetria. Se ciò fosse concesso, non vi sarebbe nulla

(8) A. Einstein, *The Meaning of Relativity*, p. 28, Princeton, 1946.

da cambiare al metodo di Fizeau, le formule sarebbero assolutamente le stesse, salvo che in luogo di $2\,l$ dovremmo porre semplicemente l, poichè per ipotesi la luce fa un percorso di semplice andata.

Ma la difficoltà consiste nel realizzare questa simmetria. Se avessimo a disposizione corpi perfettamente rigidi, potremmo connettere le due ruote ad un medesimo albero rotante procurando di dotarle all'atto della costruzione della necessaria simmetria. Per l'ipotesi della perfetta rigidità, tale simmetria si conserverebbe durante la rotazione ed il metodo sarebbe senz'altro applicabile. Ma non abbiamo a disposizione corpi perfettamente rigidi. D'altra parte considerando che, a causa dell'enorme velocità della luce, la distanza AB deve essere notevole, o, diversamente, la velocità impressa al dispositivo deve essere troppo elevata, non tollerabile da nessun materiale a nostra disposizione, non si può neanche lontanamente pensare ad un dispositivo del genere. Dovremo pensare alla realizzazione del necessario sincronismo con altri metodi.



Ma poniamo bene in mente che il rigoroso sincronismo di due ruote dentate implica due cose:

a) uguaglianza dei periodi;

b) uguaglianza della fase (o anche sfasamento conosciuto).

Ciò risulta chiaro, se pure ce ne fosse bisogno, dalla figura qui allegata.

Supponiamo che l'asse di rotazione sia normale al piano del disegno e proiettiamo su questo le due ruote dentate. Per facilità di confronto la seconda è impiccolita. Se, sempre considerando le cose da un punto di vista concettuale, supponiamo le due ruote rigidamente collegate si vede bene in *a*) c'è simmetria rispetto ad un piano ortogonale all'asse di rotazione, invece in *b*) tale simmetria è assente, ma potrebbe essere restituita, ruotando la prima ruota rispetto alla seconda dell'angolo φ. Si può dire molto convenientemente che le due ruote sono uguali, ma sfasate.

È evidente che nel caso *b*) il metodo fallirebbe completamente se lo sfasamento fosse sconosciuto. Questa distinzione la consideriamo basilare, poichè, mentre non è difficile, neppure praticamente, fare rotare due ruote dentate con lo stesso periodo, è estremamente difficile, se non proprio impossibile, farle rotare con la stessa fase. Così fin dal 1904 S. Schweitzer proponeva di sincronizzare due ruote dentate poste a distanza AB collegandole con due motori elettrici sincroni dipendenti dallo

stesso generatore. È ovvio però che con questo dispositivo, nella migliore delle ipotesi, si garantisce l'uguaglianza dei periodi, non l'uguaglianza di fase.

Ma c'è di più. Quando si tenta di rimediare a questo difetto ci si aggira in un circolo vizioso. Si potrebbe infatti (è l'idea più ovvia) collocare il generatore nel punto medio di AB e condurre la corrente alternata con due fili uguali, immersi nel medesimo dielettrico, in modo che gli impulsi arrivino esattamente nel medesimo tempo. Ma a parte le difficoltà pratiche di realizzare tale simmetria, quando si riflette che la velocità della Terra dovrebbe avere influenza anche sulla propagazione dei potenziali lungo i conduttori, si conclude agevolmente che si introduce nel problema la stessa incognita che si vorrebbe determinare.

Queste considerazioni continuano ad essere valide anche se sostituiamo alle ruote dentate le cellule di Kerr, la funzione essendo sostanzialmente la stessa, interrompere periodicamente un fascio luminoso.

Ammessa la necessità del rigoroso sincronismo, vediamo come esso si potrebbe realizzare.

È chiaro intanto che il campo elettromagnetico eccitante le due cellule potrebbe funzionare:

a) con eccitazione unica regolata da una stessa sorgente;

b) con eccitazione indipendente ma controllabile.

Per ragioni ovvie di praticità gli studiosi dànno la preferenza al primo metodo, per conseguenza analizziamo le possibilità di questo.

A priori questa regolazione si potrebbe attuare per via meccanica o elettromagnetica.

Esclusa per ovvie ragioni di praticità la prima, si deve ricorrere alla propagazione di una eccitazione elettromagnetica. Sembra che le varie possibilità siano riconducibili alle tre seguenti, di cui vogliamo brevemente esaminare gli eventuali vantaggi e svantaggi.

1ª Emissione discontinua di onde a tratti separati ed ugualmente distanziati (tipo radar) facendo coincidere la recezione del pacchetto di onde col massimo o con una determinata fase del campo elettromagnetico eccitante le cellule di Kerr. Ma, per quanto si è detto precedentemente, il tempo di propagazione di questi impulsi elettromagnetici è influenzato dal moto della Terra, secondo la teoria classica, allo stesso modo che qualunque altra radiazione.

2ª Emissione di onde persistenti progressive e regolamento su queste delle due cellule di Kerr, facendo in modo che i massimi del campo elettrico eccitante siano concordi con la recezione del massimo dell'onda regolatrice (od anche semplicemente con sfasamento uguale e conosciuto per ambedue le cellule). È quanto vorrebbe fare Amerio.

Ma con questo sistema si può conseguire il sincronismo ad una sola condizione. Fare in modo che la distanza AB sia un multiplo esatto della lunghezza d'onda della radiazione regolatrice e nella direzione prescelta. A questo modo i massimi ed i minimi si verificherebbero nelle due cellule contemporaneamente. Anche se la distanza AB contenesse un multiplo esatto più una frazione di lunghezza d'onda, purchè si conoscesse l'entità di questa frazione, le cose andrebbero bene ugualmente.

Però anche qui si cade in un circolo vizioso. La lunghezza d'onda non si può conoscere con sufficiente precisione e se poi si conoscesse, dovendosi ammettere nota anche la frequenza, la stessa velocità di propagazione ne risulterebbe già completamente determinata. Il problema sarebbe già risolto. Dunque anche per questa via non si giunge al risultato sperato.

3ª Ed infine si potrebbe pensare all'uso di onde stazionarie. Nel caso ordinario, come è ben noto, l'ampiezza delle vibrazioni raggiunge il suo valore massimo nei punti ventrali e lo raggiunge contemporaneamente. Ponendo allora le due cellule di Kerr in due ventri dell'onda stazionaria e raccordandole con questa in modo che il campo elettrico eccitante le cellule vibri in concordanza di fase con il campo dell'onda regolatrice, o, diversamente, con sfasamento uguale per entrambi le cellule, queste sarebbero senz'altro in accordo di fase. Da un punto di vista pratico ci sarebbe da obbiettare che il reperimento dei nodi e dei ventri non si può fare con molta precisione, ma più grave ancora è una obiezione che si può fare dal lato concettuale.

In questo caso, per ipotesi, le due onde progressiva e regressiva che si sovrappongono avanzano ciascuna con velocità rispettivamente $c - v$ e $c + v$. Come si modificano le formule consuete in questo caso?

Abbiamo:

$$S = s_1 + s_2 = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{c - v} \right) + A \sin \omega \left(t + \frac{x}{c + v} \right)$$

$$S = 2 A \sin \omega \left[t - \frac{xv}{c^2 - v^2} \right] \cos \frac{\omega cx}{c^2 - v^2}$$

A proposito di questa formola si può fare subito una osservazione che, astrattamente considerata, è favorevole all'applicazione di cui stiamo discutendo. La posizione relativa dei ventri e dei nodi è quella stessa che si avrebbe nel caso ordinario (velocità uguale a c in entrambi i sensi) a condizione di trascurare termini di second'ordine in $\frac{v}{c}$. Infatti:

$$\frac{\omega cx}{c^2 - v^2} = \frac{\omega cx}{c^2 (1 - \beta^2)} = \frac{\omega}{x} (1 + \beta^2 + \beta^4 + \cdots) = \frac{\omega x}{c}$$

nell'ordine di approssimazione suddetto.

La lunghezza d'onda, definita come il doppio della distanza fra due nodi consecutivi, è quella stessa che si avrebbe se il moto della piattaforma terrestre non avesse alcuna influenza, sempre nell'ordine di approssimazione suddetto (9).

Però c'è una differenza importante rispetto allo svolgimento del fenomeno che si avrebbe per $v = 0$, e che impedisce di ottenere con questo mezzo la sincronizzazione dei due cronometri posti in A e B.

Nelle posizioni ventrali i massimi non sono rigorosamente sincroni. Infatti per i punti rispetto ai quali vale la relazione:

$$\cos \frac{\omega cx}{c^2 - v^2} = 1$$

(9) Cfr. M. J. MICHAUX, «C. R.», 168, p. 507 (1919).

abbiamo pure:

$$S = 2\,A \sin \omega \left(t - \frac{xv}{c^2 - v^2} \right).$$

I valori di t per i quali si raggiunge il massimo dipendono da x. A rigore quindi neppure si potrebbe parlare di onde stazionarie, almeno nel senso ordinario della parola.

Come si vede, anche studiando la questione da un punto di vista classico, aderendo cioè al concetto di spazio e tempo assoluti, in tutti i possibili modi di sincronizzazione c'è latente l'insidia del circolo vizioso.

Qualcuno potrebbe pensare di eludere la necessità di una esatta sincronizzazione, mediante l'adozione di qualche dispositivo opportuno. La discussione di questa possibilità sarà differita ad una Nota di prossima pubblicazione. Ci proponiamo di dimostrare che la cosa è possibile solo con riferimento al secondo principio della relatività.

Fisica. — *Sulla nuova tecnica dei contatori a scintillazione* (*). Nota II di M. Ageno, M. Chiozzotto e R. Querzoli, presentata (**) dal Socio G. C. Trabacchi.

1. Come si è detto in una precedente Nota (1), le possibilità d'impiego dei contatori a scintillazione appaiono talmente ampie, da far sì che si possa guardare alla nuova tecnica come ad una delle più promettenti. Una severa limitazione è tuttavia imposta dalla ristrettezza del volume sensibile, legato alle dimensioni del cristallo fluorescente.

Tale limitazione può essere in parte compensata mediante l'impiego di opportuni mosaici cristallini e di dispositivi ottici per la concentrazione almeno parziale della luce delle scintillazioni, nonchè mediante la messa in parallelo di più fotomoltiplicatori. Essa costituisce tuttavia sempre la principale difficoltà da superare per poter usare questi contatori nello studio della radiazione cosmica, ove la rarità degli eventi da osservare esige generalmente l'impiego di larghe aree sensibili.

Proseguendo nel nostro studio sistematico, ci siamo proposti di vedere se l'impossibilità di procurarsi dei cristalli fluorescenti di molto grandi dimensioni non fosse per caso una difficoltà superabile sostituendo al cristallo un opportuno liquido trasparente e fluorescente.

Nella vastissima e molto dispersa bibliografia della fluorescenza (2), esistono molti lavori relativi a liquidi puri e soluzioni eccitati con radiazioni ultraviolette. Non ci è stato invece possibile trovare nessuna utile indicazione su la fluorescenza

(*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di fisica dell'Istituto Superiore di Sanità di Roma.

(**) Nella seduta del 12 maggio 1949.

(1) M. Ageno, M. Chiozzotto, A. Querzoli, «Rend. Acc. Lincei», Nota I, vol. VI, fasc. 4, p. 453 (1949); vedi anche: «N. C.», maggio 1949.

(2) Per un'esposizione riassuntiva dei principali resultati si veda: M. Curie, *Fluorescence et Phosphorescence*, Paris, Hermann 1946.

eccitata nei liquidi da radiazioni α β o γ. Abbiamo perciò deciso di fare a questo proposito delle ricerche sperimentali, sui primi resultati delle quali riferiamo nella presente Nota.

2. Il dispositivo da noi adottato è rappresentato schematicamente nella figura 1. Il fotomoltiplicatore tipo 931 A, raffreddato con CO_2 solida è contenuto in una scatola termicamente isolante, portante in corrispondenza del fotocatodo una finestra, chiusa con una lastrina di vetro. Per evitare che la lastrina si raffreddi e quindi su di essa condensi l'umidità atmosferica, la superficie anteriore delle scatola è riscaldata mediante una spiralina di nichelcromo percorsa da una corrente opportuna.

Una sorgente di raggi γ (circa 12 millicurie di MsTh) contenuta in un tubetto metallico del diametro di 1,5 cm, veniva posta per le misure alla distanza di circa 3 cm. dal vetro della finestra. I liquidi da esaminare, contenuti in vaschette di vetro a facce piane e parallele di spessore variabile tra 0,5 e 3,0 cm, venivano

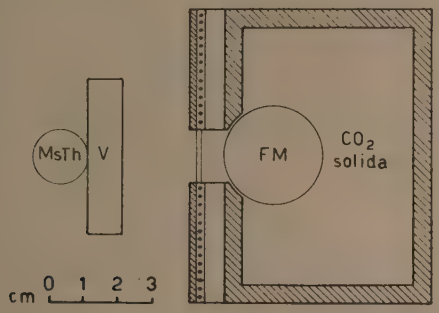


Fig. 1.

posti a seconda dei casi a contatto con la sorgente oppure con la finestra. Essendo necessaria la massima costanza della tensione di alimentazione del FM, abbiamo adoperato a questo scopo con ottimi resultati un alimentatore stabilizzato tipo P 7 dell'Italaelettronica.

Come misura del potere fluorescente del liquido in esame abbiamo assunto il valore della corrente anodica del FM (detratta la corrente oscura), misurata mediante un elettrometro tipo Trabacchi [3] dalla caduta di tensione ai capi di una resistenza da 10,5 Megaohm. A parità di condizioni geometriche e di irraggiamento, questo dato è sensibilmente proporzionale al numero dei fotoni emessi dall'unità di volume della soluzione per quanto γ incidente.

3. Con tale dispositivo abbiamo innanzi tutto esaminato un gran numero di liquidi e di soluzioni sia organiche sia inorganiche. Quasi tutte le sostanze esaminate hanno determinato un aumento della corrente anodica del FM compreso in genere tra una e tre volte la corrente di fondo. In pochi casi non abbiamo osservata nessuna attività, in alcuni altri delle attività decisamente maggiori e non molto

(3) G. C. Trabacchi, «Rend. Ist. Sup. Sanità», V, 644 (1942).

inferiori a quelle ottenibili in condizioni geometriche non troppo dissimili da una larga lastra di naftalina trasparente dello spessore di $2 \div 3$ mm. Almeno nei limiti di queste prime esperienze orientative, quei liquidi e quelle soluzioni che si distinguono per delle brillanti fluorescenze all'ultravioletto, non hanno manifestato ai raggi γ attività più intense della media delle altre sostanze. La figura 2 fa vedere l'andamento della corrente anodica del FM nelle condizioni geometriche della figura 1, al crescere dello spessore del liquido in esame, per alcuni dei più comuni solventi.

Ci siamo naturalmente preoccupati di dimostrare con l'aumento della corrente anodica imputabile ai liquidi esaminati sia effettivamente dovuto a emissione da parte del liquido di fotoni di lunghezza d'onda compresa nella zona di sensibilità

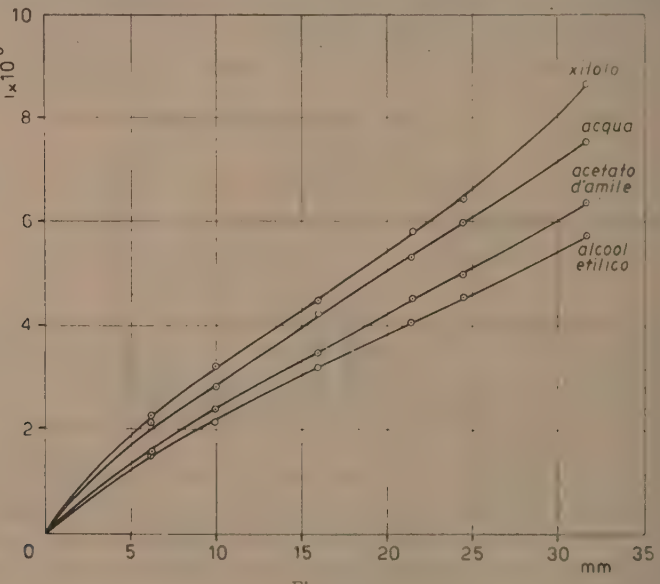


Fig. 2.

del fotocatodo ($3000 \div 5000$ Å) e non per esempio ad elettroni Compton emessi dal liquido sotto l'azione dei raggi γ incidenti, ed estraenti dei secondari dal fotocatodo. Che il contributo degli elettroni estratti dal liquido sia del tutto trascurabile è stato da noi verificato in tre modi diversi:

1) un sottile foglio di carta nera interposto tra la vaschetta contenente il liquido e la finestra del FM riduce sempre la corrente anodica al suo valore di fondo;

2) sostituendo alla vaschetta col liquido una laminetta di piombo di spessore tale da emettere un numero di elettroni secondari assai più grande di quello emesso dal liquido, non si osserva nessun aumento della corrente anodica del FM;

3) sciogliendo in un liquido attivo una piccola quantità di bicromato potassico (che ha un'intensa banda di assorbimento ricoprente la zona di sensibilità del fotocatodo) l'attività si annulla completamente.

Quest'ultimo resultato, che dimostra nel modo più persuasivo che si tratta effettivamente di luce, è suscettibile in realtà di due interpretazioni diverse. Si può supporre che la sparizione dell'attività sia dovuta ad assorbimento da parte del bicromato potassico della luce emessa per fluorescenza dal liquido, oppure che la

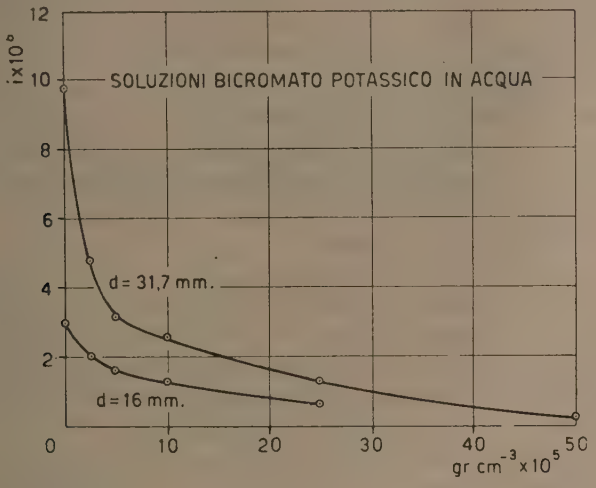


Fig. 3.

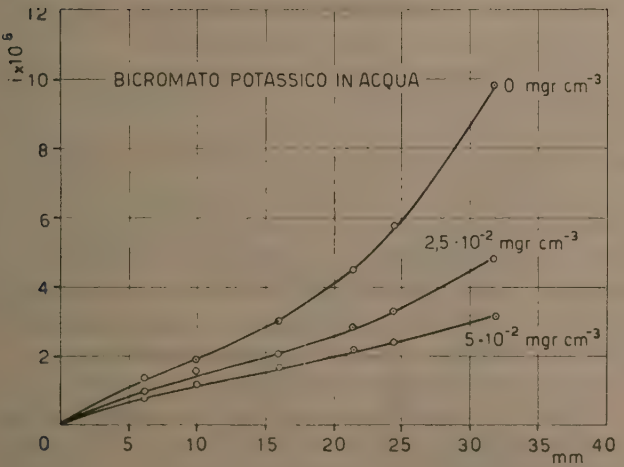


Fig. 4.

presenza del bicromato in soluzione determini una diminuzione effettiva della fluorescenza: per esempio, la scissione di determinate associazioni molecolari responsabili dell'emissione della luce.

Per decidere tra le due alternative, sono state fatte le misure delle figure 3 e 4 relative alle soluzioni di bicromato potassico in acqua. Nella figura 3 è mostrato l'andamento dell'andamento dell'attività in funzione della concentrazione, per due

diversi spessori della soluzione: come si vede, basta mezzo milligrammo di bicromato per cm^3 per rendere la soluzione completamente inattiva. La figura 4 fa vedere l'andamento dell'attività in funzione dello spessore della soluzione, per tre diverse concentrazioni. Le misure sono state fatte ponendo la vaschetta col liquido a contatto con la finestra del FM (in condizioni quindi un po' diverse da quelle cui si riferisce la figura 2). Se si trattasse esclusivamente di una diminuzione effettiva di fluorescenza, le ordinate delle tre curve dovrebbero evidentemente essere tra loro proporzionali. La minor crescita delle due curve inferiori in corrispondenza dei valori maggiori dello spessore indica che, com'era da attendersi, l'assorbimento dà certamente un contributo sensibile alla diminuzione dell'attività.

Non si può tuttavia escludere che vi sia anche una effettiva diminuzione della fluorescenza: l'andamento delle curve della figura 4 fin verso i 15 mm. di spessore non è incompatibile con questa ipotesi.

4. Il potere fluorescente dei liquidi puri da noi esaminati è risultato in genere troppo basso per poter essere sfruttato con successo ai fini dei contatori a scintillazione. Abbiamo perciò rivolta la nostra attenzione alle soluzioni, trovando effettivamente in parecchi casi un forte innalzamento della fluorescenza dovuto alla presenza del soluto in opportuna concentrazione.

Come esempio dei risultati ottenuti, riportiamo le misure relative a soluzioni di naftalina in xilolo, rappresentate nelle figure 5 e 6. La figura 5 fa vedere l'andamento dell'attività in funzione della concentrazione, per tre diversi spessori di soluzione; nella figura 6 è rappresentato con maggior dettaglio l'andamento della salita iniziale della curva relativa a $d = 16$ mm.

Come si vede, l'interesse di queste misure deriva non tanto dall'attività che si riesce a raggiungere (decisamente più elevata di quella dei solventi puri, ma inferiore a quella di altre soluzioni), quanto dal fatto che le soluzioni in questione evidentemente non soddisfano neppure qualitativamente la legge di Perrin, valida per le soluzioni fluorescenti all'ultravioletto. Per quanto infatti le misure siano state proseguite praticamente fino alla saturazione, non si è trovata traccia (dopo la salita iniziale) di quella diminuzione esponenziale dell'attività che è prevista dalla legge suddetta. È poi evidente che la saturazione che si raggiunge dopo la crescita iniziale non è dovuta ad assorbimento da parte della soluzione stessa, poichè l'attività di saturazione cresce al crescere dello spessore.

L'andamento osservato potrebbe forse spiegarsi supponendo che in seno alla soluzione si formino dei centri fluorescenti più o meno stabili, costituiti da una molecola di naftalina che organizzi attorno a se un certo numero piuttosto elevato di molecole del solvente. Il numero di questi centri (proporzionale all'attività) non potrebbe evidentemente crescere indefinitamente al crescere della concentrazione, per deficienza di molecole di xilolo, il che porterebbe appunto a una saturazione dell'attività. Si ricava dalla figura 6 che la saturazione è praticamente raggiunta quando la concentrazione è tale che si abbiano 3 molecole di naftalina ogni 1000 di xilolo.

Questo punto di vista è confortato dal fatto che la naftalina liquida ha solo una debole attività paragonabile a quella dei solventi puri e vi sono solventi

(per esempio l'alcool etilico) in cui la naftalina non determina alcun aumento di attività.

Occorre naturalmente tener presente che la luce di fluorescenza è rivelabile col nostro dispositivo solo se di lunghezza d'onda compresa tra 3000 e 5000 Å.

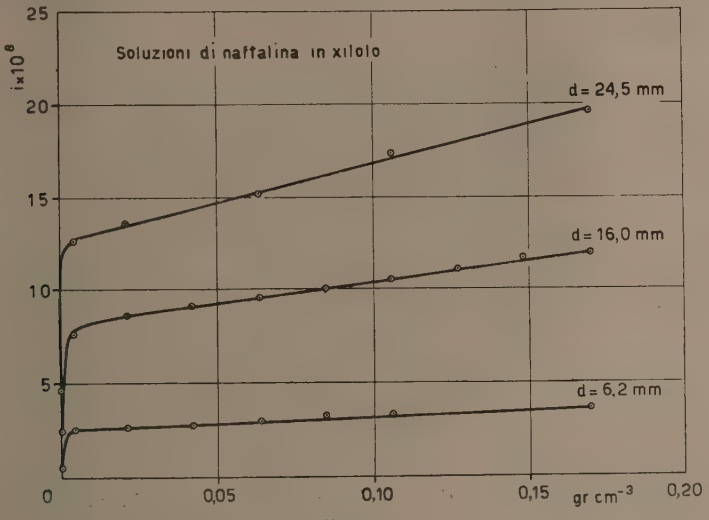


Fig. 5.

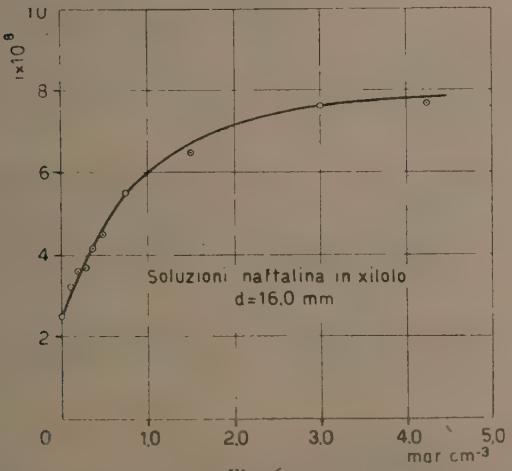


Fig. 6.

Sono attualmente allo studio sistemi liquidi di potere fluorescente notevolmente superiore a quello dei liquidi citati nella presente Nota.

È infine nostro gradito dovere ringraziare molto vivamente il professore G. C. Trabacchi per il continuo interessamento ed i molti consigli tecnici, nonchè per i mezzi messi con grande liberalità a nostra disposizione nel laboratorio da lui diretto.

Chimica. — *Ponte sbilanciato per titolazioni conduttometriche.* Nota di Luigi Riccoboni e Ezio Ferrari, presentata (*) dal Corrisp. G. Semerano.

Le vaste possibilità di applicazione del metodo conduttometrico di titolazione, sia nella ricerca scientifica, orientata verso problemi analitici o di cinetica (1), come pure nel controllo tecnico di fabbricazione, ha promosso numerosi ed efficaci perfezionamenti intesi sopratutto ad aumentare la prestazione del dispositivo di lavoro agli effetti della sensibilità e della praticità di esecuzione delle misure (2). Abbandonato completamente l'azzeramento telefonico del ponte, questo è stato sostituito dall'azzeramento galvanometrico, successivamente però lo stesso principio di lavoro a ponte bilanciato ha ceduto il posto al metodo a deviazione (ponte sbilanciato). Come è noto, in questo caso le variazioni della resistenza in esame vengono seguite attraverso le variazioni di tensione (lette direttamente su di uno strumento) che esse stesse determinano nella diagonale galvanometrica, ferme restando tutte le altre grandezze elettriche del ponte. Vale la pena ricordare che l'adozione di questi criteri di lavoro ha reso già possibile la determinazione di numerose specie ioniche presenti in soluzione accanto ad un eccesso, fino a 500 volte la loro concentrazione, di altri elettroliti non titolabili, condizione alla quale l'originario metodo telefonico si dimostra assolutamente insufficiente. Ciò dicasi pure nel caso di microtitolazioni (qualche γ o frazione di γ di sostanza) per le quali spesso lo spostamento globale del contatto mobile, operando con il ponte bilanciato, ammonterebbe solamente a qualche millesimo della lunghezza del reocordo.

In linea di massima, un ponte ad azzeramento galvanometrico è utilizzabile anche come ponte a deviazione, devono venir fatte però a tale proposito alcune precisazioni. Anzitutto, essendo il ponte alimentato con corrente alternata, il trasferimento della rivelazione da telefonica a galvanometrica implica o l'impiego di un raddrizzatore (3) generalmente ad ossido (4), oppure di un galvanometro a corrente alternata (5). Nel caso del raddrizzatore ad ossido però, i valori di capacità e di resistenza, che gli corrispondono nel circuito ad esso equivalente, non sono

(*) Nella seduta del 12 maggio 1949.

(1) G. Jander e H. Immig, «Berichte», *69*, 1282 (1936).

(2) Cfr. G. Jander e O. Pfundt, *Leitfähigkeitstitrationen* in «Physikalische Methoden der analytischen Chemie», II, p. 1 (1936), III, p. 389 (1939); «Akad. Verlagsgesellschaft», Leipzig; v. anche L. Riccoboni, *Lezioni di elettrochimica generale*, vol. I, p. 281, Patron, Bologna.

(3) G. Jander e O. Pfundt, *Leitfähigkeitstitrationen u. Leitfähigkeitsmessungen*, 2ª Ediz., Stuttgart, F. Enke, 1934; A. T. S. Britton, *Conductometric Analysis*. London, Chapman e Hall, 1934.

(4) Cfr. F. L. Hahn, «Z. Elektr.», *36*, 989 (1930); E. Rother, G. Jander e O. Pfundt, «Chem. Fabrik», *5*, 9, 19 (1932).

(5) G. Jander e H. Schorstein, «Z. angew. Chem.», *45*, 701 (1932).

costanti, bensì variano notevolmente con la corrente in gioco [6]. La resistenza aumenta infatti con una funzione circa esponenziale ($\sim$ quadratica) al diminuire della corrente espressa come percentuale della massima nominale. Dato che operando generalmente con frequenza di rete, allo scopo di attenuare il più possibile i fenomeni di polarizzazione, si ha la tendenza di lavorare con il carico specifico di corrente più basso possibile, (impiego di strumenti molto sensibili, galvanometri), ne risulta che il raddrizzatore vien fatto lavorare nella parte iniziale della sua curva caratteristica cioè a bassa percentuale della corrente nominale; di conseguenza l'indicazione non è lineare, bensì le divisioni della scala vanno sempre più addensandosi verso lo zero. L'inconveniente è notevole specialmente nel caso di diagrammi di titolazione con punto di equivalenza a minimo, giacchè proprio nell'intorno di esso l'indicazione va perdendo in sensibilità e precisione.

In vista di tale fatto, nella pratica delle misure di laboratorio noi abbiamo sempre operato in modo da determinare il rovesciamento del diagramma, essendo sufficiente a tale scopo iniziare l'esperienza con il ponte quasi bilanciato, e scegliendo mediante una prova orientativa, o più semplicemente valutando in base alle diverse mobilità degli ioni sostituentesi nella titolazione, quel valore, della resistenza compensatrice e della sensibilità sullo shunt dello strumento, per cui al punto di equivalenza l'escursione fosse massima e tuttavia inferiore al valore di fondo scala. Circa l'impiego di un galvanometro a corrente alternata va ricordato che tali strumenti sono disponibili solamente con valori di sensibilità relativamente ridotta, al massimo 10^{-6} A/divisione di scala, non si prestano quindi per complessi di misura destinati a lavorare in condizioni particolarmente critiche.

La precisazione più importante però che deve essere fatta circa l'impiego di un ponte normale in condizione di sbilanciamento, è che la tensione di uscita è funzione non lineare, bensì iperbolica, della variazione di resistenza di uno dei suoi rami, ed è altresì funzione lineare della tensione di alimentazione. Nel mentre quest'ultima può venir facilmente stabilizzata amperometricamente facendo uso di lampade a filamento di ferro in idrogeno o meglio ancora voltmetricamente mediante lampade tipo « Stabilovolt » al neon [7], il primo inconveniente invece è ovviamente insito nel principio stesso del metodo di lavoro.

Risulta infatti per la tensione ai morsetti dello strumento

$$e = Ri_1 - R_1 i_2 = \frac{E}{R_1 + R_2}\left[\frac{RR_2 - R_1R_x}{R + R_x}\right]$$

Se indichiamo con R_x^* il valore per cui il ponte va in equilibrio, tale cioè per cui

$$RR_2 - R_1R_x^*$$

(6) Ved. per esempio T. WALCHER, « Energia elettrica », *16* (1939); WOLMAN, KADEN, « Z. Techn. Physik. », *10*, 476 (1931); E. HUGHES, « J. Inst. El. Engs. London », *75*, 453 (1934).

(7) Stabilovolt « GMBH », *Stabilisierte Stromquellen*, Berlin; Siemens, Stabilovolt, *Lo stabilizzatore di tensione e le sue applicazioni*, Siemens S. A., Milano.

la relazione soprascritta si trasforma nella

$$e = E \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot \frac{R_x^* - R_x}{R + R_x}$$

e facendo le posizioni

$$R_x - R_x^* = \Delta R_x \quad ; \quad E \frac{R_1}{R_1 + R_2} = A \quad ; \quad R + R_x^* = B,$$

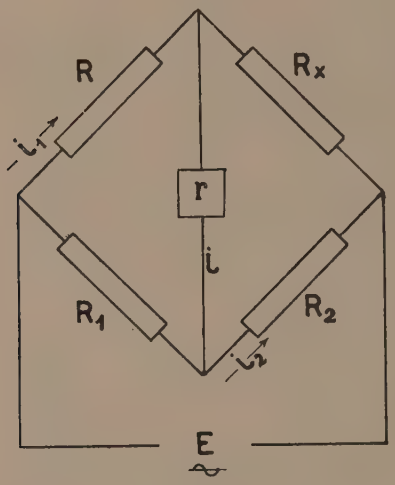


Fig. 1.

risulta infine la reazione iperbolica:

$$e = - \frac{A \cdot \Delta R_x}{B + \Delta R_x}$$

La linearità di indicazione, previa sempre una perfetta stabilizzazione di entrata, si può realizzare misurando potenziometricamente l'intensità di corrente attraversante la cella. Treadwell [8] utilizza allo scopo la caduta ohmica sviluppata agli estremi di una resistenza posta in serie con la cella medesima, portando questa tensione alla griglia di un triodo impiegato come elettrometro. Va osservato che, rinunciando in tal caso all'effetto autocompensatore del ponte, è necessario operare una compensazione di sovrapposizione allo scopo di poter ancora sviluppare l'indicazione differenziale, derivante dalla sola variazione di resistenza, sull'intera scala dello strumento; inoltre, data la variabilità dei valori di resistenza con cui si può operare, dovendo ancora graduare potenziometricamente la tensione di alimentazione, deve essere sempre rispettata la condizione, spesso difficile a realizzarsi, che la resistenza del segmento di partitore sotteso sia molto piccola al confronto della somma della resistenza della cella e della resistenza in serie con essa.

(8) W. D. Treadwell, « Helv. Chim. Acta », *8*, 89 (1925); ved. anche gli schemi analoghi dovuti a U. Ehehardt, « Chem. Fabrik », 2, 443 (1929); K. H. Goode, « J. Am. Chem. Soc. », *44*, 26 (1922); Callan e Horrobin, « J. Soc. Chem. Ind. », *47*, 329 (1928).

A seguito di questa breve rassegna critica appare che il più pregevole contributo apportato attualmente in questo settore sia senz'altro rappresentato dal dispositivo dovuto a R. L. Garman [9]. In questo complesso, nel mentre la riutilizzazione del ponte garantisce i vantaggi della autocompensazione, la linearità del segnale finale di uscita è realizzata in modo soddisfacente mediante neutralizzazione della curvatura della tensione stessa prima dell'amplificazione con la curvatura della caratteristica del triodo amplificatore (6 A 6); tale linearità fra corrente di placca e resistenza di misura viene garantita entro l'intervallo 100 ÷ 500 μA.

Abbiamo ritenuto tuttavia meritevole di segnalazione uno strumento da noi realizzato fondato su di un principio di lavoro che, a nostro avviso, non è stato ancora preso in considerazione nonostante i notevoli vantaggi che esso presenta. Se la cella di conducibilità, qualunque siano i valori di resistenza e di variazione di resistenza che essa può presentare, viene posta in condizione di dover essere attraversata sempre dalla stessa corrente, allora la tensione alternata ai suoi elettrodi seguirà in modo rigorosamente lineare le vicende della sua resistenza. Il vantaggio che in primo luogo deriva da tale disposizione è che, qualunque sia la composizione della soluzione in esame, la densità di corrente sugli elettrodi rimane costante ed esattamente nota a quel valore prefissato per il quale, pur operando con la frequenza di rete, siano sicuramente esclusi fenomeni di polarizzazione. Allo scopo di non perdere, agli effetti del razionale impiego dello strumento indicatore, i vantaggi della autocompensazione, è stata mantenuta la disposizione a ponte, due rami del quale sono costituiti dagli stessi complessi stabilizzatori. A seguito di infruttuosi tentativi di realizzare detti complessi mediante diodi saturati, ci siamo orientati verso l'impiego di pentodi. Ognuno di questi complessi risulta costituito infatti da due pentodi 6 SJ 7, accoppiati in opposizione, e fatti lavorare come raddrizzatori; in tale caso la loro resistenza interna rappresenta anche la resistenza dei corrispondenti rami del ponte da loro occupati. Se noi teniamo presente le curve di lavoro di queste valvole [10], per tensione di soppressione = 0, tensione di griglia schermo ~ 70 volt, e tensione di griglia controllo ~ — 3 volt, risulta che la corrente di placca si mantiene perfettamente costante pure con un'escursione della tensione di placca da 100 a 500 volt. In fig. 2 è rappresentato lo schema di assieme, da esso risulta che nel mentre alle tensioni di griglia schermo provvedono le tre sezioni eguali di alimentazione A_1, A_2, A_3, le tensioni sulle griglie controllo sono ottenute quali cadute ohmiche attraverso i 4 reostati R_1, R_2, R_3, R_4 da 10 Kohm a fine aggiustamento. Le tre sezioni di alimentazione, dotate di raddrizzatori a selenio montati a quadrilatero secondo Graetz, forniscono tensione di schermo di 70–80 volt filtrate e stabilizzate per inserzione di lampade al neon VR 75. All'alimentazione dell'amplificatore del rivelatore provvede la rettificatice 80 e il normale stadio di spianamento F. Il terzo ramo del ponte è costituito da una ali-

(9) «Ind. Eng. Chem., Anal. Ed.», *8*, 146 (1936).

(10) Cfr. Diagrammi in H. J. REICH, *Theory and applications of electron tubes*, Mac Graw-Hill, New York, London, 1944, p. 680.

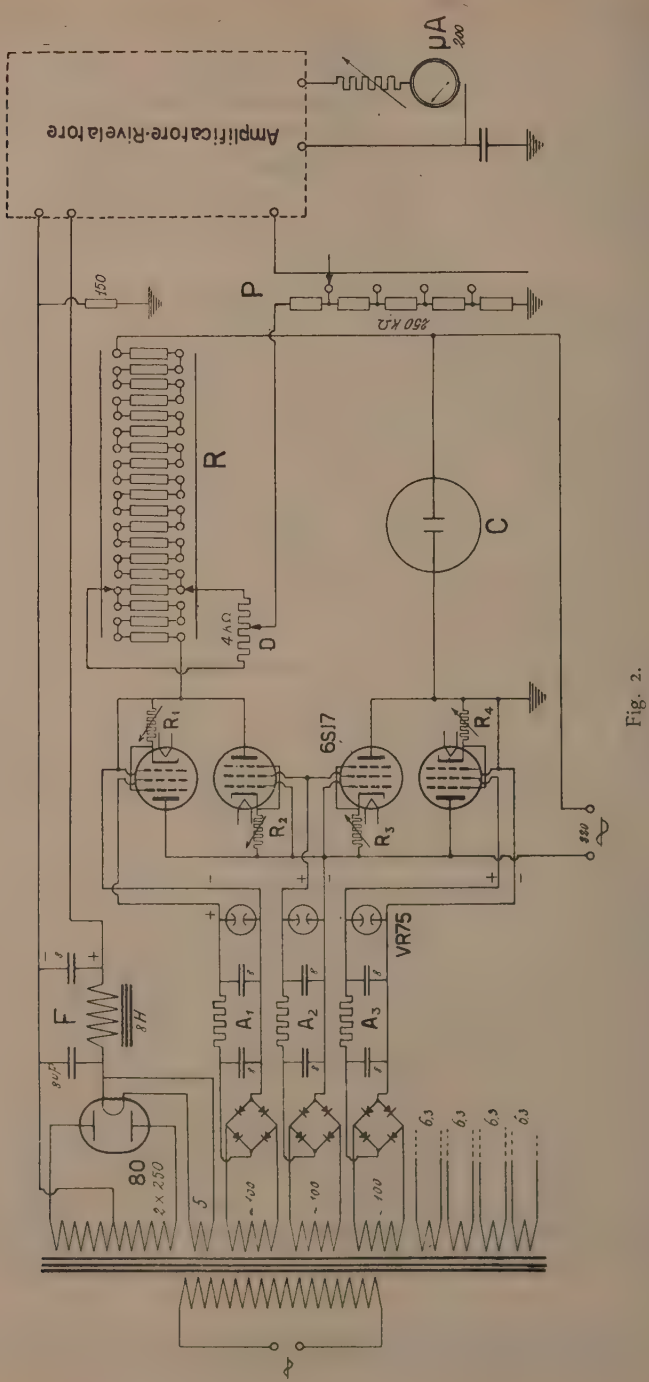

Amplificatore-Rivelatore
μA
200
P
150
250 KΩ
R
C
D
4 MΩ
R1
R2
R3
R4
6SJ7
VR75
A1
A2
A3
F
8 H
80
2 × 250
~ 100
~ 100
~ 100
6,3
6,3
6,3
6,3

Fig. 2.

quota variabile del reostato compensatore R 20 a elementi, provvisto di derivatore commutabile D di 4 Kohm per il fine aggiustamento della compensazione; il quarto ramo è occupato infine dalla cella di misura C. La diagonale galvanometrica è rappresentata nel caso presente dal sistema di resistenza P che costituisce il partitore attenuatore della sensibilità di entrata all'amplificatore. Quest'ultimo, del tipo a larga banda e controreazione, adatto per misure e usi generali di laboratorio, è realizzato con due pentodi per televisione del tipo EF 50 (VR 91) a basso consumo e a cifra di merito elevata. Dato che questo amplificatore sostanzialmente ripete lo schema proposto da C. Bertolasi [11], il suo tracciato non è riportato in figura. Lo stesso dicasi per il rivelatore del tipo voltmetro a diodo con trasferitore catodico (cathode follower) che noi abbiamo realizzato impiegando una sola lampada (6 SQ 7) sulla base di dati comunicati da G. B. Madella [12]. Applicata l'alimentazione alternata al ponte per collegamento diretto alla rete a 220 volt, inserendo un milliamperometro di precisione successivamente in serie alle lampade e regolando una volta tanto i quattro reostati $R_1 \div R_4$, le quattro correnti di placca vengono singolarmente portate esattamente al medesimo valore stabilito (nelle nostre misure 2,5 mA, 0,8 mA sulla griglia schermo), e adatto compatibilmente sia con la dimensione degli elettrodi della cella di conducibilità, sia con la prevedibile variazione di resistenza da misurare, in base alla quale dovrà crearsi uno scompenso di tensione $I \cdot \Delta R$ di uscita dal ponte tale da rientrare utilmente nei limiti dei valori di entrata propri dell'amplificatore. Quest'ultimo è stato a tale riguardo sottoposto ad accurato controllo per stabilirne i limiti di utile prestazione sia agli effetti della costanza del coefficiente di guadagno, sia per quanto riguarda l'efficenza della controreazione sulla sua stabilità rispetto moderate variazioni della tensione di alimentazione. Per quanto riguarda il primo punto il diagramma mV (∼) (entrata)/V (∼) (uscita) risultò lineare fino a 80 mV con un coefficiente massimo di ∼ 1000; circa il secondo punto, nonostante il buon comportamento dimostrato, abbiamo ritenuto opportuno stabilizzare l'alimentazione, comune con quella del rivelatore, con l'inserzione di un tubo STV 280/80. Il rivelatore a sua volta fino a circa 30 volt di entrata (30 mV di uscita dal ponte) dava correnti rettificate con pendenza pure perfettamente costante $\left(\text{resistenza interna apparente } \frac{30\ \text{V}}{225\ \mu\text{A}} = 1{,}33 \cdot 10^5\ \text{ohm}\right)$.

La perfetta messa a punto del ponte, cioè il controllo della simmetria delle singole correnti alternate fluenti attraverso le singole copie di pentodi, come pure il controllo di zero per appropriate resistenze metalliche inserite al posto della cella, veniva eseguito correntemente per via oscillografica. Va ricordato a tale proposito che, come è da attendersi in base alla caratteristica delle lampade, la corrente alternata stabilizzata così ottenuta risulta di forma quasi perfettamente rettangolare.

Molta cura è stata dedicata alla realizzazione del reostato compensatore R allo scopo di renderlo adatto a permettere la compensazione entro un'ampia

(11) « Tecnica elettronica », *1*, fascicolo 4 (1946).
(12) « Elettronica », *3*, 85 (1948).

gamma dei valori iniziali di resistenza della cella ($50 \div 4000\ \Omega$). I venti elementi di cui esso è costituito totalizzano una resistenza globale di 4000 ohm, suddivisi scalarmente a scarti relativi sempre maggiore (50, 100, 500, ohm) da destra verso sinistra. Fatta la ammissione che la minima escursione di resistenza della cella ammonti a 2,5 % e la massima a 10 % del valore di partenza, predisposti sul partitore attenuatore i rapporti di sensibilità 1 , $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_{10}$, $^1/_{50}$, le corrispondenti tensioni di uscita del ponte restano in tutti i casi comprese entro i limiti $0 \div 25\ m$ V, utili come si è detto relativamente agli intervalli di prestazione del complesso amplificatore rivelatore.

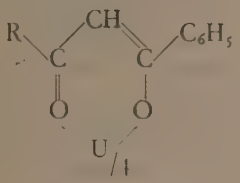
Come è stato sopra accennato, il derivatore toroidale commutabile D (4 KΩ) (tipo precisione ad ampio sviluppo) concede un'escursione continua del contatto di derivazione entro l'intervallo di tensione dell'elemento resistente che volta a volta è portato a sottendere; in tal modo la compensazione, anche sulle unità da 500 ohm, è notevolmente agevolata, sebbene, come è ovvio, a scopi analitici non sia necessario iniziare la misura da una posizione di zero esatto. Non va dimenticato altresì che dato il regime di corrente costante imposta alla cella, e data la natura eccezionale della resistenza in serie con essa rappresentata da quella interna e variabile dei pentodi, ogni variazione di resistenza della cella si « trasferisce » automaticamente nei pentodi con un conseguente effetto di « raddoppiamento complementare », per modo che la resistenza totale della serie possa rimanere invariata. Se teniamo presente tuttavia che per esempio con 2000 ohm nella cella, essendo la caduta ai pentodi di 215 volt, la loro resistenza interna ammonta ancora a $8{,}6 \cdot 10^4$ ohm, questo contributo di « trasferimento » appare ben trascurabile e pertanto la tensione sviluppata sulla diagonale di uscita può ben venir considerata funzione lineare della sola variazione di resistenza della cella. Ci siamo soffermati su questa precisazione critica per far presente che qualora si dovessero misurare variazioni notevoli di resistenze molto elevate, il principio di impiego della corrente stabilizzata potrebbe essere ancora utilmente mantenuto trasferendo però la misura della tensione direttamente ai capi della resistenza, previa applicazione agli stessi punti di un contropotenziale compensatore (derivato da un sistema potenziometrico). La taratura di collaudo del ponte è stata eseguita inserendo al posto della cella una serie di resistenze tarate da 100 a 4000 ohm, variabili gradualmente entro i limiti sopra menzionati. Stabilito l'ammontare di questa variazione, veniva scelto l'opportuno rapporto di attenuazione. La linearità dei diagrammi $\Delta I/\Delta R$ è risultata in tutti i casi completamente verificata con una pendenza a massima sensibilità dell'ordine di 18 μ A Ω^{-1}. Per uno strumento impiegato di 200 μ A di tipo normale (2 μ A/divisione), concedendo anche una instabilità di lettura di $\pm$ 1 μ A, erano ancora nettamente svelabili variazioni di 1 ohm su 4000 con errore massimo del 10 %.

Per quanto riguarda il materiale sperimentale relativo ai diagrammi di titolazione già eseguiti, impiegando tale dispositivo, ci riserviamo darne atto in una successiva comunicazione dedicata al controllo conduttometrico delle reazioni di precipitazione operate da $AgNO_3$ su composti organometallici dello Sn e del Pb in ambiente di alcool metilico anidro.

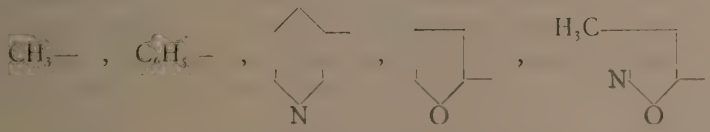
Chimica fisica. — *Ricerche magnetiche su alcuni complessi dell'uranio*^{IV}*, a numero di coordinazione otto* (*). Nota di LUIGI SACCONI, presentata (**) dal Corrisp. V. CAGLIOTI.

Il numero di coordinazione otto si riscontra piuttosto raramente. Van Vleck (1) e Penney e Anderson (2) hanno discusso la natura dei legami ottocoordinati sotto l'ammissione di una configurazione cubica, peraltro finora sperimentalmente non riscontrata (3). La trattazione eseguita da Pauling (4) e da Kimball (5) assegna ai legami ottocovalenti le configurazioni d^4sp^3, d^5p^3, d^5sp^2.

Nel corso di una indagine circa le possibilità generali di esistenza di complessi ottocoordinati dell'uranio tetravalente, di cui erano noti un acetilacetonato (6) ed un uranoossalato (7), ho potuto stabilire che questo elemento è capace di reagire con β-dichetoni come benzoilacetone, dibenzoilmetano, nicotinil-benzoilmetano, furoil-benzoilmetano, [γ-metilisossazoil-α]-benzoilmetano, per dare composti stabili, ben cristallizzati, insolubili in acqua, solubili nei solventi organici caratteristici (cloroformio, benzolo ecc.), di colore variabile dal bruno al bruno nero violaceo con riflessi metallici, a seconda della grossezza dei cristalli. Essi sono da considerarsi come tipici complessi interni chelati la cui costituzione si può così schematizzare:



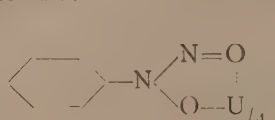
in cui R, per i dichetoni elencati nell'ordine di cui sopra, indica rispettivamente i radicali:



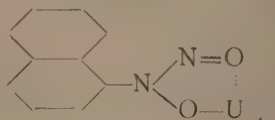
L'uranio^{IV} mostra inoltre una spiccata tendenza a formare un complesso colla nitrosofenilidrossilammina (I) (incompletamente descritto e analizzato in

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica fisica dell'Università di Firenze.
(**) Nella seduta del 12 maggio 1949.
(1) J. H. VAN VLECK, «J. Chem. Phys.», *3*, 803 (1935).
(2) W. S. PENNEY e J. S. ANDERSON, «Trans. Faraday Soc.», *33*, 1363 (1937).
(3) L. E. MARCHI e J. P. Mc REYNOLDS, «J. Am. Chem. Soc.», *65*, 329, 333 (1943).
(4) L. PAULING, «J. Am. Chem. Soc.», *53*, 1367 (1931).
(5) G. E. KIMBALL, «J. Chem. Phys.», *8*, 188 (1940).
(6) W. BILTZ e J. A. CLINCH, «Z. anorg. allgem. Chem.», *40*, 218 (1904).
(7) V. KOHLSCHÜTTER e H. ROSSI, «Ber.», *34*, 1472 (1901).

precedenza)[8], e uno coll'α–nitrosonaftilidrossilammina (II). Anche da soluzioni nettamente acide si ha la precipitazione quantitativa dei composti, che sono assai solubili in cloroformio con colore bruno aranciato, ed a cui si possono assegnare risp. le formule:



I



II

La possibilità di presentare il numero di coordinazione otto appare quindi come un fatto generale per l'uranio tetravalente.

In tutti i complessi preparati l'uranio appare legato ad atomi di ossigeno. Con atomi diversi (ad esempio l'azoto dell'8–ossichinolina) l'uranio non si è dimostrato capace di instaurare legami di coordinazione stabili.

Configurazione elettronica e suscettività magnetica dell'uranio^{IV}. – Fino a poco tempo addietro all'uranio^{IV} veniva assegnata la configurazione elettronica periferica $6s^2\,6p^6\,6d^2$. Questa configurazione sembrava confermata dalle misure magnetiche[9] che fornivano valori del momento magnetico vicini a 2.83, cioè al valore del momento di «solo spin» ($\mu_S = \sqrt{n(n+2)} = \sqrt{2(2+2)}$) per l'accoppiamento normale o di Russell–Saunders, portando così all'ammissione di una quasi completa estinzione del contributo del momento orbitale.

Le più recenti misure su composti dell'uranio^{IV} allo stato solido hanno fornito i sgg. valori: UCl_4: $\mu=2.7$ ($\chi_M \cdot 10^6 = 3910$; t = 22° C.)[10]; $U(SO_4)_2 \cdot 3.26H_2O$: $\mu=3.52$ ($\chi_M \cdot 10^6 = 3851$; t = 21.2°C.); $U(C_2O_4)_2 \cdot 5H_2O$: $\mu=3.75$ ($\chi_M \cdot 10^6 = 3800$; t = 22.6° C.); U–acetilacetonato: $\chi_M \cdot 10^6 = 3264$ (t = 20.7° C.)[11].

Per la vicinanza dei valori di μ (per il solfato e l'ossalato) ai valori teorici del momento calcolato per il libero ione gassoso nello stato LS, di configurazione $^3H_4$ (3.58), e per un accoppiamento *jj* (3.84), è stato concluso che l'uranio^{IV}, nello stato fondamentale, possiede due elettroni $5f$, come considerazioni teoriche[12] e osservazioni spettroscopiche[13] avevano suggerito. Si ricordi a questo proposito che, secondo recenti vedute[14], l'uranio farebbe parte di una serie di «attinidi»

(8) V. Auger, «Compt. rend.», *170*, 995 (1920).

(9) D. M. Bose e H. G. Bhar, «Z. Physik», *48*, 716 (1928); W. Sucksmith, «Phil. Mag.» [7], *14*, 1115 (1932); R. W. Lawrence, «J. Am. Chem. Soc.», *56*, 776 (1934).

(10) H. Bommer, «Z. anorg. allgem. Chem.», *247*, 249 (1941)

(11) C. A. Hutchinson Jr., e N. Elliott, «J. Chem. Phys.», *16*, 920 (1948). I valori di χ_M sono stati calcolati dai segg. valori riportati di $\chi^{-1}_{U^{+4}} = 259{,}7$; 263,2 ; 306,4.

(12) M. Goeppert Mayer, «Phys. Rev.», *60*, 184 (1941); Sugiura e Urey, «Kgl. Danske Vid. Sels. Math–fys. Medd.», *7*, 13 (1926).

(13) Kiess, Humphreys e Laun, «J. Res. Bur. Stands.», *37*, 57 (1946 ; Mc Nally, Harrison e Park, «J. Opt. Soc. Am.», *32*, 334 (1942); De Bruin, Schuurmans e Klinkenberg, «Z. Physik», *121*, 667 (1943); *122*, 23 (1944); Schuurmans, «Physika», *11*, 419 (1946).

(14) G. T. Seaborg, «Chem. and Eng. News», *23*, 2192 (1945); G. T. Seaborg e A. C. Wahl, «J. Am. Chem. Soc.», *70*, 1128 (1948).

in cui avrebbe luogo il riempimento del livello interno $5f$. All'uranio^{IV} spetterebbe in conseguenza la configurazione elettronica $5f^2\,6s^2\,6p^6$.

PARTE SPERIMENTALE.

Preparazione dei complessi. – Per la preparazione di soluzioni di U^{4+} fu impiegato nitrato di uranile De Haen, il cui contenuto in ferro, determinato spettrograficamente, è risultato dell'ordine di 0.002%. Soluzioni cloridriche di U^{4+} furono ottenute per riduzione elettrolitica, fra elettrodi di platino, (6V, 1.2 A, d. d. c. = 0.024 A/cm^2) di soluzioni ottenute sciogliendo uranato di ammonio di fresco preparato in HCl 1 : 1. La soluzione verde ottenuta si conserva inalterata per mesi.

Il benzoilacetone [15], il furoil–benzoilmetano ed il [γ–metilisossazoil–α] – benzoilmetano [16] furono ricristallizzati da alcool etilico, il dibenzoilmetano [17] da metanolo. Il nicotinil–benzoilmetano [18] fu preparato per condensazione da nicotinato di etile ed acetofenone a mezzo di sodio in etere.

I complessi coi β–dichetoni si ottengono mescolando soluzioni alcooliche dei β–dichetoni alle soluzioni cloridriche di U^{4+} (4 moli per 1 mole di sale di uranio). Si neutralizza con ammoniaca alcoolica od acquosa; meglio sotto esclusione di O_2. Nel caso del nicotinil–benzoilmetano si aggiunge dell'acqua alla soluzione per facilitare la cristallizzazione. I precipitati ottenuti, seccati, si sciolgono in cloroformio e dalle soluzioni, di color bruno o bruno–vinato, si precipitano i prodotti cristallini per aggiunta di etere di petrolio.

Una tipica preparazione è la seguente:

Uranio^{IV} – furoil – benzoilmetano. – 25 cm^3 di soluzione cloridrica di U^{4+}, provenienti da g. 2.35 di nitrato di uranile, si mescolano, sotto protezione di N_2, ad una soluzione di gr. 3.6 di furoil–benzoilmetano in 90 cm^3 di alcool. Si neutralizza con ammoniaca alcoolica. Il precipitato bruno–ocra si filtra e si lava con alcool. Dopo essiccamento su acido solforico in vuoto si ricristallizza da cloroformio ed etere di petrolio. Resa g. 2.4.

I complessi con le nitrosoarilidrossilammine si ottengono aggiungendo alle soluzioni cloridriche di U^{4+} i composti organici (4 moli dei sali d'ammonio) in soluzione acquosa al 2% preparata a freddo. Si può tamponare con acetato sodico. I precipitati color nocciola chiaro ottenuti, seccati su H_2SO_4, si sciolgono in cloroformio. L'uranio–nitrosofenilidrossilammina si precipita per aggiunta di etere etilico; l'uranio–α–nitrosonaftilidrossilammina ricristallizza dalla soluzione.

Le caratteristiche dei composti sono riassunte nella tabella I.

Misure magnetiche. – Le misure della suscettività magnetica dei composti furono effettuate mediante la bilancia interferometrica di Bhatnagar [19]. Per ottenere

(15) CLAISEN, «Ann.», *291*, 51 (1896).
(16) C. MUSANTE, «Gazz. chim. ital.», *70*, 685 (1940); C. MUSANTE, pubbl. in stampa.
(17) *Sintèses Organiques*, Masson et C. Paris, 1935, p. 277.
(18) L. F. KUICK, H. ADKINS, «J. Am. Chem. Soc.», *57*, 143 (1935).
(19) S. BHATNAGAR e R. MATHUR, «Phil. Mag.», *8*, 1041 (1929); S. BHATNAGAR, R. MATHUR e NEOGI, «Z. Physik», *69*, 373 (1931).

una perfetta riproducibilità della posizione di zero ed una elevata sensibilità, le tre sospensioni sorreggenti rispettivamente il giogo e la lastrina interferometrica (originariamente in bronzo fosforoso e seta) furono sostituite con fili di quarzo (0.05 e 0.03 mm. di diametro risp.). In questo modo poterono impiegarsi bassi valori di amperaggio (inferiori a 0.7 A) evitando così ogni minima elevazione della temperatura, particolarmente nociva data la sensibilità dell'apparecchio, il quale fu posto in un ambiente termostatizzato entro 1/10 di grado.

TABELLA I.

Composto	Formula	colore; asp. cristallino	P. F.	Analisi (%) (*)	U	C	H	N
U-benzoilacetone . . .	$U(C_{10}H_9O_2)_4$	Crist. rosso-bruni	197–98°	t.	26.93	54.49	4.15	
				c.	26.97	54.42	4.11	
U-dibenzoilmetano . . .	$U(C_{15}H_{11}O_2)_4$	Marrone viol. crist. prism. granata.	185-86°	t.	21.09	63.63	3.88	
				c.	21.05	63.75	3.92	
U-furoil-benzoilmetano .	$U(C_{13}H_{10}O_3)_4$	Bruno-marrone; crist. prism. granata.	206–07°	t.	25.75	57.19	3.28	
				c.	25.73	57.25	3.33	
U-nicotinil-benzoilmetano	$U(C_{14}H_{10}O_2N)_4$	Nero-marrone; crist. granata.	265–66°	t.	21.20			5.18
			(decomp)	c.	20.83			4.94
U-[γ-mètilisossazoil-α]-benzoilmetano	$U(C_{13}H_{10}O_3N)_4$	Nero-marrone; violaceo.	245–46°	t.	20.76			4.87
			(decomp)	c.	20.69			4.87
U-nitrosofenilidrossilammina	$U(C_6H_5O_2N_2)_4$	Ocra.	161°	t.	30.20			14.39
			(decomp)	c.	30.27			14.25
U-α-nitrosonaftilidrossilammina	$U(C_{10}H_7O_2N_2)_4$	Crist. prism. olivastri.	161°	t.	24.29			11.24
			(decomp)	c.	24.24			11.35

(*) t. = trovato; c. = calcolato.

Siccome, con questo strumento, che applica il metodo di Faraday, si valuta la forza agente sulla sostanza misurando il libero spostamento di questa nel campo lungo l'asse bisettore x, le misure furono precedute da uno studio del campo per individuare la zona in cui il valore $H\frac{\partial H}{\partial x}$ è costante, e, di conseguenza, per fissare il valore massimo dello spostamento eseguibile dal tubicino colla sostanza in esame, e quindi il corrispondente amperaggio.

Come sostanza campione furono usate soluzioni di $NiCl_2$, di cui, in funzione della concentrazione e della temperatura, è nota la suscettività magnetica [20].

(20) H. R. NETTLETON e S. SUGDEN, «Proc. Roy. Soc. London», *A 173*, 313 (1939).

Fu impiegato cloruro di nichel esente da cobalto. Il valore di χ_g per i composti considerati è stato ricavato dalla formula:

$$\chi_g = \chi_c \cdot \frac{m_c}{m_s} \cdot \frac{r_s - r_v}{r_c - r_v}$$

dove m_c e m_s indicano risp. il peso della soluzione campione di $NiCl_2$ e quello della sostanza in esame, mentre χ_c indica la suscettività di massa della soluzione campione. Il valore del rapporto $\frac{r_s - r_v}{r_c - r_v}$ (in cui r_v, r_s e r_c indicano il numero delle divisioni della vite dell'interferometro per lo spostamento risp. del tubicino vuoto, col composto in esame e colla soluzione campione) fu misurato in corrispondenza di almeno tre distinti valori dell'amperaggio della corrente azionante l'elettromagnete (in genere 0.3 — 0.45 — 0.6 A). Il valore medio, impiegato nel calcolo, non differì mai più dell' 1 % dai valori estremi. Le suscettività così misurate furono sempre indipendenti dalla forza del campo, mostrando l'assenza di impurezze ferromagnetiche.

Il valore della correzione diamagnetica δ per i complessi coi β-dichetoni fu calcolata per la forma enolica [21].

I risultati delle misure sono riportati nella tabella II.

TABELLA II.

Composto	t° C.	$\chi_g \cdot 10^6$	δ	$\chi_M \cdot 10^6$
U-benzoilacetone	22.1	3.30	365	3275
U-dibenzoilmetano	22.1	2.51	527	3366
U-furoil-benzoilmetano	21.5	2.50	483	3205
U-nicotinil-benzoilmetano . . .	21.7	2.35	509	3194
U-[γ-metilisossazoil-α]-benzoil-metano	21.7	2.50	499	3373
U-nitrosofenilidrossilammina . .	21.8	3.56	280	3080
U-α-nitrosonaftilidrossilammina .	21.8	2.66	426	3051

DISCUSSIONE DEI RISULTATI. — I valori di μ_{eff}, calcolati ammettendo valida la legge di Curie, variano da 2.7 a 2.8 in accordo coll'esistenza di 2 elettroni spaiati. Effettivamente il valore di θ, nella relazione di Curie-Weiss, per i composti dell'uranio^{IV} è risultato generalmente notevole [10, 11].

I valori di χ_M da me trovati risultano notevolmente inferiori a quelli determinati per l'ione U^{4+} e dello stesso ordine di grandezza del valore di χ_M per

(21) P. W. SELWOOD, *Magnetochemistry*, Interscience, N. Y., 1943, p. 51; W. KLEMM, *Magnetochemie*, Ak., Verlag. Lipsia, 1936, p. 160 sgg.

l'acetilacetonato di uranio^{IV} [11]. Un tale abbassamento della suscettività viene in genere attribuito all'istaurazione di forti legami con accoppiamento elettronico, la cui interazione è capace di annullare o di attenuare il contributo del momento orbitale [22]. Da altre parti è stato concluso [23] che l'abbassamento della suscettività di uno ione paramagnetico, in seguito alla formazione di un legame chimico, è proporzionale alla stabilità del legame stesso.

Appare lecito quindi ammettere che, nei complessi descritti, fra l'uranio centrale e gli atomi di ossigeno dei gruppi coordinati si esplichino dei legami a cui si deve attribuire un carattere essenzialmente covalente. Da notare che il massimo abbassamento del valore di χ_M si verifica nei complessi colle nitrosoarilidrossilammine in cui i legami di coordinazione debbono essere particolarmente forti, giacchè questi complessi sono stabili anche verso gli acidi minerali piuttosto concentrati. Si può ammettere in questi complessi una notevole «penetrazione» dei gruppi coordinati rispetto all'atomo centrale, facilitata dal maggior sviluppo in senso radiale dei gruppi stessi rispetto alla configurazione dei radicali dei dichetoni, assai sviluppati in senso trasversale, con maggior possibilità di impedimenti sterici.

In definitiva, l'uranio^{IV} si può includere nella serie già considerata [2] degli otto elementi manifestanti la covalenza otto.

Ammettendo per l'uranio^{IV} la configurazione $6s^2\,6p^6\,6d^2$, le configurazioni $6d^5\,7p^3$ e $6d^5\,7s\,7p^2$, con otto legami covalenti, dovrebbero essere escluse per i complessi, giacchè esse richiedono che le cinque orbite $6d$ siano disponibili per l'istaurazione dei cinque legami covalenti cogli atomi dei gruppi coordinati.

Otto legami covalenti $6d^4\,7s\,7p^3$ sarebbero invece possibili, a patto che i due elettroni $6d$ dell'uranio^{IV} (occupanti due distinte orbite per il criterio della massima molteplicità) si appaiassero. Ma in tal caso, non esistendo più elettroni spaiati nel complesso, questo dovrebbe risultare diamagnetico, contrariamente all'esperienza. È quanto si verifica negli ioni complessi $[Mo(CN)_8]^{4-}$ e $[W(CN)_8]^{4-}$, diamagnetici [24], che non manifestano più il paramagnetismo di Mo^{4+} e W^{4+} dovuto all'esistenza di due elettroni non appaiati $4d$ e $5d$.

Se poi ai legami dei complessi si assegnasse un carattere solo parzialmente covalente, allora dovrebbe ammettersi una risonanza fra la configurazione $6d^5\,7s\,7p^3$ (nove orbite completamente occupate da nove coppie di elettroni) nei complessi, e la configurazione $6d^2$ (due elettroni spaiati) dello ione U^{4+}. Ma la condizione essenziale per il passaggio da un estremo tipo di legame ad un altro, e quindi per l'esistenza di una risonanza fra le due strutture, è che in esse compaia lo stesso numero di elettroni non appaiati [25] giacchè la risonanza non è compatibile

(22) L. Pauling, «J. Am. Chem. Soc.», *53*, 1391 (1931); W. Klemm, loc. cit., pp. 129-30, 152; Van Vleck, *The Theory of Electric and Magnetic Susceptibilities*, Clarendon P. Oxford 1932, pp. 283-301.

(23) Schaffer e Taylor, «J. Am. Chem. Soc.», *48*, 843 (1926); Pascal, «Ann. Chim. phys.» [8], *16*, 571 (1909).

(24) W. Biltz, «Z. anorg. allgem. Chem.», *170*, 161 (1928); D. M. Bose, «Phil. Mag.», *5*, 1048 (1928); «Z. Physik», *65*, 677 (1930).

(25) L. Pauling, «J. Am. Chem. Soc.», *54*, 898 (1932).

colla discontinuità, che in questo caso sarebbe associata all'accoppiarsi dei due elettroni $6d$ (per far posto ai 16 elettroni dei gruppi coordinati) ed al loro successivo disaccoppiarsi.

Si deve in definitiva concludere che l'esistenza di due elettroni $6d$ nell'uranio^{IV} non permetterebbe l'esistenza di complessi paramagnetici con legami essenzialmente covalenti.

Se invece si ammette che i due elettroni non appaiati dell'uranio^{IV} sono due elettroni $5f$, allora, risultando libere le nove orbite $6d^5\,7s\,7p^3$, appare possibile l'istaurazione di otto legami covalenti, con una qualsiasi delle configurazioni considerate: $6d^5\,7p^3$, $6d^5\,7s\,7p^2$, $6d^4\,7s\,7p^3$.

Per quest'ultima configurazione non sarebbe naturalmente necessario un appaiamento elettronico con conseguente scomparsa del paramagnetismo dell'uranio^{IV} e sarebbe pure possibile una risonanza fra quest'ultima configurazione e quella ionica di U^{4+}, giacchè in entrambe sarebbe costante il numero degli elettroni non accoppiati ($5f^2$).

CONCLUSIONE. – Solo l'ammissione della presenza di due elettroni $5f$ nell'uranio^{IV} si concilia coll'esistenza, nei complessi interni descritti, di legami essenzialmente covalenti, come le misure magnetiche suggeriscono.

Queste misure, quindi, appaiono corroborare la tesi dell'esistenza di due elettroni $5f$ nell'uranio^{IV}.

Biologia. — *Ricerche sull'istogenesi dei muscoli in condizioni sperimentalmente modificate* (*). Nota di RODOLFO AMPRINO, presentata (**) dal Socio G. LEVI.

Le nostre conoscenze sullo sviluppo della muscolatura striata si fondano prevalentemente su quanto è stato visto nei miotomi, e specialmente nei miotomi di Anamni. Dopo le osservazioni ormai antiche di Rabl, Godlewski, Mlodowoska, Meves, Duesberg, sappiamo che in tutti i vertebrati le singole fibre muscolari derivano da accrescimento in lunghezza di un unico mioblasta, accompagnato da divisione dei nuclei per mitosi (almeno durante un primo periodo); più tardi il mioblasta affusato diviene un nastro protoplasmatico plurinucleato nel quale si differenziano le miofibrille, la fibra muscolare.

È stato detto, ed ancor oggi sostenuto, che l'ulteriore accrescimento numerico degli elementi muscolari si produce per scissione longitudinale di mioblasti già differenziati; però ciò fu contestato in particolar modo da Meves: nei miotomi di embrioni di pollo, i nuovi mioblasti si formano a spese di cellule indifferenziate, le quali circondano a mo' di guaina gli elementi i quali hanno già evidenti caratteri muscolari.

(*) Ricerca eseguita nell'Istituto Anatomico di Torino.
(**) Nella seduta del 12 maggio 1949.

Ad un periodo determinato dell'accrescimento somatico, il quale varia sensibilmente nelle singole specie, cessa la differenziazione di nuovi elementi muscolari ed i muscoli crescono esclusivamente per aumento di volume delle fibre già differenziate. Nel sartorio dell'uomo, ad esempio, il numero delle fibre muscolari sarebbe fissato alla fine del 5° mese di vita fetale (Mac Callum), nel muscolo radiale del ratto alla nascita (Morpurgo).

L'incremento molto considerevole nella massa dei muscoli, che si produce dopochè è cessato l'aumento numerico delle fibre muscolari, dipende esclusivamente, adunque, da incremento nel volume delle singole fibre. Quest'ipertrofia fisiologica delle fibre muscolari è di entità diversa nei vari animali, in relazione alla mole corporea ed alla durata del periodo di accrescimento somatico. Però in uno stesso individuo l'entità dell'ipertrofia delle fibre muscolari differisce molto nei vari muscoli ed anche fra le varie fibre di uno stesso muscolo (Schwalbe e Mayeda; Marianna Levi).

Invece nei muscoli i quali, a differenza della muscolatura segmentale del tronco derivata dai miotomi, si costituiscono a spese di blastemi (muscoli della testa, toraco-appendicolari, degli arti), l'analisi dei processi istogenetici e di accrescimento, per evidenti ragioni sulle quali non insisterò, è molto più difficile. Anche per questi muscoli, si ammette che durante il periodo nel quale si produce un accrescimento numerico secondario degli elementi muscolari, questo avvenga a spese di elementi indifferenti del mesenchina circostante, nel quale l'abbozzo muscolare è situato, oppure per scissione longitudinale degli elementi muscolari preesistenti. È evidente che sopratutto per questi muscoli è difficile fornire la prova sicura della modalità di neoformazione tardiva di fibre muscolari.

In occasione di ricerche sperimentali da me intraprese sulle ripercussioni che l'assenza o lo sviluppo deficiente del bulbo oculare esercita sull'organogenesi e sull'accrescimento dei muscoli estrinseci dell'occhio [1], ho potuto porre in luce qualche fatto che dimostra in modo molto palese, per quanto indirettamente, che l'aumento numerico delle fibre muscolari durante periodi tardivi di sviluppo si produce per assimilazione di elementi indifferenziati circostanti all'abbozzo del muscolo.

Gli esperimenti consistevano nella demolizione totale o parziale della vescicola ottica primaria o secondaria di un solo lato (destro) in embrioni di pollo compresi fra la 34ª e la 50ª ora d'incubazione (stadio 12-28 somiti). In conseguenza dell'operazione, mentre l'occhio di un lato va incontro a normale sviluppo, l'occhio leso si accresce in forma rudimentale o manca del tutto.

Anche in assenza dell'occhio, i normali costituenti dell'orbita (muscoli, vasi, nervi, ghiandola lacrimale e di Harder, condotto naso-lacrimale, palpebre) si sviluppano e raggiungono un grado notevole di morfogenesi e differenziazione (Amprino, 1949). Però lo sviluppo di questi organi risulta quantitativamente ridotto rispetto alla norma. In particolare, i muscoli estrinseci del bulbo oculare vanno incontro a una differenziazione completamente normale ma presentano forma, disposizione e grandezza diversa rispetto ai moscoli controlaterali connessi

(1) In corso di pubblicazione.

con il bulbo oculare, il cui sviluppo non fu turbato. Tali mutamenti sono tanto più spiccati, quanto più ridotto in via relativa è l'accrescimento del bulbo oculare rudimentale e ancor più se, in conseguenza dell'operazione, l'occhio non si sviluppa. Il volume dei singoli muscoli in queste condizioni può essere ridotto a 1/4, 1/5 di quello degli omonimi normali.

Le differenze di grandezza fra i muscoli omonimi dei due lati dipendono esclusivamente da differenze di numero e forse da lievi differenze di lunghezza delle fibre; invece il grado di differenziazione e l'ampiezza della superficie di sezione delle fibre muscolari è uguale nei muscoli ridotti e in quelli connessi con un bulbo normale. Questi fatti si apprezzano in modo particolarmente chiaro a partire dal 15° giorno, da quando cioè i muscoli hanno assunto un assetto molto simile a quello definitivo.

Risulta dalla mia ricerca che i muscoli ridotti sono formati da un numero minore di fibre muscolari, perchè in queste condizioni i blastemi muscolari, i quali subiscono spostamenti attivi e passivi in seno al mesenchima dell'orbita, di grado minore che di norma, assimilano un numero molto minore di cellule indifferenti, capaci di differenziarsi in fibre muscolari.

Infatti, durante la prima parte dell'organogenesi muscolare (all'incirca fino al 7° giorno), non si apprezzano differenze rilevanti fra gli abbozzi muscolari dal lato dell'occhio ridotto in confronto al lato normale: la grandezza dei singoli abbozzi muscolari, la loro intima struttura, la percentuale di nuclei in divisione, sono uguali nei muscoli omonimi di destra e di sinistra. Le differenze fra i muscoli dei due lati si manifestano a partire dal 7° giorno, cioè dal momento in cui i blastemi giungono a contatto con la superficie del bulbo oculare, sulla quale si modellano e scivolano estendendosi in lamine appiattite.

Questo processo si attua per scivolamento di mioblasti preesistenti nel primitivo blastema, i quali migrano in parte distalmente sulla superficie del bulbo, ma sopratutto perchè cellule del mesenchima peribulbare entrano a far parte integrante della porzione distale del muscolo, differenziandosi progressivamente in mioblasti ed in fibre.

È da tempo noto, non solo che i muscoli prossimali (degli arti) si organizzano e si differenziano più precocemente dei muscoli distali, ma che in ogni muscolo lungo, la porzione prossimale precede nella differenziazione la parte distale; cioè, quando la parte del muscolo prossima alla regione prossimale d'inserzione è già costituita da fibre assai differenziate, la parte vicina alla futura inserzione distale è in condizione d'indifferenza molto maggiore. Braus ha sostenuto che, in relazione a questo processo di allungamento del muscolo, si manifesta un'apparente migrazione della zona di penetrazione del nervo in seno al muscolo: l'ilo si sposta in via relativa tanto più prossimalmente, quanto maggiore è l'accrescimento in lunghezza del muscolo.

Per quanto ho visto, i muscoli estrinseci dell'occhio si comportano in modo analogo ai muscoli lunghi degli arti; l'allungamento di questi muscoli sarebbe determinato dall'allungamento progressivo delle sue fibre, dallo scivolamento in direzione prossimo-distale di mioblasti e da assimilazione di cellule indifferent reclutate dal mesenchima, in seno al quale si costituisce la porzione distale del

muscolo ed il suo tendine distale. E poichè questi muscoli, man mano si allungano, si appiattiscono a forma di lamina o di ventaglio, riesce agevole riconoscere nelle sezioni condotte secondo l'asse longitudinale del muscolo nei vari momenti della sua organogenesi, quante sono le cellule assimilate dal mesenchima circostante al bulbo.

In condizioni di sviluppo normale, la struttura dei muscoli oculari è uniforme per tutta la loro lunghezza, finchè non si stabilisce un rapporto di contiguità fra l'estremità distale dei muscoli ed il mesenchima addensato attorno al calice ottico e destinato a trasformarsi in sclerotica; soltanto a partire dal 7° giorno si distingue dal restante muscolo una porzione distale molto assottigliata in cui sono scarsissimi i mioblasti, mentre prevalgono le cellule indifferenti fusate, disposte col maggior asse secondo l'asse longitudinale del muscolo.

Fino al 13°–14° giorno continua l'allungamento progressivo dei muscoli per assimilazione di nuovi elementi; cioè si accresce sopratutto quella porzione della lamina che è in più stretto rapporto con la sclera, sulla quale si modella. Questo accrescimento in senso prossimo–distale è indirettamente dimostrato anche dallo spostamento in senso prossimale del punto di penetrazione del nervo del muscolo, come ho potuto controllare nei miei preparati.

Invece, nei muscoli connessi con un piccolo bulbo rudimentale, oppure nei casi nei quali il bulbo oculare non si sviluppa, non si apprezzano differenze di struttura fra le varie porzioni dello stesso muscolo. In queste condizioni viene a mancare (o è assai ridotta) l'assimilazione di cellule del mesenchima, grazie alla quale si costituisce in condizioni normali la porzione distale dei muscoli; pertanto i muscoli risultano assai più corti e tozzi dei muscoli omonimi normali; e nelle fasi successive dello sviluppo non si manifesta (oppure è di grado molto lieve) lo spostamento relativo dell'ilo muscolare, in senso prossimale.

Dal paragone fra il numero dei nuclei in mitosi negli abbozzi muscolari connessi con un occhio ridotto e con un bulbo normalmente sviluppato, non risultano differenze significative fra i due lati durante tutta la vita embrionale. In un certo numero di casi ho riscontrato, invero, una percentuale di mitosi lievemente maggiore nei muscoli connessi con l'occhio normale; ma questa differenza (da 0,2 % a 0,6 %) è di lieve grado e non può essere presa in considerazione perchè rientra nel limite d'errore del metodo impiegato nel conteggio. Questa circostanza ed il fatto che la parte distale muta progressivamente di struttura nei muscoli connessi con l'occhio normale, mentre una parte di muscolo dotata di struttura analoga a questa, non si forma nei muscoli connessi con un bulbo rudimentale, permette di concludere che lo scarso accrescimento dei muscoli ridotti a partire dal 7° giorno, dipende da scarsa assimilazione di cellule del mesenchima all'estremità distale del muscolo.

Se infatti l'incremento numerico delle fibre muscolari avvenisse per altro meccanismo, cioè per moltiplicazione tardiva di mioblasti preesistenti nel primitivo blastema muscolare, i quali conservano la capacità di dividersi e di spostarsi alla periferia, il coefficiente mitotico dovrebbe essere diverso nei muscoli omonimi dei due lati.

D'altra parte le mie osservazioni permettono di escludere che l'incremento tardivo di fibre muscolari dipenda da divisione longitudinale di elementi muscolari

preesistenti. Infatti ho ricordato che la struttura di quella parte di muscolo, la quale certamente deriva dal primitivo blastema, è per tutto il periodo embrionale identica nei muscoli omonimi ridotti e normali dei due lati; lo spessore delle fibre muscolari in via di differenziazione e già differenziate, è uguale dai due lati, nè si rinvengono nei muscoli connessi con l'occhio normale fibre esili in numero maggiore che nei muscoli connessi con un bulbo rudimentale. I muscoli dei due lati differiscono sostanzialmente – lo ripeto – soltanto per l'estensione della loro porzione distale a differenziazione tardiva; questa parte è estremamente ridotta (o manca) nei muscoli connessi con un bulbo oculare rudimentale.

Quale meccanismo favorisce (e rispettivamente inibisce) l'assimilazione di cellule indifferenti del connettivo embrionale da parte dei muscoli connessi con un bulbo ad accrescimento normale (o connessi con un bulbo ridotto)?

Ritengo che l'accrescimento espansivo del bulbo rappresenti un fattore favorevole all'incremento in grandezza dei muscoli, perchè dal momento in cui i muscoli prendono contatto con la superficie della sclera e vi si espandono a nastro o a ventaglio, vengono in rapporto per un'estesa superficie con il mesenchima peribulbare, le cui cellule a poco a poco si dispongono secondo l'asse longitudinale del muscolo ed entrano a far parte integrante del muscolo. Quanto più ridotto in via relativa è l'accrescimento del bulbo, tanto meno estesa risulta la superficie di contatto fra il muscolo – il quale non si espande a ventaglio – e il connettivo embrionale circostante; correlativamente il numero di cellule indifferenti che in un dato periodo di tempo entrano a far parte del muscolo, è stato minore. Ho rilevato infatti l'esistenza di una relazione diretta fra ampiezza della superficie del bulbo e grandezza dei muscoli; questa relazione, d'altra parte, si manifesta soltanto dal momento in cui i blastemi muscolari raggiungono con la loro estremità distale in accrescimento la superficie del bulbo. Per analoga ragione, anche i tendini distali dei muscoli ridotti sono più corti e più piccoli di quelli dei muscoli connessi con un bulbo oculare che si è accresciuto normalmente.

Biologia. — *Comunanza di origine fra il blastema della corteccia surrenale e il tessuto midollare della gonade nell'embrione di cavia* (*). Nota di ENRICO VANNINI e TINA CESSI, presentata (**) dal Corrisp. U. D'ANCONA.

In una Nota recente (1) il primo di noi ha riassunto, coordinandole fra loro, sue precedenti osservazioni (2) dirette a dimostrare che, negli Anfibi e negli Uccelli, il tessuto midollare dell'abbozzo della gonade (corrispondente ai così detti « cordoni sessuali primari » o « cordoni midollari ») prende origine dal blastema interrenale. Ha anche fatto rilevare come queste constatazioni embriogenetiche, discordanti dalle opinioni generali, ma confermate recentemente da Papi (1947) nel tritone, concordino pienamente con un vecchio reperto occasionale di Loisel (1904) sull'embrione degli Uccelli.

Nella Nota presente riferiamo, in via preliminare, ulteriori osservazioni, che dimostrano come pure nei Mammiferi sia chiaramente riconoscibile una comunanza di origine fra il blastema interrenale (o blastema della corteccia surrenale) e il tessuto midollare della gonade. Le modalità di tali rapporti embriogenetici, sensibilmente diverse da quelle riscontrate negli Anfibi e negli Uccelli, corrispondono molto bene a reperti di ricercatori precedenti, che, lavorando soprattutto su Rettili e Mammiferi, hanno descritto (in maniera assai incompleta) l'esistenza di una diretta continuità fra gli abbozzi delle gonadi ed i blastemi del tessuto interrenale.

Ricordiamo, fra gli altri, Janošik (3) che, in embrioni di Uccelli e di Mammiferi, ha rilevato precoci connessioni fra l'abbozzo della gonade e il blastema interrenale, ed ha ammesso una loro derivazione comune dall'epitelio germinale, prospettando che tali rapporti embriogenetici possan spiegare le correlazioni funzionali esistenti nell'adulto fra le gonadi e la corteccia dei surreni. Anche Mihalkovics (4), in embrioni di Rettili e Mammiferi, ha osservato strettissime relazioni

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia e Anatomia comparata dell'Università di Padova, con un sussidio del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 12 maggio 1949.

(1) E. VANNINI, *A proposito dell'origine interrenale del tessuto midollare della gonade negli Anfibi e negli Uccelli*. « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. 8, vol. 6 (1949).

(2) E. VANNINI, *Sull'origine interrenale dei cordoni della rete e dei corpi grassi durante lo sviluppo delle gonadi e sulla partecipazione dell'interrenale ai processi di intersessualità giovanile nella « Rana agilis »*. « Atti Acc. d'Italia », vol. 13, p. 731 (1942); *Sull'origine interrenale del tessuto midollare della gonade nell'embrione di pollo*. « Atti Acc. d'Italia », vol. 14, p. 493 (1943).

(3) J. JANOŠIK, *Bemerkungen über die Entwickelung der Nebennieren*. « Arch. mikr. Anat. », Bd. 22, p. 738 (1883); *Die Entwickelung des Genitalsystems*. « Sitz. kaiserl. Akad. Wissensch. », Bd. 99, p. 260 (1890); *Corrélations fonctionnelles entre les capsules surrénales et les glandes génitales*. « Arch. Biol. », vol. 28, p. 627 (1913).

(4) G. von MIHALKOVICS, *Untersuchungen über die Entwicklung des Harns- und Geschlechtsapparates der Amnioten*. « Internat. Monatschr. Anat. Physiol. », Bd. 2, p. 41 (1885).

di origine embriologica fra il blastema interrenale e l'abbozzo delle gonadi, ed è giunto alla conclusione che il blastema interrenale rappresenta una parte indifferenziata del primitivo abbozzo della gonade, separantesi precocemente da quest'ultimo, in modo tale da assumere così una funzione fisiologica distinta. Pure Valenti (1889) negli Uccelli e nei Mammiferi ed Inaba (1891) nei Mammiferi hanno notato l'impossibilità di stabilire, in precoci stadi di sviluppo, una netta linea di demarcazione fra gli abbozzi dell'interrenale e della gonade.

Allen [5], in embrioni di Rettili e Mammiferi, ha rilevato che tanto il tessuto interrenale, quanto il tessuto midollare della gonade, prendono origine da una stessa proliferazione primitiva della parete peritoneale. Celestino da Costa [6] ha ripetutamente insistito sul fatto che in giovani embrioni di Mammiferi il blastema interrenale, proveniente dall'epitelio del celoma, occupa una sede così vicina all'abbozzo della gonade, da costituire con essa un unico substrato, senza che sia possibile delimitare chiaramente i confini rispettivi. Più di recente Forbes [7], in embrioni di alligatore, ha dimostrato dettagliatamente come il blastema interrenale prenda origine da una proliferazione peritoneale, medialmente connessa con il tessuto midollare del primitivo abbozzo della gonade, e come solo più tardi, distaccandosi dalla sua matrice, si distanzii dall'abbozzo genitale. Anche Nelsen [8], nell'embrione di opossum, ha visto una diretta continuità fra la massa interna dell'abbozzo della gonade ed i cordoni generatori della corteccia surrenale.

Ai fini della presente Nota, soprattutto interessanti sono però le osservazioni di Goormaghtigh [9], che nell'embrione della stessa specie da noi esaminata (cavia), ed in parte anche in altri Mammiferi, ha dimostrato la derivazione sia degli abbozzi del tessuto midollare della gonade, che di quelli della corteccia surrenale, da una medesima listerella longitudinale paramesenterica della parete peritoneale; tale listerella mesoteliale genererebbe tessuto interrenale cefalicamente rispetto al livello dell'arteria mesenterica superiore, e tessuto midollare della gonade caudalmente rispetto a questo stesso tronco vascolare. I lavori di Goormaghtigh e di Forbes son forse quelli nei quali viene sostenuta più decisamente una comunanza di origine fra i tessuti della gonade e dell'interrenale.

Le presenti ricerche sono state effettuate su una serie di embrioni di cavia, delle età di 19 giorni, 20 giorni, 20 giorni e mezzo, 21 giorni, 22 giorni, 23 giorni

(5) B. M. ALLEN, *The embryonic development of the ovary and testis of the Mammals.* « Amer. Journ. Anat. », vol. 3, p. 89 (1904); *The embryonic development of the rete-cords and sex-cords of Chrysemys.* « Amer. Journ. Anat. », vol. 5, p. 79 (1905).

(6) A. CELESTINO DA COSTA, *Note sur le développement de la surrénale du hérisson.* « C. R. Soc. Biol. », vol. 83, p. 878 (1920); *Sur le développement du tissu paraganglionnaire chez le hérisson et sur d'autres types évolutifs de ce tissu.* « C. R. Assoc. Anat. », XXI réun. Liège, p. 156 (1926); *Eléments d'embryologie.* Masson, Paris (1938).

(7) T. R. FORBES, *Studies on the reproductive system of the alligator. IV. Observations on the development of the gonad, the adrenal cortex, and the Müllerian duct.* « Carnegie Inst. Wash. Publ. 518 », Contrib. Embryol. 174, p. 129 (1940).

(8) O. E. NELSEN, *The formation of early genital rudiment and differentiation of sex in the opossum.* « Journ. Morphol. », vol. 75, p. 303 (1944).

(9) N. GOORMAGHTIGH, *Organogenèse et histogenèse de la capsule surrénale et du plexus coeliaque.* « Arch. Biol. », vol. 31, p. 83 (1921).

e 24 giorni (calcolati dall'epoca del coito fecondante), che corrispondono al periodo della formazione del primitivo abbozzo delle gonadi, fino alle soglie del differenziamento sessuale. Tutte le fette trasversali, eseguite in serie nella regione del tronco degli embrioni, sono state accuratamente esaminate, e ne sono state ricavate numerose ricostruzioni grafiche, che solo in parte vengono attualmente riprodotte.

Negli embrioni di 19 giorni (lunghezza mm. 6–7), gli abbozzi delle gonadi sono rappresentati esclusivamente dall'epitelio germinale, al di sotto del quale manca completamente il tessuto midollare. L'epitelio germinale è situato ai due lati della radice mesenterica, per un tratto longitudinale che cefalicamente inizia poco al dinanzi dell'arteria mesenterica superiore e caudalmente raggiunge quasi il livello della forte curvatura ventrale della regione sacro–coccigea; esso consta di

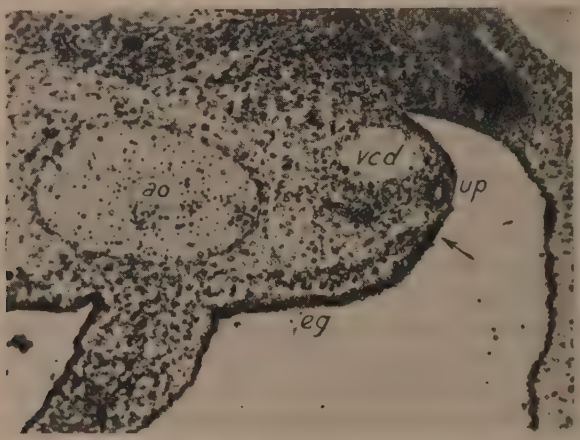


Fig. 1. – Sezione trasversale al livello del primitivo abbozzo delle gonadi, in un embrione di cavia di 20 giorni.

ao = aorta; *vcd* = vena cardinale posteriore; *up* = uretere primario; *eg* = epitelio germinale. La freccia indica il punto del peritoneo, al confine fra le regioni renale e genitale, da cui prolifera un cordone cellulare, diretto medialmente verso la radice mesenterica al di sotto dell'epitelio germinale; tale cordone è il primo abbozzo del tessuto midollare della gonade. – Ingrandimento 130 ×.

un lieve ispessimento del peritoneo, includente i gonociti primordiali. Lateralmente agli abbozzi delle gonadi, e ventralmente alle vene cardinali posteriori, sono presenti, sotto il rivestimento peritoneale, i tubuli del mesonefro e l'uretere primario. A nessun livello dell'embrione è iniziata la formazione del blastema interrenale.

Negli embrioni di 20 giorni (mm. 8), i mesonefri e l'epitelio germinale non han sensibilmente modificato il proprio aspetto, in confronto allo stadio precedente. Al di sotto dell'epitelio germinale è iniziato però lo sviluppo del tessuto midollare della gonade, in forma di cordoni cellulari di aspetto epitelio–mesenchimale, che si vedono proliferare dal peritoneo al limite laterale dell'epitelio germinale. Tali cordoni si dirigono medialmente verso la radice del mesenterio, con un decorso parallelo alla superficie profonda dell'epitelio germinale, dal quale appaiono separati mediante una sottile fessura occupata da mesenchima (fig. 1).

Al livello dell'estremità cefalica dell'abbozzo delle gonadi, ove l'estensione trasversale dell'epitelio germinale è molto scarsa, questi cordoni cellulari appaiono molto corti e biforcati, con un ramo ventrale parallelo all'epitelio germinale, che rappresenta il tessuto midollare della gonade, ed uno obliquo dorsale, che corrisponde al blastema interrenale. Cranialmente alle gonadi, persistono soltanto i cordoni interrenali, a direzione obliqua ventro-dorsale e latero-mediale; essi proliferano da quel medesimo punto del peritoneo, mediale alla regione mesonefrica, da cui (al livello genitale) prende origine il tessuto midollare delle gonadi.

Negli embrioni di 20 giorni e mezzo (mm. 8–9) e più ancora in quelli di 21 giorni (mm. 9–10), i blastemi interrenali si sono alquanto accresciuti di volume, conservandosi tuttora latero-ventralmente in connessione con il peritoneo. Il tessuto

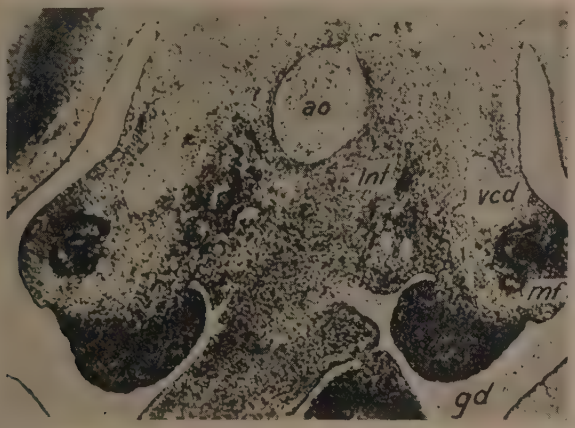


Fig. 2. - Sezione trasversale al livello dell'abbozzo delle gonadi, in un embrione di cavia di 22 giorni.

ao = aorta; *vcd* = vena cardinale posteriore; *mf* = mesonefro; *gd* = abbozzo della gonade; *int* = blastema interrenale. Sono evidenti le connessioni fra il tessuto midollare delle gonadi ed i blastemi del tessuto interrenale, che si prolungano dall'angolo mediale delle gonadi verso le facce latero-ventrali dell'aorta. Ingrandimento 75 ×.

midollare delle gonadi è aumentato anch'esso di quantità, continuando tuttora a proliferare dall'indicato punto del peritoneo e addossandosi strettamente alla faccia profonda dell'epitelio germinale. Dall'esame istologico si ricava l'impressione che qualche cellula somatica dell'epitelio germinale migri ora in profondità, partecipando alla genesi del tessuto midollare. Qualche raro gonocita, abbandonando l'epitelio germinale, è passato nello spessore del tessuto midollare. In conseguenza dell'accresciuto volume, gli abbozzi delle gonadi han cominciato a sporgere entro la cavità peritoneale.

Negli embrioni di 22 giorni (mm. 12) la porzione più cefalica, pregenitale, dei blastemi interrenali si è ormai distaccata dalla sua matrice peritoneale, spostandosi medio-dorsalmente in direzione delle pareti latero-ventrali dell'aorta. Più caudalmente però, lungo tutta la regione genitale, un nuovo ed abbondante tessuto interrenale ha cominciato a originarsi dalla parte più profonda e più mediale del

tessuto midollare delle gonadi, che si prolunga infatti in voluminosi ammassi cellulari a direzione obliqua dorso-mediale (fig. 2). Cefalicamente, questi nuovi tratti dei blastemi interrenali, provenienti dal tessuto midollare delle gonadi, si pongono in diretta continuità con le descritte porzioni più vecchie della futura corteccia surrenale, già liberatesi dal peritoneo.

Negli embrioni di 23 giorni (mm. 12–13), solamente il tratto più caudale dei blastemi interrenali appare ancora connesso con la porzione mediale del tessuto midollare delle gonadi. Più cefalicamente, i blastemi interrenali si sono distaccati dall'abbozzo genitale, ed han raggiunto la loro sede definitiva, mediale alle vene cardinali posteriori e laterale all'aorta. Tale sede corrisponde esattamente a quella occupata dal tratto più cefalico, pregenitale, dei blastemi interrenali, originatosi direttamente dal peritoneo.

Negli embrioni di 24 giorni (mm. 13–13,5), tutto il complesso dei blastemi interrenali appare ormai distaccato dall'abbozzo delle gonadi e, specialmente nei livelli più cefalici, ha cominciato a divenire più evidente il caratteristico ordinamento cordonale delle future cellule cortico-surrenali.

I mesonefri, che nella serie di sviluppo esaminata si sono progressivamente accresciuti e differenziati, non partecipano neppure parzialmente ai processi organogenetici descritti. Non abbiamo parlato del comportamento dei futuri elementi cromaffini, perchè neppure questi interessano il problema embriogenetico attuale; è già noto che nella cavia essi cominciano a penetrare attivamente nei blastemi interrenali in stadi di sviluppo successivi a quelli qui considerati.

Riassumendo, possiamo dire che negli embrioni di cavia di 20–21 giorni, da ciascun lato, si svolge una proliferazione cellulare proveniente da una listerella longitudinale del mesotelio peritoneale, situata lateralmente rispetto all'epitelio germinale, ma prolungantesi più cefalicamente di quest'ultimo. Nei livelli corrispondenti all'epitelio germinale, tali cellule dànno origine al tessuto midollare della gonade; più anteriormente, e in parte ancora nei livelli più cefalici dell'abbozzo genitale, formano invece tessuto interrenale (fig. 3, *A*). Negli embrioni di 22 giorni, quando il suddetto tessuto interrenale si è distaccato dal peritoneo, un nuovo tratto più caudale di blastema interrenale, in diretta continuità col precedente, prende origine da un'espansione dorso-mediale del tessuto midollare della gonade, ed appare perciò connesso con quest'ultimo lungo tutto il proprio margine laterale, costeggiante l'abbozzo genitale (fig. 3, *B*). Negli embrioni di 23 giorni, e in maniera più completa in quelli di 24 giorni, anche il tratto caudale del blastema interrenale si distacca dalla sua matrice, distanziandosi così dall'abbozzo della gonade, come si era verificato precedentemente per il tratto cefalico nei riguardi del mesotelio peritoneale (fig. 3, *C*, *D*).

È evidente perciò l'esistenza di strettissimi rapporti di origine embriologica fra il tessuto midollare della gonade e i blastemi della corteccia surrenale. Tali rapporti sono però alquanto diversi da quelli rilevabili nei girini degli Anfibi e negli embrioni degli Uccelli [2], perchè in questi ultimi i blastemi interrenali, originatisi dal mesotelio peritoneale lateralmente all'epitelio germinale, prima si staccano dal peritoneo e solamente più tardi migrano in parte al di sotto dell'epitelio germinale, generando così il tessuto midollare della gonade; naturalmente, tale

processo si svolge solo nei livelli genitali, e non nel tratto pregenitale dei blastemi interrenali, che non partecipa alla formazione del tessuto midollare. Come si è visto, nell'embrione di cavia il tessuto midollare della gonade comincia invece a svilupparsi più precocemente, da quel medesimo tipo di proliferazione peritoneale, che cefalicamente all'epitelio germinale costituisce il tratto pregenitale dei blastemi interrenali; il rimanente tratto genitale dei blastemi interrenali deriva poi da una espansione del tessuto midollare della gonade.

Se negli Anfibi e negli Uccelli è lecito parlare di un'origine interrenale del tessuto midollare della gonade, negli embrioni di cavia si nota, inversamente, la derivazione di un lungo tratto dei blastemi interrenali da questo stesso tessuto

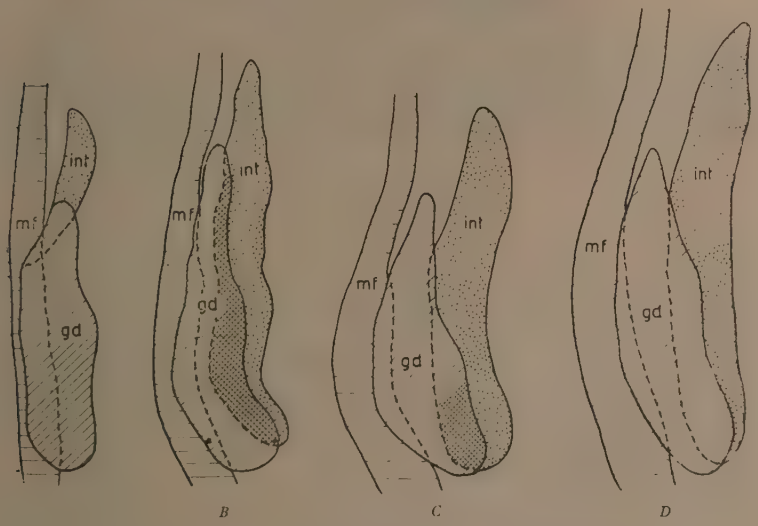


Fig. 3. - Ricostruzioni, in proiezione frontale ed in visione ventrale, della regione enitale destra in embrioni di cavia di differenti età.

A: 20 giorni e mezzo; *B*: 22 giorni; *C*: 23 giorni; *D*: 24 giorni. *mf* = mesonefro; *int* = blastema interrenale; *gd* = abbozzo della gonade. Nelle parti finemente reticolate, il blastema interrenale è connesso con il tessuto midollare della gonade. Ingrandimento 40 ×.

midollare. La differenza è essenzialmente di natura cronologica, ed è basata sul più precoce sviluppo degli abbozzi delle gonadi, rispetto all'epoca di formazione dei blastemi interrenali, nella cavia in confronto agli Anfibi ed agli Uccelli. In tutti i casi esiste tuttavia una comunanza di origine embriologica fra blastemi interrenali e tessuto midollare delle gonadi; ed essa può fornirci una spiegazione della spiccata somiglianza che, nell'adulto, si riscontra fra gli ormoni steroidi elaborati sia dalle gonadi che dalla corteccia dei surreni.

È interessante rilevare che i citati reperti di ricercatori precedenti, in embrioni di Rettili e Mammiferi, generalmente si accordan meglio con le condizioni attualmente riscontrate nella cavia, piuttosto che con quelle degli Anfibi e degli Uccelli. In particolare, si ottiene un quadro molto simile a quello presentemente tratteggiato per la cavia, se coordiniamo fra loro le descrizioni di Goormaghtigh per

i Mammiferi [9] e di Forbes per l'alligatore [7]; fra questi, il primo (occupandosi dello sviluppo dei surreni) ha studiato solamente la formazione del tratto pregenitale dei blastemi interrenali, mentre il secondo (occupandosi dello sviluppo delle gonadi) ha esaminato soltanto il tratto genitale dei medesimi blastemi.

Si prospetta perciò l'opportunità di uno studio embriologico comparativo più completo, che ci potrà dimostrare se effettivamente esista una costante differenza, fra gli Anfibi ed Uccelli da una parte, e dall'altra fra i Rettili e Mammiferi, nei riguardi delle modalità dei rapporti organogenetici precoci fra le gonadi e il tessuto interrenale.

COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente comunica che sono presenti alla seduta i proff. George Polya dell'Università di Stanford (U. S. A.) e Lucien Godeaux dell'Università di Liegi e porge ai graditi ospiti il cordiale saluto della Classe e suo personale.

PLICHI SUGGELLATI

Comunica poi che sono pervenuti all'Accademia due plichi suggellati, l'uno dei quali, consegnato dall'ing. Pietro Pisa, deve essere conservato nell'archivio accademico a disposizione dell'interessato; mentre l'altro, consegnato dall'ing. Fausto Verdura, deve essere aperto nella presente seduta in conformità di quanto richiesto dall'interessato con sua lettera in data 30 aprile 1949. Detto plico contiene, come comunicato dall'autore con sua precedente lettera in data 28 aprile 1949, la soluzione per radicali di una particolare equazione di 5° grado.

La Classe, preso atto dell'integrità dei sigilli del plico presentato dall'ing. Pisa, dispone che il plico stesso sia conservato nell'archivio accademico. Successivamente il Presidente, dopo aver fatto constatare alla Classe l'integrità del sigillo del plico presentato dall'ing. Verdura, con l'assistenza del Segretario Accademico procede all'apertura del plico stesso ed incarica i Soci proff. Picone e Ugo Amaldi di voler esaminare lo studio contenuto nel plico di cui trattasi e di riferire quindi, in una prossima occasione, alla Classe.

I proff. Picone e U. Amaldi accettano e il lavoro dell'ing. Verdura viene preso in consegna dal prof. Picone.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei « Rendiconti » i Soci Abetti, Trabacchi, G. Levi, Semerano, Segre, Caglioti, Signorini, Picone, Cantelli, Bonino, Albenga (a mezzo del Collega Perucca), Armellini e Krall.

Il Segretario Accademico legge l'elenco delle Note pervenute.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

Krall G., Vibrazioni di uno scafo galleggiante su di un fluido sede di onde superficiali di Airy.

Cossu A., Proprietà di curvatura di una particolare classe di varietà a connessione affine (pres. dal Corrisp. B. Segre).

Giannuzzi M. A., Orbita provvisoria della stella binaria ADS 7871 (pres. dal Socio G. Armellini).

Ottaviani G., Intorno alle probabilità di Karup e legame con la teoria dei capitali accumulati (pres. dal Corrisp. F. P. Cantelli).

Supino G., Sul moto irrotazionale dei liquidi viscosi. Nota II (pres. dal Socio A. Signorini).

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Picone, anche a nome del Collega U. Amaldi, legge la relazione sulla Memoria del matematico polacco, prof. Jean G. Mikusinski, dal titolo: « Une nouvelle justification du calcul de Heaviside », con la quale si propone la pubblicazione della Memoria stessa.

La proposta, messa ai voti, è approvata con le solite riserve di carattere finanziario.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

L'Accademico Segretario presenta le pubblicazioni inviate in omaggio all'Accademia, mettendo anzitutto in rilievo i quattro volumi dattiloscritti offerti dal Socio Silvestri e contenenti « Ricordi ed itinerari scientifici » dello stesso Socio dalla sua nascita al compimento del 75° anno di età. In proposito il Presidente dà lettura di una lettera ricevuta dal prof. Silvestri con la quale questi, accompagnando il dono manifesta il desiderio che i quattro già citati volumi siano conservati nella Biblioteca accademica e ammessi alla libera consultazione nella sede dell'Accademia stessa, ma non fuori per ovviare al pericolo che possano andare, per cause imprevedibili, perduti.

Il Presidente invia al Socio Silvestri il ringraziamento suo e della Classe per il gradito omaggio e poichè gli consta che le condizioni di salute del predetto Socio non sono attualmente le migliori, esprime il sincero augurio che al più presto il collega Silvestri possa nuovamente intervenire alle sedute dell'Accademia.

Il Segretario Accademico illustra poi le altre pubblicazioni e in particolar modo il volume « Verso l'elettrotecnica moderna » del Socio Giovanni Giorgi, che è presente alla seduta e che il Presidente ringrazia; la parte seconda dell'opera del Socio Sansone dal titolo « Equazioni differenziali nel campo reale »; il volume « Elettrofisica » di Dalberto Faggiani dell'Università di Genova; alcuni studi del Socio Silvestri e un lavoro del Socio Gola dal titolo « La fisiologia delle razze precoci Strampelli », e numerose opere scientifiche in lingua russa inviate dall'Accademia delle Scienze di Mosca, alcune delle quali appartenenti alla serie scientifico-popolare dell'Accademia stessa.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 12 maggio 1949

BLAZEK Frantisek. — *Basalni Metabolismus Ditete ve veku predskolnim a skolnim.* Praha, Ceska Ak. Ved a Umeni, 1948. Pp. 127, in–8°.

BRESLAVEC L. P. — *Rastenie i luči Rentgena.* Moskva–Leningrad, Ak. Nauk SSSR, 1946. Pp. 193, in–8°, con figg.

BYKOV K. M. — Vedi: HARVEY William.

CANDIOLI Primo. — *Influenza del sostegno vivo «ciliegio» sulla produzione della vite.* Estr. da «Rivista di Viticoltura e di Enologia», 1949, n. 4.

— *I salariati agricoli. Condizioni economiche, occupazione ed aspetti sociali.* Estr. da «Agricoltura delle Venezie», 1949, n. 1–2.

— *I tecnici e l'agricoltura.* Verona, Off. Graf. Albarelli, 1949. Pp. 12, in–8° (Corso di aggiornamento per tecnici agricoli).

Epidemiologo–parazitologičeskie. — *Ekspedicii v Iran i parazitologičeskie issledovanija.* Moskva-Leningrad, Ak. Nauk SSSR, 1948. Pp. 376, in–8°, con figg, tavv. e carte geogr.

FAGGIANI Dalberto. — *Elettrofisica.* Con 80 esercizi svolti e 409 figure. Milano, Libreria Ed. Politecnica Cesare Tamburini, 1949. Pp. 570, in–8°, con figg.

GAETA Antonino Pio. — *Una memoria sulla vaccinazione antivaiolosa, finora inedita letta all'Accademia dei Lincei il 9 luglio 1818. La figura del medico romano Orazio Maceroni, Accademico Linceo.* Estr. da «Clinica Nuova», vol IV, a. III, 1947, n. 4 e 5.

GIORGI Giovanni. — *Verso l'elettrotecnica moderna. Richiami e contributi.* Milano, Libreria Ed. Politecnica C. Tamburini, 1949. Pp. 355, in–8°, con figg. e tavv.

GOLA Giuseppe. — *La fisiologia delle razze precoci Strampelli.* Milano, Servizio Tecnico Agrario della Soc. Gen. Montecatini, 1949. Pp. 45, in–8°. (Le produzioni agrarie ed i loro fattori chimici e biologici, quad. n. 4).

HARVEY William. — *Anatomičeskoe issledovanie o dviženii serdca i krovi u životnyh.* Porevod... Ak. K. M. Bykova. Moskva-Leningrad, Ak. Nauk SSSR, 1948. Pp. 234, in–8°, con tavv.

HVOSTIKOV I. A. – *Svečenie Nočnogo Neba.* Moskva–Leningrad, Ak. Nauk SSSR, 1948. Pp. 496, in–8°, con figg. e tavv.

KARPINSKIJ A. P. — *Očerki geologičeskogo prošlogo evropejskoj rossii.* Moskva–Leningrad, Ak. Nauk SSSR, 1947. Pp. 206, in–8°, con figg. e carte geogr.

KELLER B. A. – *Osnovy evoljucii rastenii...* Moskva–Leningrad, Ak. Nauk SSSR, 1948. Pp. 207, in–8°, con figg.

KNOPS L. — *Contribution à l'étude de la «naissance» et de la «permanence» phénoménales dans le champs visuel.* Estr. da «Miscellanea Psychologica Albert Michotte», 1947.

LIPPI–BONCAMBI Cesare. — *I monti Sibillini.* Bologna, Tip. Mareggiani, 1948. Pp. 79, in–8°, con figg. e tavv. (Consiglio Nazionale delle Ricerche, Centro di Studi per la Geografia Fisica. Ricerche sulla morfologia e idrografia Carsica, X, n. 1).

LJAPUNOV A. M. – *Izbrannye Trudy...* Moskva–Leningrad, Ak. Nauk SSSR, 1948. Pp. 540, in–8°, con tavv.

MASOTTI Arnaldo. — Vedi: VOLTA Luigi e MASOTTI Arnaldo.

MÉMERY Henri. — *L'action individuelle des taches solaires sur les phénomènes terrestres.* Valence, Observatoire de Physique Solaire et de Météorologie, 1948. Pp. 40, in–8°.

OBRUČEV. V. A. — *Grigorij Nikolaevič Potanin...* Moskva–Leningrad, Ak. Nauk SSSR, 1947. Pp. 288, in–8°, con tavv.

PACES Vaclav. — *Cinnost vyvodnyh cest ledvinnyh.* Praha, Ceska Ak. Ved a Umeni, 1947. Pp. 63, in–8°, con tavv.

PANKRATIOS Métropolite de Ganos et Hora. — *Les erreurs de la physique et les formules exactes des chutes des corps.* Istambul, Yeni Fazilet Basimevi, 1949. Pp. 8, in–8°. (Altra edizione in greco e in inglese).

PAVLOVSKIJ E. K. – *Akademik K. M. Ber i Mediko-Hirurgičeskaja Akademija.* Moskva-Leningrad, Ak. Nauk SSSR, 1948. Pp. 216, in-8°, con figg. e tavv.

POMINI Luigi. — *Un insigne vercellese da ricordare ed onorare: Alessio Malinverni botanico, fitopatologo, agronomo, studioso di problemi tecnico-economici rurali.* Vercelli, Tip. S.A.V.I.T., 1948, Pp. 36, in-8° (Collana Culturale Scientifica dell'Istituto Tecnico Agrario di Vercelli, n. 1).

RAJKOV B. E. — *Očerki po istorii geliočentričeskogo mirovozzrenija v Rossii...* II izd. Moskva-Leningrad, Ak. Nauk SSSR, 1947. Pp. 391, in-8°, con tavv.

RICCI Giovanni. — *Einstein ha sbagliato strada.* Reggio Emilia, Tip. Morini, 1949. Pp. 34, in-8°.

SANSONE Giovanni. — *Equazioni differenziali nel campo reale.* Parte seconda. 2° ed. Bologna, Tip. N. Zanichelli, 1949. Pp. XVI-475, in-8°. (Consiglio Nazionale delle Ricerche. Monografie di matematica applicata).

ŠARONOV V. V. – *Mars.* Moskva-Leningrad, Ak. Nauk SSSR, 1947. Pp. 180, in-8°, con figg. e tavv.

SILVESTRI Filippo. — *Descrizione di due specie nuove cavernicole di « Campodeidae [Insecta Diplura] » della regione del Monte Tauro.* Estr. da « Bollettino del Laboratorio di Entomologia Agraria di Portici », vol. IX, 1949.

SILVESTRI Filippo — *Distribuzione del genere « Synxenus » Silv. (Diplopoda-Penicillata).* Estr. da « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei », Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, ser. 8ª, vol. V, fasc. 6.

— *Nuove specie di « Lepismatidae [Insecta Thysanura] » termitofile e mirmecofile.* Estr. da « Bollettino del Laboratorio di Entomologia Agraria di Portici », vol. IX, 1949.

— *On some Japygidae in the Museum of comparative Zoology (Dicellura).* Estr. da « Psyche », vol. LIV, 1947, n. 4.

— *Ricordi e itinerari scientifici.* Voll. 4 dattiloscritti.

STANEK Vaclav. — *Geofysikalni Mapovani gravimetricke...* Praha, Ceska Ak. Ved a Umeni, 1947. Pp, 47, in-8°, con figg.

STUDNICKA F. K. – *Histologie des menschlichen Nabelstranges...* Prag, Ceska Ak. Ved. a Umeni, 1940. Pp. 41, in-8°. con figg. e tavv.

TAUSON V. O. – *Velikie dela malen'kih suščestv.* Moskva Leningrad, Ak. Nauk SSSR, 1948. Pp. 115, in-8°, con figg.

VOLTA Luigi e MASOTTI Arnaldo. — *Luigi Gabba. Notizie biografiche ed elenco degli scritti.* Pavia, Tip. Mario Ponzio, 1949. Pp. 23, in-8°.

U. B.

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta dell'8 giugno 1949

Presidenza del Socio G. CASTELNUOVO

NOTE DI SOCI

Matematica (Geometria differenziale). — *Alcune proprietà caratteristiche delle varietà a curvatura costante.* Nota III (*) del Corrisp. BENIAMINO SEGRE.

8. In questa Nota dimostreremo il teor. II, estendendo in pari tempo a certe V_n il risultato ivi espresso, come accennato nel n. 1. Consideriamo a tal uopo una qualunque V_n riemanniana, rappresentata arbitrariamente su di un S_n euclideo. Le coordinate cartesiane ortogonali di punto $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ in S_n potranno assumersi quali coordinate curvilinee (generalmente oblique) del punto omologo di V_n, e sia

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, dx_i\, dx_k \tag{7}$$

il quadrato dell'elemento lineare di V_n espresso mediante esse, dove le a_{ik} $(= a_{ki})$ denotano funzioni regolari delle variabili reali $x_1, x_2, \cdots, x_n$ (dotate di derivate continue fino al second'ordine).

Indicheremo con punti in alto le derivazioni rispetto ad s e con $-c^i_{\alpha\beta}$ i simboli di Christoffel di 2ª specie relativi alla forma quadratica differenziale (7), e precisamente

$$c^i_{\alpha\beta} = -\left\{ \begin{matrix} \alpha\beta \\ i \end{matrix} \right\} \qquad (i, \alpha, \beta = 1, 2, \cdots, n), \tag{8}$$

talchè avremo $c^i_{\alpha\beta} = c^i_{\beta\alpha}$. Così le linee geodetiche di V_n appaiono come le curve integrali del sistema di equazioni differenziali

$$\ddot{x}_i = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} c^i_{\alpha\beta}\, \dot{x}_\alpha\, \dot{x}_\beta \qquad (i = 1, 2, \cdots, n); \tag{9}$$

(*) Presentata nella seduta del 12 febbraio 1949. – Continuazione della Nota II, apparsa in questi «Rendiconti», vol. VI, fasc. 5, pp. 547–550.

ed è chiaro che si determina una ed una sola di tali curve, e conseguentemente pure la sua imagine in S_n, assegnandone ad arbitrio un punto $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ed i valori che in esso assumono le $\dot{x}$, soggetti soltanto – in forza della (7) – alla condizione

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,\dot{x}_i\,\dot{x}_k = 1\,. \tag{10}$$

Derivando ambo i membri delle (9) rispetto ad s, e tenendo conto delle (9) medesime, si vede che le geodetiche soddisfano inoltre alle

$$\ddot{x}_i = \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\sum_{\gamma=1}^{n} d^i_{\alpha\beta\gamma}\,\dot{x}_\alpha\,\dot{x}_\beta\,\dot{x}_\gamma \qquad (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{11}$$

dove, per abbreviare, abbiamo posto

$$d^i_{\alpha\beta\gamma} = [c^i_{\alpha\beta}]_\gamma + 2\sum_{\delta=1}^{n} c^i_{\alpha\delta}\,c^\delta_{\beta\gamma}\,, \tag{12}$$

la lettera γ fuori parentesi indicando derivazione parziale rispetto ad x_γ.

9. La curvatura $\varkappa$ di una curva $x_1 = x_1(s), \cdots, x_n = x_n(s)$ qualsiasi di S_n si esprime colla

$$\varkappa^2 = \frac{\left(\sum \dot{x}^2\right)\left(\sum \ddot{x}^2\right) - \left(\sum \dot{x}\,\ddot{x}\right)^2}{\left(\sum \dot{x}^2\right)^3}\,, \tag{13}$$

ove, ad esempio, $\sum \dot{x}^2$ sta per $\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \cdots + \dot{x}_n^2$. La curva suddetta risulta quindi a curvatura costante se, e soltanto se, la derivata rispetto ad s del secondo membro della (13) si annulla identicamente, ossia se

$$\left(\sum \dot{x}^2\right)\left[\left(\sum \dot{x}\,\ddot{x}\right)\left(\sum \dot{x}\,\dddot{x}\right) + 3\left(\sum \dot{x}\,\ddot{x}\right)\left(\sum \ddot{x}^2\right) - \left(\sum \dot{x}^2\right)\left(\sum \ddot{x}\,\dddot{x}\right)\right] - 3\left(\sum \dot{x}\,\ddot{x}\right)^3 = 0. \tag{14}$$

Pertanto, affinchè *le geodetiche di* V_n *si rappresentino in* S_n *mediante linee di curvatura costante,* occorre e basta che valga la (14) in forza delle (9), (10), (11). Notiamo ora che il primo membro della (14), ove si esprimano le $\ddot{x}$, $\dddot{x}$ mediante le (9), (11), diventa un polinomio omogeneo di grado 9 nelle $\dot{x}$. Poichè la forma quadratica (7) è definita positiva, valori arbitrari – purchè non tutti nulli – delle $\dot{x}$ possono sempre venir convenientemente alterati per un comune fattore, in modo da rendere soddisfatta la (10). In forza dell'omogeneità del suddetto polinomio di grado 9, ne consegue che la condizione dianzi enunciata per le geodetiche di V_n equivale a ciò che *quel polinomio si annulli identicamente rispetto alle* $\dot{x}$.

In virtù della (14), ciò esige intanto che la forma cubica nelle $\dot{x}$ fornita, in base alle (9), dalla $\sum \dot{x}\,\ddot{x}$ sia divisibile per la forma quadratica $\sum \dot{x}^2$, ossia che – in forza delle (9) – sussista un'identità del tipo

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i\,\ddot{x}_i = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i\,\dot{x}_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \dot{x}_i^2\right), \tag{15}$$

ove le $p_1, p_2, \cdots, p_n$ dipendano soltanto dalle x. Ciò si traduce colle

$$(16) \qquad c^{\alpha}_{\alpha\alpha} = p_\alpha = c^{\alpha}_{\beta\beta} + 2\,c^{\beta}_{\alpha\beta} \qquad (\alpha \neq \beta),$$

$$(17) \qquad c^{\alpha}_{\beta\gamma} + c^{\beta}_{\gamma\alpha} + c^{\gamma}_{\alpha\beta} = 0 \qquad (\beta \neq \gamma, \gamma \neq \alpha, \alpha \neq \beta),$$

ordinatamente ottenute uguagliando i coefficienti di $\dot{x}_\alpha^3$, $\dot{x}_\alpha \dot{x}_\beta^2$, $\dot{x}_\alpha \dot{x}_\beta \dot{x}_\gamma$ nei due membri della (15). Inoltre, in virtù della (15), la (14) – in cui si sopprima il fattore non nullo $\left(\sum \dot{x}^2\right)^2$ – diventa

$$(18) \quad \sum \ddot{x}\,\dddot{x} - \left(\sum p\dot{x}\right)\left(\sum \dot{x}\,\dddot{x}\right) + 3\left(\sum \dot{x}^2\right)\left(\sum p\dot{x}\right)^3 - 3\left(\sum p\dot{x}\right)\left(\sum \ddot{x}^2\right) = 0.$$

La (18), avuto riguardo alle (9), (11), riducesi ad un'equazione omogenea di 5° grado nelle $\dot{x}$: ed ora occorrerebbe esprimere ch'essa sussiste identicamente. Ciò importerebbe nel caso generale un'analisi assai complessa, onde noi qui compieremo l'indagine aggiungendo, per semplificare, opportune restrizioni. Nella successiva Nota IV andremo in fondo alla discussione, seguendo una via un po' diversa, nell'ipotesi che la rappresentazione di V_n su S_n riesca conforme. Invece nella parte restante della presente Nota III studieremo il caso in cui, la rappresentazione di V_n su S_n essendo *a priori* qualunque, *le geodetiche di* V_n *si rappresentino in* S_n *mediante cerchi*.

10. Possiamo intanto escludere che le imagini delle geodetiche siano linee rette, questo caso (d'altronde ben noto) essendo già stato trattato nel n. 2. Ne consegue che il secondo membro della (13) non si annulla identicamente lungo le geodetiche.

La particolarizzazione specificata alla fine del n. 9 si ottiene imponendo la condizione che le imagini delle geodetiche, oltrechè a curvatura costante, risultino linee piane. Ciò fornisce per esse un sistema di equazioni della forma

$$(19)_i \qquad \dddot{x}_i = \mathrm{P}\,\ddot{x}_i + \mathrm{Q}\,\dot{x}_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

dove P e Q denotano funzioni regolari delle x e delle $\dot{x}$. Se ora esprimiamo nella (18) le $\dddot{x}_i$ mediante le $(19)_i$, e quindi sopprimiamo dai due membri il fattore non nullo dato dal numeratore della frazione che compare nella (13), otteniamo che dev'essere identicamente

$$(20) \qquad \mathrm{P} = 3\sum_{\gamma=1}^{n} p_\gamma \dot{x}_\gamma .$$

Inoltre dalle (19), tenuto conto delle (15), (20), deduciamo

$$(21) \qquad \sum \dot{x}\,\dddot{x} = \left(\sum \dot{x}^2\right)\left[3\left(\sum p\dot{x}\right)^2 + \mathrm{Q}\right].$$

Le (19), (21) debbono valere identicamente nelle x, $\dot{x}$ in forza delle (9), (10), (11); ora le (21), (11) permettono di esprimere Q come funzione razionale omogenea di 2° grado nelle $\dot{x}$, sicchè – con un'argomentazione analoga ad altra già usata nel n. 9 – vediamo che le (19), (21) debbono sussistere in forza delle (9), (11) soltanto, e che Q risulta più precisamente una forma quadratica nelle $\dot{x}$ (con coefficienti funzioni regolari delle x), diciamo:

$$(22) \qquad \mathrm{Q} = \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} g_{\alpha\beta}\,\dot{x}_\alpha \dot{x}_\beta \qquad (g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}).$$

Derivando ambo i membri della (15) rispetto ad s, e facendo uso della (15) medesima e delle (9), otteniamo che

$$\sum \dot{x}^2 + \sum \dot{x}\ddot{x} = R \sum \dot{x}^2, \tag{23}$$

dove R denota una forma quadratica nelle $\dot{x}$ che non occorre precisare. Risulta pertanto dalle (21), (23) che la forma biquadratica nelle $\dot{x}$ a cui si riduce $\sum \ddot{x}^2$ in virtù delle (9) dev'essere divisibile per $\sum \dot{x}^2$, ciò che fornisce un'identità del tipo

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} c^i_{\alpha\beta} \dot{x}_\alpha \dot{x}_\beta \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \ddot{x}_i^2 \right) \left(\sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} h_{\alpha\beta} \dot{x}_\alpha \dot{x}_\beta \right), \tag{24}$$

dove le $h_{\alpha\beta}$ $(= h_{\beta\alpha})$ denotano funzioni regolari delle sole x. L'eliminazione delle h fra le relazioni ottenute coll'identificare i coefficienti dei termini simili nelle $\dot{x}$ nei due membri della (24), conduce ad un *sistema di equazioni quadratiche nelle c*, del quale passiamo ad occuparci.

11. Nel secondo membro della (24), il coefficiente $h_{11} + h_{22}$ di $\dot{x}_1^2 \dot{x}_2^2$ uguaglia la somma dei coefficienti h_{11}, h_{22} di $\dot{x}_1^4$, $\dot{x}_2^4$; lo stesso è dunque dei coefficienti dei termini simili a primo membro, ciò che fornisce l'uguaglianza

$$\sum_i^* \left(c^i_{11} - c^i_{22} \right)^2 = 4 \sum_i^* \left(c^i_{12} \right)^2. \tag{25}$$

Scrivendo poi che – nel primo membro della (24) – i coefficienti di $\dot{x}_1^3 \dot{x}_2$ ed $\dot{x}_1 \dot{x}_2^3$ risultano uguali fra loro (in quanto ciò accade nel secondo membro), otteniamo la

$$\sum_i^* c^i_{12} \left(c^i_{11} - c^i_{22} \right) = 0. \tag{26}$$

I vari termini che provengono – sia nella (25) che nella (26) – dai valori 1 e 2 dell'indice i si distruggono fra loro, in forza delle (16), onde *nelle* (25), (26) *è lecito far variare l'indice i di sommazione soltanto da* 3 *ad n*, il che abbiamo ivi voluto esprimere cogli asterischi accompagnanti i simboli di sommazione. Distinguiamo ora tre casi.

(i) *Se* $n = 3$, le (25), (26) implicano senz'altro le $c^3_{12} = c^3_{11} - c^3_{22} = 0$, dalle quali – con scambi di indici ovviamente leciti – si deducono le

$$c^\gamma_{\alpha\beta} = 0 \qquad (\beta \neq \gamma, \gamma \neq \alpha, \alpha \neq \beta), \tag{27}$$

$$c^\alpha_{\beta\beta} = c^\alpha_{\gamma\gamma} \qquad (\alpha \neq \beta, \alpha \neq \gamma). \tag{28}$$

Rileviamo che, se si ammette invece *che sia* $n > 3$ *e che valgano le* (27), dalla relazione (25) ed analoghe seguono le (28). Avuto anche riguardo alle (16), sia nell'una che nell'altra ipotesi possiamo dunque porre per brevità

$$q_\alpha = c^\alpha_{\beta\beta} \quad , \quad r_\alpha = c^\beta_{\alpha\beta} \qquad (\alpha \neq \beta), \tag{29}$$

dove q_α ed r_α denotano funzioni regolari delle x dipendenti soltanto dall'indice α e soddisfacenti alla

$$p_\alpha = q_\alpha + 2 r_\alpha. \tag{30}$$

In base alle (16), (27)–(30) si ha ora

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} c^{i}_{\alpha\beta}\dot{x}_\alpha\dot{x}_\beta = q_i\sum_{\alpha=1}^{n}\dot{x}_\alpha^2 + 2\,\dot{x}_i\sum_{\alpha=1}^{n} r_\alpha\dot{x}_\alpha\,,$$

onde la (24) resta palesemente soddisfatta con una scelta opportuna delle $h_{\alpha\beta}$.

(ii) *Se $n = 4$ e non si fa nessuna ipotesi ulteriore,* le (25), (26) implicano le

$$c^3_{11} - c^3_{22} = \pm\,2\,c^4_1 \quad , \quad c^4_{11} - c^4_{22} = \mp\,2\,c^3_{12}\,,$$

dove occorre prendere simultaneamente i segni superiori o quelli inferiori. Si vede così che attualmente si soddisfa nel modo più generale alle equazioni (25), (26) ed analoghe assumendo

$$c^\gamma_{\alpha\alpha} - c^\gamma_{\beta\beta} = 2\,c^\delta_{\alpha\beta}\,, \tag{31}$$

ove la quaterna $\alpha\,,\beta\,,\gamma\,,\delta$ si identifichi colle varie permutazioni di classe pari – oppure, alternativamente, colle varie permutazioni di classe dispari – dei numeri $1\,,2\,,3\,,4$. Si verifica inoltre senza difficoltà che le (31) implicano le (17), e che le (31) insieme alle (16) rendono identicamente soddisfatte le equazioni quadratiche nelle c considerate alla fine del n. 10.

(iii) *Se $n \geqq 5$ e non si fa nessuna ipotesi ulteriore,* il suddetto sistema di equazioni quadratiche nelle c non si risolve più linearmente in modo completo, come nei casi (i) e (ii), onde la discussione viene a presentare serie difficoltà.

Ci limiteremo in seguito ad approfondire il caso (i), nell'ipotesi $n \geqq 3$, sebbene il caso (ii) potrebbe forse venire trattato in guisa non dissimile, sostituendo le (31) alle (27), (28).

12. Rammentiamo che il caso (i), se $n = 3$, è quello generale del problema specificato alla fine del n. 9; invece, se $n > 3$, abbiamo in esso le condizioni ulteriori (necessarie per $n = 3$, ed eventualmente non restrittive anche per $n > 3$) espresse dalle (27). *Queste condizioni sono certamente soddisfatte se l'elemento lineare* (7) *ha forma ortogonale* (in particolare, se la rappresentazione di V_n su S_n riesce conforme), in quanto le (27) conseguono dalle

$$a_{ik} = 0 \qquad (i \neq k\ ;\ i\,,k = 1\,,\cdots,n)$$

in forza delle (8). Si può inoltre osservare che le (27) implicano già le (17).

In virtù delle (9), (11), (20), (22), la (19)$_1$ può scriversi nella forma

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\sum_{\gamma=1}^{n} d^i_{\alpha\beta\gamma}\dot{x}_\alpha\dot{x}_\beta\dot{x}_\gamma = 3\left(\sum_{\gamma=1}^{n} p_\gamma\dot{x}_\gamma\right)\left(\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} c^i_{\alpha\beta}\dot{x}_\alpha\dot{x}_\beta\right) + \tag{32}_1$$

$$+\,x_i\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n} g_{\alpha\beta}\dot{x}_\alpha\dot{x}_\beta\,,$$

questa dovendo essere un'identità nelle $\dot{x}$ per ogni $i = 1\,,2\,,\cdots,n$. Osserviamo anzitutto che si può ricavare g_{22} in funzione delle c e delle d coll'uguagliare i coefficienti di $\dot{x}_2^3$ nei due membri della (32)$_2$, od anche coll'uguagliare i coefficienti di $\dot{x}_1\,\dot{x}_2^2$ nei due membri della (32)$_1$. Confrontando le due espressioni così ottenute per g_{22}, ed usufruendo delle (12), (16), (27), (29), (30), deduciamo

$$[q_1]_1 - q_1^2 = [q_2]_2 - q_2^2\,,$$

dove gli indici 2 in alto sono esponenti e gli indici 1 e 2 fuori delle parentesi quadre denotano derivazioni parziali rispetto ad x_1 e x_2. È manifestamente lecito porre in questa relazione due qualunque dei numeri $1, 2, \cdots, n$ in luogo degli indici 1, 2 in basso, sicchè abbiamo

$$[q_\alpha]_\alpha = q_\alpha^2 + \rho \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, n), \tag{33}$$

ρ essendo una funzione regolare delle x che non dipende dall'indice α.

Si tragga ora g_{12} dalla $(32)_1$ uguagliando i coefficienti di $\dot{x}_1^2 \dot{x}_2$, e dalla $(32)_3$ uguagliando i coefficienti di $\dot{x}_1 \dot{x}_2 \dot{x}_3$. Confrontando le due espressioni così ottenute per g_{12}, ed usufruendo delle (12), (16), (27), (29), (30), deduciamo $[q_1]_2 = q_1 q_2$. Similmente ricaviamo, più in generale,

$$[q_\alpha]_\beta = q_\alpha q_\beta \qquad (\alpha \neq \beta;\ \alpha, \beta = 1, 2, \cdots, n). \tag{34}$$

Da qui discende, ad esempio, $[q_1]_2 = [q_2]_1$; questa relazione avrebbe anche potuto venir stabilita confrontando le espressioni di g_{12} ottenibili dalla $(32)_1$ coll'uguagliare i coefficienti di $\dot{x}_1^2 \dot{x}_2$, e dalla $(32)_2$ coll'uguagliare i coefficienti di $\dot{x}_1 \dot{x}_2^2$. Più in generale, si verifica senza difficoltà (ma di ciò non avremo da servirci in seguito) che le (33), (34) bastano da sole ad assicurare la validità delle n identità (32), con opportuna scelta delle $g_{\alpha\beta}$.

13. In virtù delle (8), (29), le (33), (34) costituiscono un sistema di equazioni differenziali per le c, ossia per i simboli di Christoffel di 2ª specie; esse però non sono sufficienti affinchè questi competano effettivamente come tali ad una forma quadratica differenziale (7). Invero otteniamo per i simboli di Christoffel condizioni ulteriori, esprimendo che fra i simboli di Riemann di 1ª specie

$$(\alpha\beta, \gamma\delta) = \sum_{i=1}^{n} a_{i\beta} \left([c^i_{\alpha\delta}]_\gamma - [c^i_{\alpha\gamma}]_\delta\right) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(c^i_{\alpha\gamma} c^j_{\beta\delta} - c^i_{\alpha\delta} c^j_{\beta\gamma}\right) \tag{35}$$

intercedono ben note identità, quali [9] la

$$(\alpha 1, 23) + (\alpha 2, 31) + (\alpha 3, 12) = 0 \tag{36}$$

e le

$$(11, 12) = 0, \quad (11, 23) = 0, \quad (12, 12) = (21, 21), \quad (\alpha 3, 12) = (12, \alpha 3), \tag{37}$$

dove α denota uno qualunque dei numeri $1, 2, \cdots, n$.

Più precisamente, in base alle (16), (27), (29), (33), (34), (35), la (36) diventa

$$a_{1\alpha} \left([r_3]_2 - [r_2]_3\right) + a_{2\alpha} \left([r_1]_3 - [r_3]_1\right) + a_{3\alpha} \left([r_2]_1 - [r_1]_2\right) = 0.$$

Dando qui ad α i valori $1, 2, \cdots, n$, otteniamo un sistema di n equazioni lineari omogenee nelle tre differenze entro le parentesi tonde. La matrice dei coefficienti di questo sistema ha rango tre, altrimenti la forma differenziale

(9) Cfr. ad esempio L. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, 3ª ed., vol. I, parte 1ª (Pisa, Spoerri, 1922), § 38.

quadratica (7) non potrebbe essere definita positiva, eppertanto ciascuna di quelle differenze deve annullarsi. Più in generale, si ha dunque

$$[r_\alpha]_\beta = [r_\beta]_\alpha \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, n). \tag{38}$$

Osserviamo infine che, posto per abbreviare

$$t_{\alpha\alpha} = [r_\alpha]_\alpha + r_\alpha^2 + \sum_{i=1}^{n} q_i r_i - \rho, \tag{39}$$

$$t_{\alpha\beta} = [r_\alpha]_\beta + r_\alpha r_\beta \qquad (\alpha \neq \beta), \tag{40}$$

e tenuto conto delle (16), (27), (29), (33)–(35), (38)-(40), le (37) riduconsi ordinatamente alle

$$a_{12} t_{11} = a_{11} t_{12} \quad , \quad a_{13} t_{12} = a_{12} t_{13} \quad , \quad a_{11} t_{22} = a_{22} t_{11} \quad , \quad a_{13} t_{2\alpha} = a_{2\alpha} t_{13}.$$

Poichè le a_{ik} non sono tutte nulle, da queste relazioni – e da quelle ottenibili da esse con scambi di indici – si deduce che è

$$t_{ik} = \omega\, a_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \cdots, n), \tag{41}$$

dove ω è una funzione regolare delle x che non dipende dagli indici i, k.

Avuto riguardo alle (16), (27), (29), (33), (34), (38), (39), (40), la (35) fornisce, per ogni scelta dei numeri $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, \cdots, n$,

$$(\alpha\beta, \gamma\delta) = t_{\alpha\gamma}\, a_{\beta\delta} - t_{\alpha\delta}\, a_{\beta\gamma}.$$

Da qui e dalle (41) seguono tosto le

$$(\alpha\beta, \gamma\delta) = \omega\,(a_{\alpha\gamma}\, a_{\beta\delta} - a_{\alpha\delta}\, a_{\beta\gamma});$$

queste esprimono che la curvatura riemanniana di V_n attorno ad ogni singolo punto è la stessa secondo qualunque orientazione (e vale precisamente ω), sicchè – in forza del teorema di Schur richiamato nella Nota I – V_n *risulta a curvatura costante.*

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Analisi matematica. — *Chiarimento a una Nota del professore W. Sierpiński.* Nota II di SANDRO FAEDO, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

5. Riespongo ora in forma più completa e corretta la dimostrazione della mia Nota cit. in (1), avvertendo che così si ottiene anche un teorema più largo di quello dimostrato nel n. 4.

In questo numero darò alcune definizioni.

a) Si abbia un insieme I di funzioni reali $f(x)$ definite in un intervallo (a, b) variabile in generale con la $f(x)$. Si dice che le funzioni di I sono *ugualmente limitate* se esiste un numero $N > 0$ tale che per ogni $f(x)$ di I sia $|f(x)| \leq N$ per $a \leq x \leq b$ e $-N \leq a \leq b \leq N$.

(*) Nella seduta del 9 aprile 1949.

b) Le funzioni di I si dicono inoltre *ugualmente oscillanti* [5] se esiste almeno una legge con cui far corrispondere ad ogni intero n un suo sottoinsieme infinito $I_n \supset I_{n+1}$ e un numero $\delta_n > 0$ tale che ogni funzione $f(x)$ $(a \leq x \leq b)$ di I_n in ogni intervallo di lunghezza $< \delta_n$ contenuto in (a, b) compia un'oscillazione $< \frac{1}{n}$.

Si può sempre supporre che sia $\delta_n \geq \delta_{n+1}$ e $\delta_n \to 0$ per $n \to \infty$.

c) Sia $y(P)$ una funzione reale e limitata degli elementi P di un insieme infinito J ed $\{J_n\}$ una successione di sottoinsiemi infiniti di J con $J_n \supset J_{n+1}$.

Sia y_n il massimo valore di accumulazione di $y(P)$ quando P descrive J_n [6]; è $y_n \geq y_{n+1}$ e quindi esiste finito il $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Il numero y lo diremo *il massimo limite di* $y(P)$ su $\{J_n\}$ e scriveremo

$$y = \max_{\text{su}\{J_n\}} \lim y(P).$$

Il numero y ha la proprietà che *qualunque siano* $\varepsilon > 0$ *e l'intero* n *esistono infiniti elementi* P *di* J_n *per cui è* $|y - y(P)| < \varepsilon$.

d) Sia $\{y_m(P)\}$ $(m = 0, 1, 2, \cdots)$ una successione di funzioni reali e limitate degli elementi di J e

$$y_0 = \max_{\text{su}\{J_n\}} \lim y_0(P).$$

Se $J_n^1 \subset J_n$ è l'insieme (infinito) degli elementi P di J_n per cui è $|y_0 - y_0(P)| < \frac{1}{n}$, risulta $J_n^1 \supset J_{n+1}^1$ e quindi esiste (finito)

$$y_1 = \max_{\text{su}\{J_n^1\}} \lim y_1(P).$$

Così pure, se $J_n^2 \subset J_n^1$ è l'insieme degli elementi P di J_n^1 per cui è $|y_1 - y_1(P)| < \frac{1}{n}$, è $J_n^2 \supset J_{n+1}^2$ ed esiste (finito)

$$y_2 = \max_{\text{su}\{J_n^2\}} \lim y_2(P).$$

Così proseguendo si viene a definire una successione $\{y_m\}$ di numeri reali, che diremo il *massimo limite simultaneo* di $\{y_m^{(P)}\}$ su $\{J_n\}$. Per ogni m si ha una successione di insiemi infiniti $\{J_n^m\}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ ed è

$$J_n^m \subset J_n^{m-1} \subset \cdots \subset J_n^1 \subset J_n \quad , \quad J_n^m \supset J_{n+1}^m , \tag{4}$$

tali che per ogni elemento P di J_n^{m+1} risulta

$$|y_m - y_m(P)| < \frac{1}{n}$$

(5) C. Arzelà, *Sull'esistenza degli integrali delle equazioni differenziali ordinarie*. « Mem. Acc. Sc. Bologna », se. V, t. VI (1896-1897), p. 131; *Sulle funzioni ugualmente oscillanti*. « Attt. Acc. Sc. Bologna », 1900.

(6) Cioè l'estremo superiore dell'insieme somma dei due seguenti:

a) il derivato dell'insieme dei valori $y(P)$, con $P \subset J_n$;

b) l'insieme di tutti i numeri reali $\bar{y}$ tali che esistano infiniti elementi P di J_n con $y(P) \to \bar{y}$.

e quindi, per le (4),

$$(5) \qquad |y_i - y_i(P)| < \frac{1}{n} \qquad (i = 0, 1, \cdots, m).$$

Si noti che per definire il massimo limite simultaneo di $\{y_m^{(P)}\}$ su $\{J_n\}$ basta che ogni $\{y_m^{(P)}\}$ sia definita su ogni J_n a partire da un certo indice n_m in poi.

6. THEOREMA. – *Si può dare una legge con cui scegliere una funzione continua di accumulazione in ogni insieme infinito* I *di funzioni ugualmente limitate e ugualmente oscillanti* (7).

Si fissi una delle leggi indicate nel n. 5, *b*). Gli estremi a e b del relativo intervallo di definizione sono funzioni reali e limitate degli elementi di I; siano x_0 e x_1 il loro massimo limite simultaneo su $\{I_n\}$ (ved. n. 5, *d*)).

Da $a \leq b$ segue subito $x_0 \leq x_1$. Indichiamo con $J_n \subset I_n$ il sottoinsieme infinito degli elementi di I_n il cui intervallo di definizione (a, b) verifica le disuguaglianze

$$(6) \qquad |x_0 - a| < \frac{1}{2}\delta_n \quad , \quad |x_1 - b| < \frac{1}{2}\delta_n ,$$

δ_n essendo definito nel n. 5 *b*).

Consideriamo la successione $\{x_m\}$ $(m = 2, 3, 4, \cdots)$ di tutti i numeri razionali *interni* a (x_0, x_1) e definiamo la seguente successione di funzioni degli elementi $f(x)$ di I

$$y_0 = f(a) \quad , \quad y_1 = f(b) \quad , \quad y_2 = f(x_2), \cdots, y_m = f(x_m), \cdots .$$

y_0 e y_1 sono definite per ogni elemento $f(x)$ $(a \leq x \leq b)$ di I e se è $x_0 = x_1$ la successione scritta si riduce ai soli primi due termini; poichè x_m $(m \geq 2)$ è interno a (x_0, x_1) per le (6) y_m è definita su J_n, per n abbastanza grande (basta prendere per n il primo intero per cui è $2(x_m - x_0) > \delta_n$, $2(x_1 - x_m) > \delta_n$).

Indichiamo con

$$F(x_0) \quad , \quad F(x_1) \quad , \quad F(x_2), \cdots, F(x_m), \cdots$$

la successione massimo limite simultaneo di $\{y_m\}$ su $\{J_n\}$. Se è $x_0 = x_1$ è $F(x_0) = F(x_1)$; infatti dalle (6) segue che è per ogni elemento di J_n $|a - b| < \delta_n$ e quindi $|f(a) - f(b)| < \frac{1}{n}$.

La funzione $F(x)$ *è continua su* $\{x_m\}$.

Se è $x_0 = x_1$ ciò è evidente. Se $x_0 < x_1$, si fissi l'intero n ad arbitrio.

Dimostriamo che se è $x_0 < x_m \leq x_0 + \frac{1}{2}\delta_n$ è

$$(7) \qquad |F(x_0) - F(x_m)| < \frac{3}{n} .$$

(7) Qui si intende la definizione di funzione di accumulazione data nella Nota I, n 3, 1°).

Si determini il primo intero $\bar{n} \geqq n$ tale che y_m sia definita su $J_{\bar{n}}$; per ogni elemento $f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ di $J_{\bar{n}}^{m+1}$ è per le (5)

$$| F(x_0) - f(a) | < \frac{1}{\bar{n}} \leqq \frac{1}{n} \quad , \quad | F(x_m) - f(x_m) | < \frac{1}{n} \leqq \frac{1}{n} ;$$

inoltre è $| x_0 - a | < \frac{1}{2} \delta_{\bar{n}} \leqq \frac{1}{2} \delta_n$ e perciò $| a - x_m | < \delta_n$, da cui segue

$$| f(a) - f(x_m) | \leqq \frac{1}{n} ,$$

perchè $J_{\bar{n}}^{m+1} \subset I_n$. Dalle disuguaglianze ottenute si ricava subito la (7).

Nello stesso modo si prova la continuità nel punto x_1. Siano ora x_r e x_s due elementi di $\{ x_m \}$, distinti da x_0 e x_1 con $| x_r - x_s | < \delta_n$. Fissato $\bar{n} \geqq n$ in modo che y_r e y_s siano definite su $J_{\bar{n}}$, se è $r \geqq s$, risulta per ogni elemento di $J_{\bar{n}}^{r+1}$

$$| F(x_r) - f(x_r) | < \frac{1}{\bar{n}} \leqq \frac{1}{n} \quad , \quad | F(x_s) - f(x_s) | < \frac{1}{\bar{n}} \leqq \frac{1}{n}$$

e inoltre

$$| f(x_r) - f(x_s) | < \frac{1}{n} \quad \text{essendo} \quad | x_r - x_s | < \delta_n .$$

Ne segue ancora

$$| F(x_r) - F(x_s) | < \frac{3}{n}$$

ed è dimostrata la continuità di $F(x)$ su $\{ x_m \}$.

Definiamo $F(x)$ su tutto (x_0 , x_1) in modo che sia continua in tale intervallo e dimostriamo che $F(x)$ è funzione di accumulazione di I.

Supponiamo dapprima $x_0 = x_1$.

Per le (6) è per ogni elemento $f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ di J_n^1

$$| x_0 - a | < \frac{1}{2} \delta_n \qquad | x_0 - b | < \frac{1}{2} \delta_n$$

e inoltre se $a \leqq x \leqq b$, è $| x - a | < \delta_n$ e quindi

$$| f(x) - f(a) | < \frac{1}{n} ;$$

d'altra parte è

$$| F(x_0) - f(a) | < \frac{1}{n}$$

da cui risulta

$$| F(x_0) - f(x) | < \frac{2}{n}$$

che prova che $F(x)$ è funzione di accumulazione I.

Se $x_0 < x_1$ si determini $\delta > 0$ in modo che se x' e x'' sono due qualunque punti di (x_0, x_1) con $|x' - x''| < \bar{\delta}$ risulti $|F(x') - F(x'')| < \frac{1}{n}$. Detto δ il minore fra $\bar{\delta}$ e δ_n siano $x_{t_1}, x_{t_2}, \cdots, x_{t_r}$ elementi di $\{x_m\}$ interni ad (x_0, x_1) e che dividono tale intervallo in parti tutte minori di δ; sia $\bar{n}$ un intero maggiore di $n, t_1, t_2, \cdots, t_r$ e tale che le funzioni $y_{t_1}, y_{t_2}, \cdots, y_{t_r}$ siano definite su $J_{\bar{n}}$; consideriamo un qualunque elemento $f(x)$ $(a \leq x \leq b)$ di $J_n^{\bar{n}+1}$. Se x è un punto comune a (x_0, x_1) e ad (a, b) esiste un x_{t_s} con $|x - x_{t_s}| < \delta$ e quindi è

$$|F(x) - F(x_{t_s})| < \frac{1}{n}, \quad |F(x_{t_s}) - f(x_{t_s})| < \frac{1}{\bar{n}} < \frac{1}{n},$$

$$|f(x_{t_s}) - f(x)| < \frac{1}{n},$$

da cui

$$|F(x) - f(x)| < \frac{3}{n}. \tag{8}$$

Se è $a \leq x < x_0$ (o $x_1 < x \leq b$), poichè $f(x)$ appartiene a $J_{\bar{n}}$ è anche $x - x_0 < \delta_{\bar{n}} \leq \delta_n$ (o $x - x_1 \leq \delta_n$) e quindi

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{n} \qquad \left(|f(x) - f(x_1)| < \frac{1}{n}\right).$$

Perciò facendo nella (8) $x = x_0$ $(x = x_1)$ si ottiene

$$|F(x_0) - f(x)| < \frac{4}{n} \qquad \left(|F(x_1) - f(x)| < \frac{4}{n}\right).$$

Poichè sussistono le (6) è provato che $F(x)$ è di accumulazione per I.

Osservazione. — Il ragionamento esposto dà in sostanza una dimostrazione, indipendente dal principio di Zermelo, di un teorema di Arzelà che estende la nota proposizione di Giulio Ascoli sulla esistenza di una funzione di accumulazione in ogni insieme di funzioni ugualmente limitate ed ugualmente continue.

7. Passiamo ora alla dimostrazione del teorema del n. 4.

a) Sia dapprima I un insieme chiuso e non vuoto di S.

Indichiamo con N il minimo intero positivo per cui esiste un sottoinsieme non vuoto I' di I tale che per ogni suo elemento $f(x)$ $(a \leq x \leq b)$ è

$$|f(x)| \leq N \quad \text{per} \quad a \leq x \leq b \quad \text{e} \quad -N \leq a \leq b \leq N.$$

Per ogni elemento $f(x)$ di I' esistono numeri positivi Δ_1 tali che se è $x_1 - x_2 \leq \Delta_1$ (con x_1 e x_2 appartenenti all'intervallo di definizione di $f(x)$) risulti $|f(x_1) - f(x_2)| \leq 1$. Se Δ_1 è l'estremo superiore dei Δ_1 al variare di $f(x)$ in I', indichiamo con I_1 il sottoinsieme degli elementi di I' per cui si può

prendere $\Delta_1 = \frac{1}{2}\bar{\Delta}_1 = \delta_1$. Analogamente si può determinare un numero positivo δ_2 e un insieme $I_2 \subset I_1$ tale che per ogni suo elemento è

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{1}{2} \quad \text{per} \quad |x_1 - x_2| \leq \delta_2$$

(x_1, x_2 appartenenti all'intervallo di definizione di $f(x)$).

Così proseguendo si ottiene la successione di sottoinsiemi di I'

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$$

Se uno di questi è finito (e quindi lo sono pure i successivi) è immediato come si può dare una legge con cui scegliere in esso un elemento.

Se tutti gli I_n sono infiniti, allora I' è un sottoinsieme di I di funzioni ugualmente limitate e ugualmente oscillanti e si è dimostrato nel n. 6 che si può dare la cercata legge di scelta.

b) Sia I un insieme chiuso e non vuoto di $S_{-\infty}^{+\infty}$. Se delle funzioni di I si considerano solo i valori che assumono in $\sigma_1 = (-1, 1)$, si ha un insieme I_1, dal quale, come in *a*), si può estrarre un sottoinsieme I_1 di funzioni ugualmente limitate con la proprietà che esista un $\delta_1 > 0$ in modo che se $f(x) \in I_1$, $-1 \leq x_1 < x_2 \leq 1$, $x_2 - x_1 \leq \delta_1$, sia anche $|f(x_2) - f(x_1)| \leq 1$. Indichiamo con J_1 il sottoinsieme delle funzioni di I che coincidono con funzioni di I_1 su σ_1. Detto I_2 l'insieme delle funzioni J_1 considerate solo su $\sigma_2 = (-2, 2)$, si può determinare $\delta_2 > 0$ e un $I_2 \subset I_2$ tale che per ogni $f(x) \in I_2$ sia $|f(x_2) - f(x_1)| \leq \frac{1}{2}$ per $-2 \leq x_1 < x_2 \leq 2$ e $x_2 - x_1 \leq \delta_2$; sia J_2 il sottoinsieme delle funzioni di J_1 che coincidono con funzioni di I_2 su σ_2. Così proseguendo si ottiene una successione di sottoinsiemi di I, $J_1 \supset J_2 \supset \cdots \supset J_n \supset \cdots$. Se qualcuno di questi fosse finito è immediata la legge di scelta in I; se ciò non accade, comunque si fissi l'intero k, J_k è su $\sigma_k = (-k, k)$ un insieme di funzioni ugualmente limitate e ugualmente oscillanti. Perciò se nel ragionamento del n. 6 si assume come successione $\{x_m\}$ ($m = 0, 1, 2, \cdots$) quella di *tutti* i numeri razionali, la funzione $y_m = f(x_m)$ è definita per ogni elemento dell'insieme I; definendo ancora $\{F(x_m)\}$ come massimo limite simultaneo di $\{y_m\}$ su $\{J_n\}$, si ottiene una funzione continua $F(x)$ che su *ogni* σ_k è di accumulazione per le funzioni di I; perciò $F(x)$ è di accumulazione per $I \subset S_{-\infty}^{+\infty}$ ed è quindi un elemento di I.

c) Per gli spazi $S^{+\infty}$ e $S_{-\infty}$ si possono ripetere considerazioni analoghe, oppure ci si può ricondurre allo spazio $S_{-\infty}^{+\infty}$ nel modo seguente:

Sia $I \subset S^{-\infty}$ un insieme chiuso; se $(a, -\infty)$ è l'intervallo di definizione di $f(x) \in I$, sia $A = \text{estr. inf.}\ a$ ed $I' \subset I$ sia l'insieme chiuso di tutti gli elementi di I per cui $a \leq A + 1$. Posto $f(x) = f(a)$ per $x < a$, $f(x) = f(x)$ per $x \geq a$, $f(x) \in I'$, l'insieme I' delle $f(x)$ è, come è facile vedere, chiuso in $S^{-\infty}$ e quindi si può scegliere in esso un elemento $\bar{f}_0(x)$.

Se $f(x) \in I'$, con $\alpha \leq x < -\infty$, è tale che $f(x) = f_0(x)$, allora l'insieme degli α è chiuso e limitato e possiede un primo elemento α_0; è così determinata in I la funzione $f_0(x)$, $x \geq \alpha_0$.

Analisi matematica. — *L'integrale in forma ordinaria, alla frontiera d'un campo dello spazio funzionale lagrangiano del prim'ordine.* Nota di TULLIO VIOLA, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

1. Nella mia Memoria *Procedimenti costruttivi per le estremanti di un funzionale* (1) ho risolto problemi di massimo e di minimo relativi all'integrale

$$\int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx ,$$

sotto opportune condizioni ai limiti e supponendo le funzioni $y(x)$ a derivate seconde equilimitate in $[a, b]$ (cioè $|y''(x)| \leq L$ quasi ovunque in $[a, b]$, essendo L una costante positiva arbitraria e indipendente da $y(x)$). Recentemente ho ripreso quella ricerca, abbandonando i miei primitivi metodi geometrici e studiando il comportamento d'un generico integrale in forma ordinaria

$$J[y] = \int_a^b f(x, y, y')\, dx ,$$

alla frontiera d'un campo funzionale E, del quale (per desiderio di generalità) ho dato la seguente

DEFINIZIONE. – *Prefissati ad arbitrio, in* $[a, b]$, $m + n$ *punti* x_i, x'_j $(a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_m \leq b , a \leq x'_1 < x'_2 < \cdots < x'_n \leq b ; m \geq 1 , n \geq 1$ *oppure* $m \geq 2 , n = 0 ;$ *i punti* x_i *potendo, alcuni o anche tutti, coincidere coi punti* x'_j*) e* $2(m + n)$ *costanti* p_i , P_i , p'_j , P'_j *con* $p_i \leq P_i , p'_j \leq P'_j$*, appartengono ad* E *tutte e sole le funzioni* $y(x)$*, dotate di derivate prime continue in tutto* $[a, b]$*, nonchè di derivate seconde in quasi tutto* $[a, b]$*, ivi soddisfacenti a una limitazione del tipo* $|y''(x)| \leq L(x)$ *(essendo* $L(x)$ *una prefissata funzione quasi continua, non negativa e sommabile in* $[a, b]$*, indipendente da* $y(x)$*), e inoltre tali che*

$$(1) \qquad p_i \leq y(x_i) \leq P_i , \quad p'_j \leq y'(x'_j) \leq P'_j \qquad (i = 1, 2, \cdots, m ; j = 1, 2, \cdots, n).$$

In questa Nota espongo i risultati della mia nuova ricerca.

2. Così definito, il campo E può esser vuoto; se non lo è (2), esso è *compatto e chiuso del prim'ordine*. Se dunque si suppone la funzione integranda $f(x, y, y')$

(*) Nella seduta dell'8 giugno 1949.

(1) «Rendic. Circ. Mat. di Palermo», vol. 62, 1938-39. Cfr. anche le Note: *Sulle estremanti di un integrale in forma ordinaria*, ecc. e *Curve di massima lunghezza, rappresentatrici di funzioni* $y = f(x)$ *a derivate uniformemente lipschitziane*. («Rend. Lincei», vol. 28, ser. 6ª, 2° sem. 1938, fasc. 10 e 11, pp. 311-317, 371-377).

(2) Come noi d'ora innanzi supporremo, soddisfacendo ad opportune condizioni il complesso degli elementi che concorrono alla definizione di E.

continua, insieme con le sue derivate parziali prime, al variare del punto (x, y, y') in un dominio tridimensionale contenente E, più precisamente al variare di x in $[a, b]$ e (per ogni x) al variare di y e di y' in intervalli contenenti tutti i valori che assumono rispettivamente le funzioni di E e le loro derivate prime, si può affermare che $J[y]$ *è un funzionale dotato sia di massimo assoluto che di minimo assoluto in* E.

3. Indichiamo poi con E^0 l'insieme formato dalle funzioni $y = \varphi(x)$ di E che si definiscono suddividendo $[a, b]$ in un numero *finito* d'intervalli parziali e ponendo in questi, alternativamente, $\varphi'' = +L(x)$, $\varphi'' = -L(x)$ [5]. Tale insieme è contenuto nella frontiera di E; esso *è denso in* E, *anzi* E *è l'involucro di* E^0. In corrispondenza d'ogni funzione $\varphi(x)$, è possibile determinare un numero $\delta_\varphi > 0$ tale che, se un'altra funzione $y(x)$ di E soddisfa alle condizioni

$$y(x_1) = \varphi(x_1) \quad , \quad y'(x_1) = \varphi'(x_1) \quad , \quad y(x_2) = \varphi(x_2) \quad , \quad y'(x_2) = \varphi'(x_2)$$

in due punti x_1, x_2 di $[a, b]$ per cui $0 < x_2 - x_1 \leq \delta_\varphi$, allora necessariamente $y(x)$ coincide con $\varphi(x)$ in tutto $[x_1, x_2]$: conseguentemente non esistono altre funzioni $y(x)$ di E, appartenenti a un intorno del prim'ordine (d'ampiezza arbitraria) della $\varphi(x)$ e coincidenti con $\varphi(x)$ in ogni punto di $[a, b]$ estraneo a (x_1, x_2) [6]. Questa proprietà impedisce la ricerca delle estremanti di frontiera per l'integrale $J[y]$, applicando i metodi classici.

Qualunque siano la funzione $y(x)$ di E e l'intervallo parziale $[c, d]$ di $[a, b]$, esiste sempre una funzione $\varphi(x)$ tale che

$$(2) \quad y(c) = \varphi(c) \quad , \quad y'(c) = \varphi'(c) \quad , \quad y(d) = \varphi(d) \quad , \quad y'(d) = \varphi'(d).$$

Per la costruzione d'una tale $\varphi(x)$, si cominci col risolvere il sistema d'equazioni

$$(3) \quad \begin{cases} 2\int_h^k t\,L(t)\,dt = \int_c^d t\,[y''(t) + L(t)]\,dt \\ 2\int_h^k L(t)\,dt = \int_c^d [y''(t) + L(t)]\,dt, \end{cases}$$

nelle due incognite h, k. Due e due sole eventualità possono presentarsi:

a) Il sistema ammette una coppia di soluzioni distinte h, k. In tal caso è $c \leq h < k \leq d$ e la coppia è unica.

b) In caso contrario [7] il sistema è indeterminato e si può assumere $h = k$ uguale a un punto qualunque di $[c, d]$.

(3) Per brevità, gli estremi di siffatti intervalli parziali saranno d'ora in poi indicati con la sigla $[P\,D]_\varphi$ (leggere: «punti di divisione relativi alla funzione $\varphi(x)$»).

(4) Le parentesi tonde indicano intervalli aperti.

(5) Precisamente quando è $y''(x) = -L(x)$ in quasi tutto (c, d).

Dopo ciò una delle funzioni $\varphi(x)$ cercate è definita dalle seguente tabella

$$(4)\qquad \varphi(x)=\begin{cases} y(c)+y'(c)(x-c)-\displaystyle\int_c^x (x-t)\,L(t)\,dt & \text{in } [c,b] \\ y(c)+y'(c)(x-c)-\displaystyle\int_c^b (x-t)\,L(t)\,dt+ & \\ \qquad +\displaystyle\int_b^x (x-t)\,L(t)\,dt & \text{in } [b,k] \\ y(c)+y'(c)(x-c)-\displaystyle\int_c^b (x-t)\,L(t)\,dt+ & \\ +\displaystyle\int_b^k (x-t)\,L(t)\,dt-\int_k^x (x-t)\,L(t)\,dt & \text{in } [k,d]. \end{cases}$$

Questa funzione $\varphi(x)$ è l'unica soddisfacente alle condizioni (2), se e solo se riesce $b=k$, oppure $c=b$, oppure $k=d$. Tolti questi tre casi, esistono infinite altre funzioni $\varphi(x)$ soddisfacenti alle (2): una si può per esempio ottenere facendo uso delle equazioni analoghe alle (3) e dalla tabella analoga alla (4), che si scrivono semplicemente sostituendo ovunque $L(t)$ con $-L(t)$.

4. Per studiare la variabilità dell'integrale

$$J[\varphi]=\int_a^b f(x,\varphi,\varphi')\,dx$$

al variare della $\varphi(x)$ in E^0, e per confrontarla con quella dell'integrale $J[y]$ al variare della $y(x)$ in E, giova anzitutto osservare che l'insieme numerico U^0 descritto dal primo integrale è, in ogni caso, denso nell'insieme numerico U descritto dal secondo e che anzi U è l'involucro di U^0. Da ciò si deduce che gli estremi superiore ed inferiore di U^0, coincidono rispettivamente col massimo e col minimo di U. Dunque: *se l'integrale* $J[\varphi]$ *possiede massimo assoluto oppure minimo assoluto al variare della* $\varphi(x)$ *in* E^0, *questi valori coincidono rispettivamente col massimo assoluto o col minimo assoluto dell'integrale* $J[y]$, *al variare della* $y(x)$ *in* E.

Consideriamo ora una generica $\varphi(x)$ e indichiamo con (c,d) un qualunque intervallo parziale di $[a,b]$, nel quale non cadano punti x_i, x_i' (n. 1) ma cadano invece esattamente tre $[PD]_\varphi$, siano a, b, k (con $a<b<k$) (ammesso che un tale intervallo parziale esista, relativamente alla detta $\varphi(x)$). È possibile far variare con continuità [6] la $\varphi(x)$, in modo ch'essa si mantenga inalterata fuori

(6) È naturalmente sottintesa la specificazione: *del prim'ordine*. È cioè possibile far variare con continuità la $\varphi(x)$ insieme con la sua derivata $\varphi'(x)$, ecc.

di (c, d) e conservi sempre esattamente tre $[P\ D]_\varphi$ in (c, d). Corrispondentemente l'integrale $J[\varphi]$ varia in funzione d'un unico parametro: se scegliamo come parametro per esempio il punto u, possiamo scrivere $J(u)$ al posto di $J[\varphi]$ e studiare le variabilità delle tre funzioni $J(u)$, $h(u)$, $k(u)$ tutte certamente continue. *Se* $L(x)$ *è continua e sempre positiva in* $[a, b]$, queste tre funzioni sono altresì derivabili e si trova, con semplici calcoli:

$$h'(u) = \frac{L(u)}{L(h)} \frac{k-u}{k-h} \quad , \quad k'(u) = \frac{L(u)}{L(k)} \frac{h-u}{k-h} ,$$

$$(5) \quad J'(u) = \pm 2 L(u)(h-u) \left\{ \frac{\int_u^h \left[\frac{\partial f}{\partial \varphi'} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}(x-u) \right] dx}{h-u} - \frac{\int_h^k \left[\frac{\partial f}{\partial \varphi'} - \frac{\partial f}{\partial \varphi}(k-x) \right] dx}{k-h} \right\},$$

valendo, in quest'ultima formula, il segno + o il segno − secondochè in (u, b) è $\varphi''(x) = \mp L(x)$. Giova tener ben distinti questi due casi e perciò poniamo in essi rispettivamente

$$\frac{\int_u^h \left[\frac{\partial f}{\partial \varphi'} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}(x-u) \right] dx}{h-u} - \frac{\int_h^k \left[\frac{\partial f}{\partial \varphi'} - \frac{\partial f}{\partial \varphi}(k-x) \right] dx}{k-h} = \begin{cases} M(u) \\ N(u). \end{cases}$$

5. Per arrivare ad una condizione sufficiente affinchè almeno una delle estremanti assolute dell'integrale $J[y]$ sia una funzione $\varphi(x)$ di E^0, è necessario, pur conservando intatte le deduzioni e gli sviluppi di calcolo del numero precedente, invertire il punto di vista nell'impostazione del problema e cioè dare al problema stesso un carattere *locale* (ciò che corrisponde al significato più profondo del fatto analitico). Scegliamo dunque a piacere, in $[a, b]$, tre punti, u, h, k tali che $u < h < k$ e consideriamo una funzione $\varphi(x)$ di E^0 tale che

$$(6) \quad \varphi''(x) = \begin{cases} -L(x) & \text{in } (u, h) \\ +L(x) & \text{in } (h, k), \end{cases}$$

oppure tale che

$$(7) \quad \varphi''(x) = \begin{cases} +L(x) & \text{in } (u, h) \\ -L(x) & \text{in } (h, k), \end{cases}$$

e inoltre i valori $\varphi(u)$, $\varphi'(u)$ siano prefissati anch'essi a piacere entro i limiti concessi dalla definizione di E (n. 1)[7]: poniamo, per fissar le idee,

$$\varphi(u) = p \quad , \quad \varphi'(u) = p'.$$

(7) Non si può escludere, a priori, che una tale funzione $\varphi(x)$ *non esista* in E^0, oppure che n'esista una d'un solo dei due tipi (6), (7). In tal caso però la ricerca stessa delle estremanti, così com'è qui impostata, verrebbe a perder significato (la struttura di E, in corrispondenza dell'intervallo $[u, b]$, riducendosi ad una semplicità banale). Noi dunque escludiamo questo caso eccezionale.

L'espressione che compare tra graffe nella (5), deve considerarsi, sia nel caso (6) che nel caso (7), come una funzione dei parametri appresso indicati:

$$M = M(u, p, p', h, k) \qquad \text{nel caso (6)}$$
$$N = N(u, p, p', h, k) \qquad \text{nel caso (7)}.$$

Considereremo in quest'espressione, a partire dai valori iniziali prefissati,

a) p e p' determinati (in funzione di u e nell'intorno del detto valore iniziale di u) dall'equazione differenziale del second'ordine

$$p''(u) = +L(u) \qquad \text{nel caso (6)}\ ^{(8)};$$
$$p''(u) = -L(u) \qquad \text{» » (7)};$$

b) h e k determinati (in funzione di u e nell'intorno del detto valore iniziale di u) dalla coppia d'equazioni differenziali del prim'ordine

$$h'(u) = \frac{L(u)}{L(h)} \frac{k-u}{k-h} \quad , \quad k'(u) = \frac{L(u)}{L(k)} \frac{h-u}{k-h}.$$

Con tali convenzioni, le due espressioni or ora indicate con M ed N risultano in definitiva delle funzioni della sola variabile indipendente u (nell'intorno del detto valore iniziale di u):

$$M = M(u) \quad , \quad N = N(u),$$

e precisamente esse coincidono con le funzioni indicate con gli stessi simboli alla fine del numero precedente.

6. Siamo ora in grado d'enunciare il

TEOREMA FONDAMENTALE. – *Condizione sufficiente affinchè l'integrale*

$$J[y] = \int_a^b f(x, y, y')\, dx$$

raggiunga il suo massimo assoluto [*il suo minimo assoluto*] *in* E, *in corrispondenza d'una certa funzione* $\varphi(x)$ *di* E^0, *è che, per ogni scelta di valori* u, p, p', h, k (u, h, k *tali che* $a < u < h < k < b$; p, p', h, k *funzioni di* u *a mezzo del sistema d'equazioni differenziali sopra indicate*) *per i quali la* $M(u)$ *s'annulla, questa funzione* $M(u)$ *risulti crescente* [*decrescente*] *mentre, per ogni scelta di valori per i quali la* $N(u)$ *s'annulla, questa funzione* $N(u)$ *risulti decrescente* [*crescente*].

(8) Si abbia cioè, nell'intorno del detto valore iniziale di u,

$$p'(u + \Delta u) = p' \pm \int_u^{u+\Delta u} L(x)\, dx,$$

$$p(u + \Delta u) = p + p'\Delta u \pm \int_u^{u+\Delta u} (u + \Delta u - x) L(x)\, dx$$

coi segni superiori o con quelli inferiori, a seconda che si è nel caso (6) o nel caso (7).

La dimostrazione di questo teorema si consegue provando che, nelle ipotesi fatte, l'integrale J [φ] possiede valor massimo [minimo] al variare di $\varphi(x)$ in E^0. All'uopo si comincia col considerare una generica funzione $\bar{\varphi}(x)$ di E^0 e s'indica con $E_{\bar{\varphi}}$ l'insieme formato da tutte le funzioni $\varphi(x)$ di E^0 che soddisfano alle condizioni (ved. n. 1):

$$\varphi(a) = \bar{\varphi}(a) \quad , \quad \varphi'(a) = \bar{\varphi}'(a) \quad , \quad \varphi(b) = \bar{\varphi}(b) \quad ; \quad \varphi'(b) = \bar{\varphi}'(b) \, ,$$

$$\varphi(x_i) = \bar{\varphi}(x_i) \quad , \quad \varphi'(x_i) = \bar{\varphi}'(x_i) \quad , \quad \varphi(x'_j) = \bar{\varphi}(x'_j) \quad , \quad \varphi'(x'_j) = \bar{\varphi}'(x'_j)$$

$$(i = 1, 2, \cdots, m \, ; \, j = 1, 2, \cdots, n) \, .$$

I punti x_i, x'_j, nell'ordine in cui si susseguono da sinistra a destra, suddividono $[a, b]$ in un numero finito d'intervalli parziali: sia $[c, d]$ uno generico di questi e *sia* ν *il numero dei* $[P\,D]_{\bar{\varphi}}$ *che cadono in* (c, d).

$\alpha_{0,1}$) Per $\nu = 0$ e per $\nu = 1$, $E_{\bar{\varphi}}$ si riduce, in $[c, d]$, all'unica funzione $\bar{\varphi}(x)$. Per $\nu > 1$, $E_{\bar{\varphi}}$ comprende infinite funzioni distinte da $\bar{\varphi}(x)$ in $[c, d]$.

α_2) Per $\nu = 3$, s'identifichino questi tre punti ordinatamente con u, h, k (n. 5) e si studi la variabilità dell'integrale

$$J(u) = \int_a^b f(x, \varphi, \varphi') \, dx \, ,$$

al variare con continuità [6] di φ entro $E_{\bar{\varphi}}$, pur mantenendola fissa fuori di (c, d) e imponendole la condizione che (c, d) contenga sempre tre $[P\,D]_{\varphi}$. Se, all'uopo, s'applicano i principi del numero precedente, tenendo sempre ben distinti i due casi (6), (7), si trova che, nelle ipotesi fatte e con le condizioni restrittive or ora imposte, il massimo [il minimo] di J (u) vien raggiunto in corrispondenza d'una funzione $\varphi(x)$ di $E_{\bar{\varphi}}$, per la quale è $\nu = 2$.

α_r) (r intero qualunque > 3). Ragionando per induzione, si suppone dimostrato che, per $\nu = r - 1$ e concedendo alla $\varphi(x)$ di variare in $E_{\bar{\varphi}}$ con la condizione restrittiva che i $[P\,D]_{\varphi}$ che cadono in (c, d) siano in numero $\leq r - 1$, il massimo [il minimo] di J [φ] vien raggiunto in corrispondenza d'una $\varphi(x)$ per la quale detto numero è $= 2$. Si dimostra poi che la stessa proprietà vale anche per $\nu = r$ e con ciò essa risulta valida in generale (cioè per qualunque $\nu \geq 3$).

β) A conclusione di quanto precede, si dimostra infine che J [φ] possiede massimo [minimo], al variare di $\varphi(x)$ nell'insieme E^* di quelle sole funzioni di E^0 i cui $[P\,D]_{\varphi}$, entro ciascuno degli intervalli parziali indicati con (c, d), sono in numero ≤ 2. All'uopo si fa vedere che E^* è un insieme compatto e chiuso del prim'ordine.

Osservazioni. – 1ª) La dimostrazione di cui s'è dato cenno, fornisce, in molti casi, un metodo completo per l'effettiva determinazione del massimo [del minimo] di J [y]: per esempio quando $m = n$, i punti x_i coincidono coi punti x'_j, è $a = x_1$, $b = x_m$ e sussistono le m identità

$$p_i = P_i \, , \quad p'_i = P'_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, m) \, .$$

Le funzioni di E* sono, in questo caso, in numero *finito*: perciò il massimo [il minimo] di J [φ] in E* può essere effettivamente trovato con un numero *finito* di tentativi.

2ª) Il teorema fondamentale può esser generalizzato. Si può infatti dimostrare che la stessa tesi sussiste, nell'ipotesi che l'accennata proprietà delle due funzioni M (*u*), N (*u*) si verifichi, non per scelte del tutto arbitrarie di terne u, h, k (come s'è precisato nell'enunciato), ma anche soltanto per terne sottoposte all'ulteriore condizione $k - u < \delta$ (numero prefissato piccolo a piacere).

7. Ho applicato la precedente teoria, alla ricerca delle estremanti di frontiera degli integrali del tipo

$$J[y] = \int_a^b G(y')\,dx,$$

supponendo la funzione integranda G (*y'*) dotata non soltanto di derivata prima, ma anche (quasi ovunque) di derivata seconda e che tale derivata non cambi mai di segno [9] al variare della *y'* (almeno entro i limiti consentiti dalla definizione del campo E). La funzione L (*x*) è supposta costante positiva. In queste ipotesi, secondochè G'' (*y'*) si mantiene positiva o negativa, J [*y*] raggiunge il proprio massimo o il proprio minimo assoluti in E, in corrispondenza d'una funzione φ di E°.

La stessa tesi vale anche se, esssendo L (*x*) non costante ma sempre positiva, G'' (*y'*) è continua e di segno costante ed inoltre è lipschitziana, oppure sempre decrescente se positiva, oppure sempre crescente se negativa.

Matematica (Statistica Matematica). — *Intorno alle probabilità di Karup e legame con la teoria dei capitali accumulati.* Nota di GIUSEPPE OTTAVIANI, presentata [*] dal Corrisp. F. P. CANTELLI.

1. Il Cantelli, in una sua recente Nota [1], ha trattato le questioni che riguardano il teorema di Karup quando ci si riferisca a probabilità di eliminazione in un periodo (0, *t*) che siano soltanto funzioni monotone continue della variabile *t*, e, più generalmente, ha accennato al caso in cui le probabilità considerate possano ammettere comunque delle discontinuità o che si considerino funzioni a variazione limitata, in luogo delle dette probabilità, senza peraltro intrattenersi sull'argomento e rimandando ad altri precedenti lavori, suoi e del Messina, per le possibili estensioni.

In effetti le considerazioni fatte possono essere adattate per interpretare altri fenomeni, sia basati sulla considerazione delle collettività studiate, sia di natura

(9) Pur non annullandosi identicamente in alcun intervallo di variabilità (sia pur piccolo) della *y'*.

(*) Nella seduta del 12 maggio 1949.

(1) *Sulle probabilità di Karup.* Nota pubblicata nel precedente fascicolo dei «Rendiconti dell'Accademia dei Lincei».

diversa, e relativi a un significato diverso dei simboli che figurano nelle relazioni considerate.

In questa Nota riprendo l'argomento per concretare, in tale senso, alcuni punti fondamentali, e precisamente la teoria dei capitali accumulati, nonchè il significato delle equazioni estendenti il teorema di Karup. Considerata la brevità di spazio concessa, mi limito per ora ad accennare soltanto all'impostazione dei problemi e delle dimostrazioni e ai principali risultati.

2. In questo paragrafo ci occupiamo dell'impostazione, in un caso generale, del problema dei capitali accumulati, cioè della ricerca della riserva matematica accumulata da ciascun appartenente ad una collettività, in base a determinate prestazioni.

Consideriamo una collettività di individui, soggetti a eliminarsi da essa per una causa α o per una causa β. Indichiamo con $l(t)$, $0 \leq t \leq t_0$, il numero (medio) degli individui appartenenti alla collettività all'epoca t e con $a(s,t)$, $b(s,t)$ il numero (medio) di eliminati dalla collettività rispettivamente per la causa α o per la causa β, nel periodo di tempo (s,t), con $0 \leq s < t \leq t_0$. Sarà, allora,

$$l(t) = l(s) - a(s,t) - b(s,t) \quad , \quad l(t) > 0. \tag{1}$$

Supponiamo, per maggiore generalità, che le funzioni $a(s,t)$, $b(s,t)$ siano funzioni di t a variazione limitata in (s,t_0), invece che monotone non decrescenti. Poichè una funzione a variazione limitata si può sempre scindere nella differenza di due funzioni monotone, l'ipotesi fatta equivale, nella interpretazione particolare qui considerata della (1), a supporre, per esempio, che $a(s,t)$ rappresenti la differenza tra eliminati per una causa α' ed entrati per una causa α'' nel periodo (s,t).

Nei punti di discontinuità di $a(s,t)$, $b(s,t)$, $l(t)$, assumeremo come determinazione di queste funzioni il limite a sinistra, cioè porremo, per esempio, $a(s,t) = a(s,t-)$.

Supporremo inoltre $a(s,s) = b(s,s) = 0$, pur potendo il numero $a(s,s+)$, differenza tra eliminati ed entrati per la causa α nell'istante s, essere diverso da zero.

Ciò premesso, precisiamo le prestazioni relative alla collettività considerata.

Supponiamo che gli investimenti vengano effettuati secondo una legge di capitalizzazione, scindibile o non scindibile, rappresentata dalla nota funzione $L(t,\vartheta)$, indicante il montante, all'epoca ϑ, dell'unità di capitale investita all'epoca t.

Ogni individuo paghi, durante il periodo di appartenenza alla collettività, dei premi tali che la funzione $\pi(s,t)$ ne rappresenti il valore, relativamente a un individuo e al periodo di appartenenza (s,t). La funzione $\pi(s,t)$ è non decrescente rispetto a t; assumiamo come determinazione in un punto di salto il limite a sinistra.

Se un individuo si elimina all'epoca t dalla collettività per la causa α, abbia diritto a una quota $A(t)$ della riserva matematica accumulata all'epoca t; indichiamo con $R(t,\vartheta)$ il valore di questa riserva, riferito finanziariamente all'epoca ϑ.

Notiamo che in un punto di discontinuità di $a(0,t)$ la quota $A(t)$ di riserva, se maggiore di 1, deve essere tale che $A(t)\cdot R(t,\vartheta)\cdot da(0,t) < l(t)\cdot R(t,\vartheta)$.

Se un individuo si elimina all'epoca t dalla collettività per la causa β, abbia diritto sia a una quota $B(t)$ della riserva matematica accumulata all'epoca t, sia a una somma $U(t)$ da prelevare, secondo quote fissate, dai premi pagati in precedenza; indichiamone con $U(t,\vartheta)$ il valore, riferito finanziariamente all'epoca ϑ.

L'equazione cui deve soddisfare $R(t,\vartheta)$ è allora la seguente:

$$(2)\qquad l(t)\cdot R(t,\vartheta) = \int_0^t l(s)\,L(s,\vartheta)\cdot d\pi(0,s) -$$

$$-\int_0^t R(s,\vartheta)\,[A(s)\,da(0,s) + B(s)\,db(0,s)] - \int_0^t U(s,\vartheta)\,db(0,s),$$

di evidente significato demografico-finanziario, in quanto il secondo membro rappresenta la differenza tra i montanti, all'epoca ϑ, dei premi complessivamente incassati e delle somme pagate per eliminazioni dovute alle cause α e β, nel periodo $(0,t)$; e ne è evidente il significato pure nel caso di cause negative di eliminazione (cause di ingresso).

La compatibilità delle operazioni finanziarie previste in relazione al movimento della collettività, legata all'esistenza degli integrali che figurano nella (2), necessita di alcune precisazioni.

Infatti, se, per esempio, le due funzioni $A(s)\cdot R(s,\vartheta)$ e $a(0,s)$ sono entrambe discontinue (di 1ª specie) in un medesimo punto s, ciò che può accadere in ogni punto di discontinuità di $a(0,s)$, il dire solamente che ad ogni eliminato per la causa α all'istante s debba essere corrisposta la somma $A(s)\cdot R(s,\vartheta)$ non ha significato, a causa della discontinuità; ciò è legato al fatto che la definizione usuale dell'integrale di Stieltjes $\int_a^b f(s)\cdot d\varphi(s)$ (φ, funzione a variazione limitata), come limite unico e finito, per $\max(s_{i+1}-s_i)\to 0$, della sommatoria $\sum_1^n f(\xi_i)\cdot[\varphi(s_{i+1})-\varphi(s_i)]$, relativa a una divisione di (a,b) in parti mediante i punti di divisione $a = s_1 < s_2 < \cdots < s_{n+1} = b$, e in cui ξ_i è un punto qualsiasi dell'intervallo (s_i, s_{i+1}), non è applicabile se le funzioni sono ambedue discontinue in un medesimo punto.

Pertanto, per avere una maggiore generalità e per non limitarsi al caso continuo, occorre precisare il comportamento dei pagamenti e corrispondentemente la definizione degli integrali che figurano nella (2):

ove la riserva $R(s,\vartheta)$ abbia un salto, consideriamo come determinazione nel punto di salto il limite a sinistra, in altre parole supponiamo che ogni eliminato per la causa α all'epoca s riceva la quota $A(s)$ della riserva $R(s,\vartheta)$ accumulata un istante prima dell'eliminazione.

Inoltre, definendo l'integrale come limite delle note sommatorie relative a divisioni sempre più fini dell'intervallo $(0,t)$, supponiamo che alcune delle parti

possano ridursi a un solo punto e che ciascuno dei punti di discontinuità della funzione a variazione limitata, rispetto alla quale si integra, costituisca, da una certa divisione in poi, una delle parti delle divisioni considerate.

In tal modo, per la esistenza degli integrali della (2) e per la validità di quanto diremo, è sufficiente supporre che le funzioni $L(s, \vartheta)$, $A(s)$, $U(s, \vartheta)$ siano limitate, con al più una infinità numerabile di punti di discontinuità.

Osserviamo che questa equazione, già trattata nel 1938 dal Cantelli nel caso di funzioni derivabili, considera le probabilità *dipendenti* di eliminazione per la causa α e per la causa β. Essa si può generalizzare, considerando più di due cause di eliminazione (o ingresso) e altre prestazioni. Essa generalizza inoltre quella considerata dal Cantelli nella Nota citata [1] e relativa alle ipotesi semplificatrici di un unico versamento effettuato all'epoca s, di un tasso d'interesse nullo e di prestazioni nulle agli eliminati per l'una o l'altra causa.

3. Occupiamoci ora della soluzione dell'equazione (2) dei capitali accumulati.

Essa è una equazione integrale apparente, in quanto può essere risoluta dividendo l'intervallo $(0, t_0)$ in parti, considerando le eguaglianze ottenute dalla sottrazione membro a membro delle (2) relative a due punti successivi di divisione e trasformando queste opportunamente, con riferimento a una divisione arbitrariamente fina dell'intervallo $(0, t_0)$.

Si perviene in tal modo a dimostrare che, nelle ipotesi fatte, l'equazione (2), nel campo delle funzioni $R(t, \vartheta)$ a variazione limitata rispetto a t, ha soluzione, unica, data da

$$(3) \qquad R(t, \vartheta) = \int_0^t \frac{\lambda(s)}{\lambda(t)} \cdot \left[L(s, \vartheta)\, d\pi(0, s) - U(s, \vartheta) \cdot \frac{db(0, s)}{l(s)} \right]$$

dove il simbolo $\lambda(t)$ indica la funzione definita come segue:

Indichiamo con

$$(4) \qquad \varphi(0, t) = \prod_0^t{}^{*} \left[1 - A(u) \cdot \frac{da(0, u)}{l(u)} - B(u) \frac{db(0, u)}{l(u)} \right]$$

il limite, in senso analogo a quello sopra precisato per il significato di integrale di Stieltjes, del prodotto

$$(5) \qquad \prod_{i=1}^{n} \left[1 - A(u_i) \frac{a(0, u_{i+1}) - a(0, u_i)}{l(u_i)} - B(u_i) \cdot \frac{b(0, u_{i+1}) - b(0, u_i)}{l(u_i)} \right]$$

relativo a una divisione di $(0, t)$ in parti, mediante i punti di divisione $0 = u_1 < u_2 < \cdots < u_{n+1} = t$, limite che, nelle ipotesi fatte, si dimostra esistente e indipendente dalla legge di divisione di $(0, t)$ in parti.

Scomponiamo ciascuna delle due funzioni $a(0, u)$, $b(0, u)$ nella somma di una funzione continua e della funzione dei salti,

$$a(0, u) = a_1(0, u) + a_2(0, u) \quad ; \quad b(0, u) = b_1(0, u) + b_2(0, u)$$

e ordiniamo in successione le ascisse dei salti, siano esse $u_1', u_2', \cdots$ per la funzione $a(0, u)$ e $u_1'', u_2'', \cdots$ per la funzione $b(0, u)$. Allora la funzione (4) può

essere scritta nella forma (equivalente, tenuto presente il diverso simbolismo qui usato, alle formule fornite dal Cantelli nel caso particolare considerato nel lavoro citato [1])

$$(6) \qquad \varphi(0,t) = e^{-\int_0^t A(u)\frac{da_1(0,u)}{l(u)}} \cdot e^{-\int_0^t B(u)\frac{db_1(0,u)}{l(u)}} \cdot$$

$$\cdot \prod_{t^{(i)}<t} \left[1 - A(t^{(i)})\frac{da_2(0,t^{(i)})}{l(t^{(i)})} - B(t^{(i)})\frac{db_2(0,t^{(i)})}{l(t^{(i)})}\right]$$

dove il secondo fattore, evidentemente equivalente al corrispondente simbolo $\prod^*$, relativo ai punti di salto, e ciò anche per i casi seguenti, rappresenta il prodotto di un numero finito o di una infinità numerabile di fattori, relativi a quelle ascisse, della successione $u_1', u_2', \cdots$ e della successione $u_1'', u_2'', \cdots$ dei punti di salto, inferiori a t, ascisse ordinate nella successione $t^{(1)}, t^{(2)}, \cdots$ e in cui $da_2(0,t^{(i)})$ e $db_2(0,t^{(i)})$ rappresentano il valore del salto; notiamo che in un punto di salto si ha $da_2(0,t) = da(0,t)$, e analogamente per $b(0,t)$.

Ciò premesso, la funzione $\lambda(t)$ è data dall'espressione

$$(7) \qquad \lambda(t) = \frac{l(t)}{\varphi(0,t)} \cdot$$

Essa rappresenta la nota *legge di mutualità*, la cui conoscenza permette la rapida determinazione della riserva matematica.

Nel caso che i punti di discontinuità u_i' della funzione $a(0,u)$ e i punti di discontinuità u_i'' della funzione $b(0,u)$ siano distinti, la (6) può essere scritta nella forma

$$(6') \qquad \varphi(0,t) = \left\{ e^{-\int_0^t A(u)\frac{da_1(0,u)}{l(u)}} \cdot \prod_{u_i'<t} \left[1 - A(u_i')\frac{da(0,u_i')}{l(u_i')}\right] \right\} \cdot$$

$$\cdot \left\{ e^{-\int_0^t B(u)\frac{db_1(0,u)}{l(u)}} \cdot \prod_{u_i''<t} \left[1 - B(u_i'')\frac{db(0,u_i'')}{l(u_i'')}\right] \right\} \cdot$$

Teniamo ora presente quanto ha mostrato il Cantelli nel lavoro citato [1] e precisamente che, nelle ipotesi fatte, e supponendo che i punti di discontinuità delle funzioni $a(0,u)$, $b(0,u)$ siano distinti, la (1) si trasforma nella relazione

$$(8) \qquad l(t) = l(0)\,\alpha(0,t)\cdot\beta(0,t)$$

in cui si è posto, secondo le notazioni qui usate,

$$(9) \qquad \alpha(0,t) = \prod_0^{t*}\left[1 - \frac{da(0,u)}{l(u)}\right] = e^{-\int_0^t \frac{da_1(0,u)}{l(u)}} \cdot \prod_{u_i'<t}\left[1 - \frac{da(0,u_i')}{l(u_i')}\right]$$

e analogamente per $\beta(0, t)$. Allora la legge di mutualità $\lambda(t)$ si può scrivere nella forma

$$(10)\quad \lambda(t) = l(0) \cdot \left\{ e^{-\int_0^t [1 - A(u)] \frac{da_1(0,u)}{l(u)}} \cdot \prod_{u_i' < t} \left[1 - [1 - A(u_i')] \frac{da(0, u_i')}{l(u_i') - A(u_i')\, da(0, u_i')} \right] \right\} \cdot$$

$$\cdot \left\{ e^{-\int_0^t [1 - B(u)] \frac{db_1(0,u)}{l(u)}} \cdot \prod_{u_i'' < t} \left[1 - [1 - B(u_i'')] \frac{db(0, u_i'')}{l(u_i'') - B(u_i'')\, db(0, u_i'')} \right] \right\},$$

che estende, al caso qui considerato della legge di mutualità, la relazione (12) fornita dal Cantelli nel lavoro citato [1].

La (3), ponendo $\vartheta = t$, fornisce la riserva $R(t, t)$, accumulata all'epoca t e riferita finanziariamente alla medesima epoca; l'unicità della soluzione ottenuta dipende dall'impostazione del problema mediante l'equazione (2) ove $t < \vartheta$, che risponde alla nota condizione di indifferenza dell'equilibrio finanziario. Nei riguardi dell'equazione (2) ove $t = \vartheta$ si possono ripetere considerazioni già note.

4. Osserviamo che, nel caso generale considerato di cause di eliminazione o ingresso, cioè di funzioni a variazione limitata, i valori $\alpha(0, t)$ e $\beta(0, t)$ non si possono interpretare più come probabilità, ma solo come valori medi; per esempio il prodotto

$$l(s) \cdot [1 - \alpha(s, t)]$$

rappresenta il numero medio della differenza tra eliminati ed entrati per la causa α nel periodo (s, t), su $l(s)$ individui che si suppongono soggetti nel detto periodo alla sola causa α, in quanto cioè non si considerino in (s, t) gli eventuali nuovi ingressi per β, e si sostituisca, nella collettività, chiunque si elimini per la causa β con un nuovo individuo.

Se il fenomeno è continuo, il numero medio (9) è espresso dal primo fattore del 3° membro, in quanto il secondo fattore è uguale a 1 per la mancanza di punti di discontinuità.

Il teorema espresso dalla (8), nel caso generale viene ad assumere il seguente enunciato: nella collettività considerata, il numero medio $l(t)/l(s)$ degli individui appartenenti alla collettività all'epoca t, riferito a un individuo appartenente alla collettività all'epoca s, è uguale al prodotto dei due numeri medi $\alpha(s, t)$, $\beta(s, t)$, « indipendenti » nel senso indicato.

Notiamo, infine, che se le funzioni di t, $a(s, t)$, $b(s, t)$, hanno un medesimo punto t di discontinuità, l'espressione (9) per la causa α e la analoga per la causa β non forniscono le probabilità pure, e il loro prodotto non fornisce il valore $l(t)/l(s)$.

In altre parole, il fatto di conoscere solo le funzioni che figurano nella (1) e quindi di sapere che all'istante t si eliminano contemporaneamente $a(t, t+)$ e $b(t, t+)$ individui, rispettivamente per le cause α o β, non permette di determinare quanti individui si eliminerebbero all'istante t per la causa α se non agisse la causa β e viceversa.

Pur tuttavia si possono supporre noti tali numeri e quindi esistenti le probabilità indipendenti, o, nel caso di funzioni a variazione limitata, i numeri medi indipendenti di appartenenti, se pur non dati più, per i punti di discontinuità a comune, dalla (9). Questo fatto non riguarda però il problema dei capitali accumulati, la cui soluzione, in base alle ipotesi fatte, è sempre fornita dalla (3), in cui si tenga presente la (7).

Non ci intratteniamo, per brevità di spazio, sul significato che vengono ad assumere nel caso generale l'equazione integrale

$$\int_s^t [1 - A(u)]\, da(o, u) = l(s) \cdot \bar{\alpha}(s, t) - \int_s^t \bar{\alpha}(u, t) \cdot [1 - B(u)]\, db(o, u)$$

nella incognita $\bar{\alpha}(s,t)$, la cui soluzione è fornita dal primo fattore del secondo membro della (10), riferito al periodo (s, t), o l'analoga equazione relativa al secondo fattore.

Matematica. — *Sul sistema aggiunto ad una curva riducibile.* Nota di ALFREDO FRANCHETTA, presentata (*) dal Socio F. SEVERI.

Sia F una superficie algebrica, di genere aritmetico p_a; se C è una curva di genere virtuale p appartenente ad F, il sistema lineare $|C'|$ aggiunto a C ha dimensione

$$r \geq p_a + p - 1. \tag{1}$$

E. Picard ha dimostrato nel 1905 (per via trascendente « detournée ») che $|C'|$ è regolare, cioè che nella (1) vale il segno di uguaglianza, se C è sezione piana di un modello proiettivo di F, dotato di singolarità ordinarie. In una Nota lincea del 1908 F. Severi ha notevolmente esteso il teorema di Picard, dimostrando che $|C'|$ è regolare se C è irriducibile ed è curva totale di un sistema algebrico ∞^1, diverso da un fascio irrazionale. Recentemente il Severi ha dato una nuova dimostrazione (trascendente) del suo teorema (1), con la quale esso è reso indipendente dal teorema della completezza della serie caratteristica, che veniva utilizzato nella dimostrazione del 1908; e, in una Nota successiva (2), ha esteso ulteriormente il risultato precedente, dimostrando che $|C'|$ è regolare anche quando C è riducibile se: *a*) la curva formata dalle componenti irriducibili di C, prese semplicemente, è connessa; *b*) le eventuali componenti multiple hanno grado virtuale positivo; *c*) una almeno delle componenti irriducibili di C è curva totale di un sistema algebrico ∞^1, diverso da un fascio irrazionale.

In questa Nota dimostro che le ipotesi *a*) e *b*) dell'ultimo enunciato di Severi possono essere sostituite dall'ipotesi, meno restrittiva, della *connessione*

(*) Nella seduta dell'8 giugno 1949.

(1) F. SEVERI, *Intorno ai sistemi continui di curve sopra una superficie algebrica.* « Comm. Math. Helvetici » (1943).

(2) *Teoremi di regolarità sopra una superficie algebrica.* « Rend. di Mat. di Roma » (1947). Cfr. anche F. SEVERI, *La teoria generale dei sistemi continui di curve sopra una superficie algebrica.* « Mem. dell'Acc. d'Italia » (1941).

virtuale (3) della curva C; dall'ipotesi, cioè, che due parti complementari qualunque di C (anche coincidenti) abbiamo un numero positivo di intersezioni virtuali. Si può così affermare che $|C'|$ *è regolare se* C *è virtualmente connessa e se una componente irriducibile di* C *è curva totale di un sistema algebrico* ∞^1, *diverso da un fascio irrazionale.* La dimostrazione del teorema si ottiene adattando alla nuova ipotesi il processo seguìto da Severi nell'ultima Nota citata.

1. Sia

$$C = h_1\theta_1 + \cdots + h_e\theta_e$$

una curva di F, composta con le curve irriducibili $\theta_1, \cdots, \theta_e$, contate con le molteplicità $h_1, \cdots, h_e$. Dimostriamo anzitutto che: *se il sistema* $|C'|$ *è regolare, ed* L *è una curva irriducibile di* F, *avente un numero positivo di intersezioni virtuali con* C, *il sistema aggiunto a* $C + L$ *è regolare.*

Indichiamo con p il genere virtuale di C; con π il genere virtuale di L, con $s = [C, L] > 0$ il numero delle intersezioni virtuali di C ed L. Per ipotesi, la dimensione di $|C'|$ è

$$r = p_a + p - 1 \tag{1}$$

mentre la dimensione del sistema $|(C + L)'|$ è

$$R = p_a + P - 1 + \varepsilon \tag{2}$$

con $\varepsilon \geqq 0$ e

$$P = p + \pi + s - 1 . \tag{3}$$

Vogliamo dimostrare che $\varepsilon = 0$. Se la L non è parte fissa di $|(C + L)'|$ la serie lineare segata dalle curve di questo sistema su L è non speciale, poichè

$$[(C + L)', L] = [C + L', L] = [C, L] + [L', L] = 2\pi - 2 + s > 2\pi - 2.$$

Pertanto la dimensione della serie è

$$\pi - 2 + s - \eta$$

con $\eta \geqq 0$; il numero delle condizioni che bisogna imporre alle curve di $|(C + L)'|$ per staccare da esse la curva L è $\pi - 1 + s - \eta$. Ne segue che la dimensione del sistema residuo vale $R - (\pi - 1 + s - \eta)$; ma il sistema residuo è C', quindi

$$r = R - (\pi - 1 + s - \eta) .$$

Di qui si deduce, tenendo conto delle (1), (2), (3), che $\varepsilon + \eta = 0$ e quindi che $\varepsilon = 0$.

L'argomentazione precedente cade se L è parte fissa di $|(C + L)'|$. Per dimostrare che la proprietà enunciata è vera anche in questa ipotesi, conviene distinguere due casi:

a) L è parte fissa di $|(C + L)'|$, ma non di $|C'|$. Allora

$$|(C + L)'| = |L + C'| = L + |C'| ;$$

sicchè

$$r = R.$$

(3) Cfr. A. Franchetta, *Sulla caratterizzazione delle curve eccezionali riducibili di prima specie.* « Boll. dell' U. M. I. » (1941).

Per le (1), (2), (3), quest'uguaglianza è possibile solo se

$$\pi = 0 \quad , \quad s = 1 \quad , \quad \varepsilon = \eta = 0$$

b) L è parte fissa non solo per $|(C + L)'|$, ma anche per $|C'|$. Indichiamo con k la molteplicità con cui L fa parte di C′ e con h la molteplicità con cui fa parte di $|(C + L)'|$. Per ipotesi $h > 0$, $k > 0$. Poniamo

$$|C'| = kL + |\Gamma| \quad , \quad |(C + L)'| = hL + |\Gamma| . \tag{4}$$

I sistemi $|\Gamma|$ e $|\Gamma|$ non hanno come parte fissa L. Dalla relazione

$$|(C + L)'| = |L + C'|$$

segue intanto che

$$h \leq k + 1 .$$

Dimostriamo che non può essere $h < k + 1$. Dalla (4) si ha infatti

$$|\Gamma| = |(k + 1 - h)L + \Gamma|$$

sicchè il sistema $|\Gamma|$ si amplierebbe sommandogli la curva L con molteplicità $k + 1 - h \leq k$; ciò contraddice alla prima delle (4).

Dev'essere dunque

$$h = k + 1 .$$

Ma allora

$$r = R$$

e si conclude come in *a*).

2. Ciò posto, dimostriamo il seguente lemma: *se una parte* $\bar{C}$ *di una curva* C *virtualmente connessa ha il sistema aggiunto regolare, anche la curva* C *ha il sistema aggiunto regolare.*

Sia $C = h_1\theta_1 + \cdots + h_e\theta_e$ la curva data; per la connessione virtuale di C, si ha

$$[\bar{C}, C - \bar{C}] > 0 ;$$

quindi $\bar{C}$ ha un numero positivo di intersezioni virtuali con una almeno delle curve irriducibili $\theta_1, \cdots, \theta_e$; sia θ_{i_1} una di esse; per la proprietà dimostrata nel n. 1, la curva

$$C_1 = \bar{C} + \theta_{i_1}$$

che è parte di C, ha sistema aggiunto regolare. Se $C_1 = C$, il lemma è già dimostrato; se C_1 non esaurisce C, si ha, per la connessione virtuale di C,

$$[C_1, C - C_1] > 0$$

e quindi esiste una θ_{i_2}, eventualmente coincidente con θ_{i_1}, tale che

$$[C_1, \theta_{i_2}] > 0 ;$$

la curva

$$C_2 = C_1 + \theta_{i_2} = \bar{C} + \theta_{i_1} + \theta_{i_2}$$

ha aggiunto regolare; ecc.

Dal teorema di Severi e dal lemma precedente segue senz'altro il teorema enunciato nell'introduzione.

Matematica. — *Sulla generazione di una trasformazione finita assegnata su una curva chiusa mediante una trasformazione infinitesima.* Nota di ARRIGO FINZI, presentata (*) dal Socio U. AMALDI.

1. Sia C una curva chiusa di lunghezza 1 e sia x la variabile che descrive i punti della curva: si suppone che ai due valori x e $x+1$ della variabile corrisponda sempre lo stesso punto geometrico su C. Sia poi

$$x_1 = g(x) \tag{1}$$

l'equazione di una trasformazione finita continua T dei punti di C, priva di punti fissi e dotata di una inversa. Poniamo

$$x_2 = g(g(x)) \quad , \quad x_3 = g(g(g(x))); \cdots$$

I punti $x_1, x_2, x_3 \cdots$ si chiameranno il *primo, secondo, terzo* $\cdots$ *conseguente* di x.

Si vuol sapere se esiste una trasformazione infinitesima

$$Xf = \xi(x)\frac{df}{dx} \tag{2}$$

tale che T faccia parte del gruppo ad un parametro generato da Xf.

Mi ero già occupato della questione in una precedente Nota Lincea (1), svolgendo in proposito alcune prime elementari considerazioni; più recentemente, in due Note apparse nei « Comptes Rendus » (2) dell'Accademia di Scienze di Parigi, ho potuto assegnare due soluzioni del problema, fondate su metodi diversi. Mi propongo qui di esporre, con alcuni complementi, i risultati ottenuti, ed indicare la ragione comune del successo dei due metodi. Darò inoltre un cenno della bella teoria delle trasformazioni di una curva, dovuta a Poincaré e a Denjoy, che risulta del resto strettamente connessa con le attuali ricerche e accennerò ad alcune interessanti questioni, che in questo campo resterebbero da risolvere.

2. Si può indicare facilmente una condizione necessaria per la risolubilità del problema:

Supponiamo che una potenza T^n *della trasformazione assegnata lasci fisso un punto* P *di* C; T^n *deve allora lasciare fisso anche ogni altro punto di* C.

E infatti sia T′ una trasformazione generica del gruppo g_1 al quale appartiene T e sia P′ il trasformato di P mediante T′. Le trasformazioni successive T'^{-1}, T^n, T′ porteranno successivamente P′ in P, lo lasceranno in P e lo ripor-

(*) Nella seduta dell'8 giugno 1949.

(1) *Su una questione posta da S. Lie*, ser. VIII, vol. III, p. 185 (1947).

(2) « Comptes Rendus », 228, p. 535 e p. 631 (1949).

teranno infine alla sua posizione originaria. D'altra parte T^n e T' sono permutabili; si ha dunque

$$T' T^n T'^{-1} = T^n ;$$

si conclude che T^n lascia fisso P', c. d. d.

Si possono distinguere le trasformazioni senza punti fissi della curva C in tre tipi:

1. Esiste una potenza T^n, che lascia fissi tutti i punti di C. T è ciclica.
2. Esiste una potenza T^n, che lascia fissi solo alcuni dei punti di C.
3. Non ci sono punti di C fissi per una qualsiasi potenza di T.

Le trasformazioni 1 e 3 saranno dette *regolari*; le trasformazioni 2, per le quali la condizione necessaria assegnata non è soddisfatta, saranno dette *irregolari*.

Nello studio delle trasformazioni di una curva è di fondamentale importanza la considerazione di un'invariante, il *modulo*, implicitamente introdotto già da Poincaré: immaginiamo la trasformazione T come prodotta da un movimento continuo, che porta un punto qualsiasi P nel suo trasformato; consideriamo allora il numero m dei giri completi di C che P compie per andare nel suo trasformato per una potenza T^n di T e il rapporto $\frac{m}{n}$. Si definisce il modulo come il limite k di questo rapporto quando n tende all'infinito. Si dimostra che tale limite esiste sempre e non dipende dal punto P. Le trasformazioni 1 e 2 hanno modulo razionale; le trasformazioni 3 hanno modulo irrazionale.

Già si sa che le trasformazioni 2 non possono essere generate mediante una trasformazione infinitesima; al contrario si può facilmente dimostrare che *una trasformazione* 1 *ammette un'infinità continua di trasformazioni infinitesime generatrici, sotto la sola ipotesi che la funzione* $g(x)$ *ammetta la derivata prima continua.*

Si può in terzo luogo facilmente dimostrare che *se una trasformazione* 3 *può essere generata con una trasformazione infinitesima, questa risulta univocamente determinata.*

3. Interrompiamo ora lo studio del problema attuale concernente le trasformazioni 3 per esporre rapidamente i risultati più salienti della teoria di Poincaré (3) e Denjoy (4).

Consideriamo un punto x della curva C e la successione $x_1, x_2, x_3 \cdots$ dei suoi conseguenti. Se la trasformazione T è del tipo 3, ciò che noi supponiamo, questi punti costituiscono un insieme infinito. Sia I l'insieme derivato: *a priori* si può supporre che tale insieme comprenda tutta la curva C, oppure che si riduca a un sottoinsieme dell'insieme di tutti i punti di C.

La prima ipotesi è evidentemente realizzabile. Supponiamo ora invece che I non comprenda tutti i punti di C; Poincaré ha dimostrato che *in tal caso*

(3) H. POINCARÉ, *Sur les courbes définies par les équations différentielles. Oeuvres complètes*, t. 1, pp. 137–158.

(4) A. DENJOY, *Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore.* « Journal de Math. pures et appliquées », t. 11, p. 333 (1932).

l'insieme I *è perfetto e discontinuo e che non dipende dal punto* x, *di cui si considerano i conseguenti.*

Denjoy ha fatto vedere come si possa realizzare, nel modo più generale, questa seconda ipotesi e ha dimostrato d'altro lato che *tale ipotesi resta esclusa quando la funzione* $g(x)$, *che caratterizza* T, *possegga la derivata prima a variazione limitata.*

Nel seguito si supporrà sempre che la funzione $g(x)$ possegga la derivata seconda soddisfacente alla condizione di Lipschitz, onde saremo assicurati che la prima ipotesi risulta realizzata. Si potrà allora in particolare trovare una successione di potenze

$$T^{n_1}, T^{n_2}, T^{n_3}, \cdots, T^{n_\alpha} \cdots$$

di T tali che i conseguenti n_1–esimo , n_2–esimo , n_3–esimo $\cdots$ di un punto x qualsiasi si avvicinino quanto si vuole al punto x stesso. Se allora rappresentiamo le trasformazioni (geometriche) T^{n_α} mediante l'equazione

$$x_{n_\alpha} = x + \gamma_\alpha(x)$$

la successione delle funzioni $\gamma_\alpha(x)$ tende a zero. L'ipotesi che T sia generata dalla trasformazione infinitesima (2) implica, in più, che le funzioni $\gamma_\alpha(x)$ tendono verso una funzione continua e positiva $\xi(x)$, a meno di un fattore moltiplicativo infinitesimo.

4. Rappresentiamo con

$$\frac{m_\alpha}{n_\alpha} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_{\alpha-1}}}}$$

la α-esima ridotta dello sviluppo del modulo k di T, del tipo 3, in frazione continua illimitata.

Si può dare una prima soluzione del problema posto all'inizio della Nota mediante il seguente teorema A: *Esiste sempre una trasformazione infinitesima che genera la trasformazione* T, *se la funzione* $g(x)$ *possiede la derivata seconda soddisfacente alla condizione di Lipschitz e se si può scegliere un esponente positivo* $\lambda < 1$ *per cui*

$$\lim_{\alpha \to \infty} \frac{a_\alpha}{n_\alpha^{\lambda}} = 0. \tag{3}$$

La dimostrazione del teorema è fondata sul principio di iterazione. La condizione (3) concernente il modulo è verosimilmente la meno restrittiva possibile [5]. In ogni modo, se non si fa nessuna ipotesi sul modo nel quale possono crescere gli interi a_α, non si può affermare *a priori* l'esistenza di una trasformazione infinitesima, che genera T: *si possono effettivamente costruire delle trasformazioni* 3,

(5) Si dimostra che i numeri irrazionali, compresi fra zero e uno, che non soddisfano alla (3), costituiscono un insieme di misura nulla.

rappresentate da funzioni che ammettono le derivate di ordine comunque elevato e che non sono tuttavia generate da alcuna trasformazione infinitesima. Del resto per tali valori del modulo se anche la trasformazione assegnata T ammette una trasformazione infinitesima generatrice non sembra possibile di vederlo con un procedimento finito e generale.

Una questione che vorrei segnalare è la seguente: Si dia una trasformazione infinitesima $Xf = \xi(x)\frac{df}{dx}$; si supponga che la funzione $\xi(x)$ non possegga la derivata prima; se T è una trasformazione del gruppo g_1 generato da Xf, la funzione $g(x)$, che caratterizza T possiederà la derivata prima, ma non possiederà *in generale* la derivata seconda. Nel caso del teorema A si parte invece da una funzione $g(x)$ che possiede la derivata seconda lipschitziana e si perviene a una funzione $\xi(x)$, per la quale non si è dimostrata l'esistenza della derivata prima.

Non saprei dire se tale derivata esista in realtà, come potrebbe indurre a pensare l'osservazione fatta.

Ci si può chiedere se la condizione che la funzione $g(x)$ possegga la derivata seconda soddisfacente alla condizione di Lipschitz è necessaria per la validità del teorema A: sembra in realtà assai difficile dimostrare il teorema sotto una condizione meno restrittiva e di fatto vedremo al paragrafo seguente, che la stessa ipotesi si introduce anche nella seconda trattazione del problema.

5. *Sia ora*

$$x_1 = g(x, \theta) \tag{4}$$

l'equazione di una famiglia ∞^1 *di trasformazioni regolari* $T(\theta)$, *dipendenti dal parametro* θ. *Si suppone che la funzione* $g(x, \theta)$ *possegga le derivate* $\frac{\partial g(x,\theta)}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 g(x,\theta)}{\partial x^2}$, $\frac{\partial g(x,\theta)}{\partial \theta}$, $\frac{\partial^2 g(x,\theta)}{\partial x \partial \theta}$, *e che queste derivate soddisfino alle condizioni di Lipschitz rapporto a* x *e a* θ. *Inoltre si suppone che il rapporto incrementale della funzione* $k(\theta)$, *che rappresenta il modulo delle trasformazioni della famiglia, sia maggiore di una quantità positiva assegnata. Esiste allora una famiglia di trasformazioni infinitesime*

$$\xi(x, \theta)\frac{df}{dx} \tag{5}$$

tale che si ottiene la famiglia di trasformazioni finite $T(\theta)$ *considerando gli* ∞^1 *gruppi a un parametro generati dalle* (5) *e prendendo in ogni gruppo le trasformazioni di parametro* $t = 1$.

Cerchiamo di dare un'idea della dimostrazione, assai complessa, di questo teorema. Sia $\bar{k}$ un valore irrazionale del modulo e sia $\bar{\theta}$ il valore del parametro tale che $\bar{k} = k(\bar{\theta})$. Siano poi $k_1, k_2, k_3 \cdots k_\alpha \cdots$ le successive ridotte dello sviluppo di k in frazione continua e $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \cdots \theta_\alpha \cdots$ i valori corrispondenti del parametro.

Consideriamo la trasformazione del tipo 1, appartenente alla famiglia (4),

$$x_1 = g(x, \theta_\alpha);$$

fra le infinite trasformazioni infinitesime che la generano (§ 2), è possibile determinarne una

$$\xi(x \mid \theta_\alpha) \frac{df}{dx}$$

mediante un procedimento generale. Si dimostra poi (ed è questo il punto più difficile) che la successione delle funzioni ottenute in tal guisa

$$\xi(x \mid \theta_1), \xi(x \mid \theta_2), \xi(x \mid \theta_3) \cdots \xi(x \mid \theta_\alpha) \cdots$$

converge verso una funzione continua e positiva $\xi(x \mid \bar{\theta})$. Si riconosce allora che la trasformazione infinitesima

$$\xi(x \mid \bar{\theta}) \frac{df}{dx}$$

genera la trasformazione della famiglia (4) di parametro θ. Riguardando poi θ come variabile e dimostrando che la funzione $\xi(x, \theta)$ ottenuta in tal guisa è continua rapporto a θ, si trova la famiglia (5) di trasformazioni infinitesime.

La funzione $\xi(x, \theta)$ così costruita è derivabile rapporto a x per ogni valore di θ, che corrisponda a un valore razionale del modulo della famiglia (4). Tale derivabilità ha luogo anche per ogni altro valore di θ? Analogamente, $k(\theta)$ è derivabile per ogni valore di θ, che corrisponda a un valore razionale del modulo. È essa derivabile anche per ogni altro valore di θ? [6]. Sarebbe sopratutto utile rispondere *a priori* a tale questione senza basarsi sul teorema dimostrato in questo paragrafo e senza utilizzare l'ipotesi concernente il rapporto incrementale di $k(\theta)$.

6. Il teorema del paragrafo precedente ci offre un'altra soluzione del problema posto al paragrafo 1: *Una trasformazione* T *è generabile mediante una trasformazione infinitesima quando appartiene a una famiglia* (4) *di trasformazioni regolari, soddisfacente alle condizioni enunciate.* Si noti che in questo secondo enunciato non si pone più alcuna condizione aritmetica per il modulo della trasformazione T.

Si potrebbe forse, del resto, ricavare nuovamente il teorema A dimostrando che ogni trasformazione caratterizzata da una funzione $g(x)$ dotata di derivata seconda lipschitziana e il cui modulo soddisfi alla condizione (3) fa sempre parte di una famiglia (4) di trasformazioni regolari.

Una tale dimostrazione non darebbe in sè nulla di nuovo, ma potrebbe indicare una via per arrivare a rispondere alla questione seguente: Che cosa si può dire in più della funzione $\xi(x)$ quando si supponga che $g(x)$ possegga derivate di ordine superiore al secondo? Mentre infatti appare difficile rispondere a tale questione basandoci sui metodi impiegati per dimostrare il teorema A, sembra più agevole di stabilire le ulteriori proprietà della funzione $\xi(x, \theta)$ quando la funzione $g(x, 0)$ soddisfaccia a ulteriori condizioni di derivabilità.

Sono in particolare pervenuto a generalizzare convenientemente un lemma, che è alla base della dimostrazione del teorema del paragrafo precedente.

(6) Sostanzialmente tale questione è già stata posta da Poincaré.

7. Vogliamo ora indicare qual'è essenzialmente la difficoltà che si incontra nello studio della generazione delle trasformazioni finite per trasformazioni infinitesime e porre in luce la ragione comune del successo dei due metodi seguìti.

Sia T una trasformazione regolare di equazione (1) e di modulo razionale; siano g_1', e g_1'' due gruppi ad un parametro, generati da due trasformazioni infinitesime distinte $X'f$ e $X''f$, che dànno entrambi la T quando si ponga $t = 1$.

Scegliamo, rispettivamente in g_1' e in g_1'', due trasformazioni di modulo irrazionale, T' e T'', corrispondenti a due valori del parametro assai prossimi a 1; T' e T'' saranno caratterizzate da due funzioni $g'(x)$ e $g''(x)$ assai prossime a $g(x)$ e dunque assai prossime tra loro; d'altra parte a T' e T'' corrispondono univocamente le due trasformazioni infinitesime distinte $X'f$ e $X''f$.

Se si ammette poi l'esistenza delle derivate fino a un certo ordine p comunque elevato per la funzione $g(x)$ e fino all'ordine $p - 1$ per le funzioni $\xi'(x)$ e $\xi''(x)$, che caratterizzano $X'f$ e $X''f$, ne consegue che $g'(x)$ e $g''(x)$ sono prossime fra loro di ordine p nel senso del calcolo funzionale. Risulta dunque che nel problema di costruire la funzione $\xi(x)$ a partire dalla funzione $g(x)$ non vi è continuità di ordine finito.

Abbiamo precedentemente assegnato due soluzioni distinte del problema; le difficoltà inerenti alla circostanza accennata si vincono in entrambi i casi, ponendosi in sottoinsiemi dell'insieme delle trasformazioni T, nei quali ha invece luogo una continuità di ordine finito; nel primo caso il sottoinsieme costituito dalle trasformazioni aventi dato modulo soddisfacente alla condizione (3), nel secondo le famiglie (4) ad un parametro di trasformazioni regolari.

Si è dunque naturalmente condotti a pensare che, anche in problemi più generali dello stesso tipo, la questione fondamentale consista nella ricerca dei sottoinsiemi, nei quali ha luogo una continuità di ordine finito: ho creduto importante porre in rilievo questa affermazione, che non sarebbe forse facile, tuttavia, giustificare *a priori* in modo soddisfacente.

8. Possiamo infine indicare la soluzione di un problema, in qualche modo già posto nella mia precedente Nota lincea:

Sia T una trasformazione *generica*; supponiamo solo che la funzione $g(x)$, che la caratterizza, possegga la derivata seconda soddisfacente alla condizione di Lipschitz: si vuol sapere se T appartiene al tipo 1, o al tipo 2 o se, 3', essa ha modulo irrazionale ed è generata da una trasformazione infinitesima, o se infine, 3'', essa ha modulo irrazionale, ma non è generata da alcuna trasformazione infinitesima. La risposta è che le trasformazioni 1 e 3'' sono eccezionali e che la trasformazione generica può appartenere al tipo 2 o al tipo 3'.

In forma più precisa si considera una famiglia *generica* $T(\theta)$ di trasformazioni finite (7)

$$x_1 = g(x, \theta),$$

(7) Le considerazioni, cui si accenna, non hanno alcun rapporto con quelle svolte al paragrafo 5. Ricordiamo che le famiglie considerate in tale paragrafo erano composte di trasformazioni regolari.

si suppone che $g(x, \theta)$ abbia la derivata prima continua e positiva rapporto a θ, oltre che, naturalmente, la derivata seconda di Lipschitz rapporto a x; si dimostra il seguente teorema B:

L'insieme dei valori di θ, *che corrispondono a trasformazioni* $T(\theta)$ *del tipo 1 è vuoto; l'insieme* P_2 *corrispondente alle trasformazioni 3'' è un insieme della potenza del continuo e di misura nulla; infine l'insieme corrispondente alle trasformazioni 2 e l'insieme* P_1 *corrispondente dalle trasformazioni 3' hanno entrambi misura diversa da zero.* P_1 e P_2 sono due insiemi complementari in un insieme perfetto discontinuo privato delle estremità degli intervalli contigui.

La dimostrazione del teorema B presuppone il teorema A.

Notiamo da ultimo che l'insieme dei valori presi dal modulo quando θ varia in P_2 è necessariamente contenuto nell'insieme E dei valori, che non soddisfano alla condizione (3): si potrebbe cercare di dimostrare che, supponendo sempre $T(\theta)$ *generica*, questi due insiemi coincidono. Con ciò si mostrerebbe che effettivamente la condizione (3) è la meno restrittiva possibile, e, nello stesso tempo, si farebbe vedere che la trasformazione *generica*, il cui modulo non verifica la (3), non è generata da alcuna trasformazione infinitesima.

Geometria. — *Sulla costruzione di certe superficie algebriche irregolari.* Nota di Lucien Godeaux, presentata (*) dal Corrisp. B. Segre.

Si conoscono pochi esempi di superficie algebriche irregolari; non è quindi inutile dare un procedimento per la costruzione di superficie di tale natura. È questo l'oggetto della presente breve Nota.

1. Consideriamo una curva algebrica Γ, di genere π, non iperellittica, contenente un'involuzione ciclica i_p, di genere $\pi' > 1$, di ordine primo $p = 2\nu + 1$, priva di punti uniti. Denotiamo con Γ' una curva che rappresenti tale involuzione.

Fra il genere π di Γ e quello π' di Γ' intercede, per la formula di Zeuthen, la relazione $\pi = p(\pi' - 1) + 1$.

L'involuzione i_p è generata da una trasformazione birazionale τ di Γ in sè. La serie canonica $|G|$ di Γ vien mutata in sè da τ, ed in essa si trovano delle serie parziali $|G_0|$, $|G_1|, \cdots, |G_k|$, ciascuna appartenente all'involuzione i_p e – come tale – non ampliabile. A queste serie corrispondono, sulla curva Γ', delle serie complete $|G'_0|$, $|G'_1|, \cdots, |G'_k|$, aventi ciascuna l'ordine $2\pi' - 2$. Una determinata di queste, ad esempio $|G'_0|$, è la serie canonica di Γ' ed ha quindi dimensione $\pi' - 1$; le altre sono serie paracanoniche ed hanno ciascuna dimensione $\pi' - 2$. In base alla teoria delle omografie risulta

$$\pi' - 1 + k(\pi' - 2) + k + 1 = \pi = p(\pi' - 1) + 1,$$

eppertanto $k = p - 1$.

(*) Nella seduta dell'8 giugno 1949.

Prendiamo come modello proiettivo di Γ la relativa curva canonica, di ordine $2\pi - 2$, nello spazio $S_{\pi-1}$. Su questa curva, la trasformazione τ vien subordinata da un'omografia H di $S_{\pi-1}$, di periodo p, la quale possiede p assi puntuali $\sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_{p-1}$, il primo di dimensione $\pi' - 1$, gli altri di dimensione $\pi' - 2$. Questi assi non incontrano la curva.

A questi spazi possiamo associare, nel modo ben noto, le varie radici di ordine p dell'unità; e le notazioni possono scegliersi in guisa da associare a $\sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_{p-1}$ rispettivamente $1, \varepsilon, \cdots, \varepsilon^{p-1}$, ove ε denota una radice primitiva.

2. Consideriamo ora la superficie F che rappresenta le coppie di punti non ordinati della curva Γ. Possiamo prendere come modello proiettivo di questa superficie l'insieme delle corde di Γ, oppure la superficie che rappresenta tale insieme sulla grassmanniana delle rette di $S_{\pi-1}$.

Sia P un punto di F, P_1 e P_2 la coppia di punti corrispondente su Γ, P'_1 e P'_2 i punti che τ fa corrispondere a P_1 e P_2, infine P' il punto di F che rappresenta la coppia P'_1, P'_2. I punti P e P' si corrispondono in una trasformazione birazionale T di F in sè, di periodo p, la quale genera su F un'involuzione I_p, d'ordine p, evidentemente priva di punti uniti.

I punti di un gruppo di i_p, associati coi punti di un altro gruppo di questa involuzione, dànno sulla F un gruppo di p^2 punti. Tutti i gruppi di p^2 punti così ottenuti formano su F un'involuzione J, di ordine p^2, la quale è composta coll'involuzione I_p ed ammette infiniti punti uniti.

La superficie Φ che rappresenta le coppie di punti non ordinati della curva Γ' è evidentemente un'immagine dell'involuzione J. Se F' è un'immagine dell'involuzione I_p, all'involuzione J corrisponderà sopra F' un'involuzione I'_p, di ordine p (con infiniti punti uniti), avente la superficie Φ come immagine.

Le F e Φ hanno rispettivamente le irregolarità π e π'; dunque la F' ha un'irregolarità compresa nell'intervallo tra π' ed π, inclusi gli estremi.

3. Le curve canoniche C di F sono date dalle rigate delle corde di Γ che appartengono ai complessi lineari di rette di $S_{\pi-1}$, ed i generi della F sono [1]

$$p_g = \binom{\pi}{2} \quad , \quad p_a = \binom{\pi}{2} - \pi .$$

Consideriamo una $g^1_{2\pi-2}$ canonica di Γ. Le coppie di punti dei singoli gruppi di questa serie dànno sopra F una curva canonica C. Se la $g^1_{2\pi-2}$ appartiene a $|G_0|$, la curva canonica corrispondente contiene ∞^1 gruppi dell'involuzione J, e ad essa corrisponde sulla Φ una curva canonica. Dunque, alla curva C considerata corrisponde sulla F' una curva canonica di questa superficie; e viceversa.

Ne consegue che i complessi lineari di rette di $S_{\pi-1}$, che corrispondono a curve canoniche di F trasformate di curve canoniche di F', sono caratterizzati dalla proprietà che il primo membro della loro equazione può essere normato mediante un fattore opportuno, in guisa da restare inalterato quando gli si applichi l'omografia H.

(1) SEVERI, «Atti Accad. di Torino», 1903.

Parimenti le rette di $S_{\pi-1}$, le cui coordinate, opportunamente normate, restano invariate di fronte alla H, sono precisamente quelle che congiungono due punti distinti di σ_0, od un punto di σ_1 con un punto di σ_{p-1}, od un punto di σ_2 con un punto di σ_{p-2}, $\cdots$. Ne risulta che il genere geometrico di F' vale

$$p'_g = \binom{\pi'}{2} + \frac{1}{2}(p-1)(\pi'-1)^2 = \frac{1}{2}(\pi'-1)[p(\pi'-1)+1].$$

4. Tra il genere aritmetico p'_a di F' e quello p_a di F intercede la relazione [2]

$$p(p'_a+1) = p_a + 1.$$

Tenendo conto del valore di p_a e di quello di π, da qui si deduce che:

$$p'_a = \frac{1}{2}(\pi'-1)[p(\pi'-1)-1]-1.$$

L'irregolarità di F' è dunque data da

$$p'_g - p'_a = \frac{1}{2}(\pi'-1)[p(\pi'-1)+1-p(\pi'-1)+1]-1 = \pi',$$

ossia:

La superficie F' *ha l'irregolarità* π'.

5. Nel sistema canonico $|C|$ di F, vi sono p sistemi lineari parziali appartenenti alla involuzione I_p e – come tali – non ampliabili. Le curve di ognuno di questi sistemi sono date dai complessi lineari di rette di $S_{\pi-1}$, le cui equazioni si riproducono, in forza all'omografia H, moltiplicate per una potenza di ε. Si hanno così, sulla superficie F', p sistemi lineari; l'uno è il sistema canonico $|C'|$; gli altri verranno designati con $|C'_1|, |C'_2|, \cdots, |C'_{p-1}|$.

La dimensione aumentata di un'unità del sistema corrispondente alla radice ε^2, ad esempio, sarà eguale al massimo numero di rette indipendenti di $S_{\pi-1}$, le cui coordinate si riproducono, in forza dell'omografia H, moltiplicate per ε^2. Si trova così

$$\binom{\pi'-1}{2} + \pi'(\pi'-1) + \frac{1}{2}(p-3)(\pi'-1)^2 = \frac{1}{2}(\pi'-1)[p(\pi'-1)+1],$$

sicchè ciascuno dei sistemi $|C'_1|, |C'_2|, \cdots, |C'_{p-1}|$ ha la stessa dimensione del sistema canonico $|C'|$.

Rammentiamo che, d'altro canto, su F' risulta [3]

$$pC' \equiv pC'_1 \equiv \cdots \equiv pC'_{p-1}.$$

(2) Severi, «Rend. Istituto Lomb.», 1903. Per il caso particolare qui utilizzato, ved. anche la nostra monografia *Sulle involuzioni cicliche appartenenti ad una superficie algebrica*. (Paris, Hermann, 1935).

(3) Ved. la nostra monografia citata in (2).

Geometria. — *Sul gruppo delle trasformazioni cremoniane monomiali.* Nota di MARIO BENEDICTY, presentata (*) dal Socio F. SEVERI.

1. In una recente Memoria (1) Conforto dimostra, tra l'altro, che (2): Se sopra una curva di genere effettivo nullo si fissa un campo neutro composto di π coppie di punti distinti, tutte e sole le trasformazioni (analitiche e) biunivoche in sè della V_π quasi abeliana di Jacobi relativa alla curva, rappresentabili mediante congruenze lineari tra gli integrali virtualmente di prima specie sulla V_π, sono del tipo:

$$(1) \qquad u'_h \equiv \sum_k^\pi a_{hk}\, u_k + \lambda_h \qquad \text{(modd. periodi)} \qquad (h = 1, 2, \cdots, \pi),$$

ove gli a_{hk} $(h, k = 1, 2, \cdots, \pi)$ sono numeri interi tali che $|a_{hk}| = \pm 1$.

Assumendo come modello della V_π uno S_π affine, in cui sono coordinate non omogenee $x_1, x_2, \cdots, x_\pi$, col porre:

$$x_h = e^{u_h} \qquad (x'_h = e^{u'_h}) \qquad (h = 1, 2, \cdots, \pi),$$

le (1) determinano una trasformazione birazionale dello S_π in sè, del tipo:

$$(2) \qquad x'_h = c_h\, x_1^{a_{h1}}\, x_2^{a_{h2}} \cdots x_\pi^{a_{h\pi}} \qquad (h = 1, 2, \cdots, \pi),$$

dove si è posto $c_h = e^{\lambda_h}$ $(\neq 0)$.

È dimostrato inoltre che una trasformazione del tipo (2) di uno S_π in sè, quando le a_{hk} siano interi e le c_h costanti complesse non nulle, è biunivoca allora e allora soltanto che sia $|a_{hk}| = \pm 1$; Conforto chiama le (2) *trasformazioni cremoniane monomiali.*

Data l'importanza di tali trasformazioni, sarebbe opportuna la determinazione e lo studio dei sistemi lineari omaloidici ∞^π di forme di S_π che la generano; tale studio è stato condotto a termine, per $\pi = 2$, da Brenci (3); già in questo caso presenta molte difficoltà, le quali si accentuano notevolmente per le dimensioni superiori, come ho constatato nell'affrontare l'argomento. Il presente lavoro vuol avere lo scopo di avvicinare il problema, precisando in certo senso la costituzione del gruppo delle trasformazioni cremoniane monomiali e facendo alcune osservazioni generali: dimostro più precisamente (n. 2) che tale gruppo è generato da un gruppo continuo di affinità e da tre sue trasformazioni particolari, due omografiche ed una quadratica; metto in evidenza (n. 3) che il caso $\pi = 2$ è da considerare a parte, nel senso che l'argomento si può trattare nella sua generalità solo per $\pi \geq 3$.

(*) Nella seduta dell'8 giugno 1949.

(1) F. CONFORTO, *Sopra le trasformazioni in sè della varietà di Jacobi relativa ad una curva di genere effettivo diverso dal genere virtuale, in ispecie nel caso di genere effettivo nullo.* « Ann. di Mat. » (4), t. 27, p. 273 (1948).

(2) Per le nozioni sulle funzioni quasi abeliane, qui richieste, si veda F. SEVERI, *Funzioni quasi abeliane.* « Pontif. Acad. Sc. Scripta Varia », 4. 1947 e la citata Memoria (1).

(3) M. T. BRENCI, *Sulla varietà quasi abeliana di Jacobi di genere effettivo nullo e genere virtuale due.* « Rend. di Mat. » (5), vol. 7, p. 458 (1948).

2. È evidente che le trasformazioni cremoniane monomiali (brevemente: t. c. m.) (2) costituiscono un gruppo (non abeliano) che risulta per composizione del gruppo delle affinità:

$$x'_h = c_h x_h \qquad (h = 1, 2, \cdots, \pi), \tag{3}$$

aventi l'origine e i punti impropri degli assi di riferimento come punti uniti, con quello delle t. c. m.:

$$x'_h = x_1^{a_{h1}} x_2^{a_{h2}} \cdots x_\pi^{a_{h\pi}} \qquad (h = 1, 2, \cdots, \pi), \tag{4}$$

che sono tutte e sole le t. c. m. aventi il punto $(1, 1, \cdots, 1)$ unito. Anche queste ultime costituiscono un gruppo G. È immediato che se $\| a_{hk} \|$ è la matrice degli esponenti della trasformazione (4), che indicheremo con α, e $\| b_{lh} \|$ è la matrice della trasformazione β:

$$x''_l = x_1'^{b_{l1}} x_2'^{b_{l2}} \cdots x_\pi'^{b_{l\pi}} \qquad (l = 1, 2, \cdots, \pi),$$

la matrice della trasformazione $\beta\alpha$ [4] è $\| b_{lh} \| \cdot \| a_{hk} \|$, dove il prodotto è eseguito righe per colonne. Infatti, passando ai logaritmi, da:

$$u'_h \equiv \sum_1^\pi{}_k \, a_{hk} \, u_k \qquad (h = 1, 2, \cdots, \pi)$$

$$u''_l \equiv \sum_1^\pi{}_h \, b_{lh} \, u'_h \qquad (l = 1, 2, \cdots, \pi),$$

segue: $$u''_l \equiv \sum_{1hk}^{\pi} b_{lh} \, a_{hk} \, u_k = \sum_1^\pi{}_k \, c_{lk} \, u_k \qquad (l = 1, 2, \cdots, \pi),$$

ossia: $$x''_l = x_1^{c_{l1}} x_2^{c_{l2}} \cdots x_\pi^{c_{l\pi}} \qquad (l = 1, 2, \cdots, \pi),$$

avendo posto $c_{lk} = \sum_1^\pi{}_h \, b_{lh} \, a_{hk}$, con il che risulta $\| c_{lh} \| = \| b_{lh} \| \cdot \| a_{hk} \|$, quando si esegua il prodotto righe per colonne. Potremo perciò, senza tema di equivoco, indicare con la stessa lettera sia la trasformazione che la matrice relativa.

Del gruppo G si può trovare facilmente una base. All'uopo si osservi che la forma canonica di ogni matrice α degli esponenti di una t. c. m. è la matrice diagonale unitaria, e si ricordi [5] che la riduzione di una qualunque matrice a forma canonica si consegue moltiplicando la matrice, a destra o a sinistra, righe per colonne, per un'opportuna successione di matrici del tipo:

$$\left\| \begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right\|, \tag{5}$$

[4] Per comodità indico con $\beta\alpha$ la trasformazione ottenuta eseguendo *prima* la α e *poi* la β.

[5] Ved. per esempio R. A. Frazer, W. J. Duncan, A. R. Collar, *Elementary matrices*, Cambridge, p. 87 (1938).

$$(6)\qquad \begin{Vmatrix} 1 & n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{Vmatrix} \qquad (n \text{ intero non nullo}),$$

$$(7)\qquad \begin{Vmatrix} h & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{Vmatrix} \qquad (h \neq 0),$$

corrispondenti rispettivamente: allo scambio di due righe o colonne consecutive; all'aggiunta alla prima riga del multiplo secondo n della seconda riga, ovvero alla seconda colonna del multiplo secondo n della prima colonna; alla moltiplicazione per h della prima riga o colonna. Nel nostro caso, poichè è già $|\alpha| = \pm 1$, deve essere $h = -1$.

Trascurando il caso banale $\pi = 1$ (G è costituito dall'identità e dall'omografia involutoria $x' = 1/x$), si osservi:

a) che la matrice (6) è la potenza di esponente $|n|$ della matrice:

$$(6')\quad \nu = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{Vmatrix} \quad \text{ovvero} \quad (6'')\quad \nu^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{Vmatrix},$$

a seconda che $n \gtrless 0$, e che tali matrici sono inverse;

b) che, posto:

$$(7')\quad \mu = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{Vmatrix}, \qquad (5')\quad \lambda_{12} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{Vmatrix},$$

è: $\mu = \nu\lambda_{12}\,\nu\lambda_{12}\,\nu^{-1}\,\lambda_{12}\,\nu^2$.

Risulta quindi che: *per* $\pi \geqq 2$ *il gruppo* G *delle t. c. m.* (4) *è generato dalle* $\pi + 1$ *trasformazioni* $\lambda_{12}, \lambda_{23}, \cdots, \lambda_{\pi-1,\pi}, \nu, \nu^{-1}$, *aventi rispettivamente per matrici le* (5), (6'), (6'').

Il gruppo G si può pensare generato da trasformazioni geometricamente più semplici. Si introducano in S_π coordinate omogenee di punto $(y_0, y_1, \cdots, y_\pi)$, col porre $x_h = y_h/y_0$ $(h = 1, 2, \cdots, \pi)$ e si osservi che il gruppo delle omografie:

$$(8)\qquad \begin{cases} \rho\ y'_0 = y_{i_0} \\ \rho\ y'_1 = y_{i_1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \rho\ y'_\pi = y_{i_\pi} \end{cases} \qquad (i_0, i_1, \cdots, i_\pi \text{ è una permutazione dei numeri } 0, 1, \cdots, \pi)$$

è isomorfo al gruppo delle sostituzioni su $\pi + 1$ elementi, e quindi generabile, per esempio, mediante le omografie:

$$\begin{cases} \rho\ y'_0 = y_0 \\ \rho\ y'_1 = y_2 \\ \rho\ y'_2 = y_1 \\ \rho\ y'_3 = y_3 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \rho\ y'_\pi = y_\pi \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \rho\ y'_0 = y_1 \\ \rho\ y'_1 = y_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \rho\ y'_{\pi-1} = y_\pi \\ \rho\ y'_\pi = y_0 \end{cases},$$

che, ridotte in forma non omogenea, dànno la λ_{12} e la:

$$x'_h = x_{h+1}/x_1 \quad (h = 1, 2, \cdots, \pi - 1), \quad x'_\pi = 1/x_1,$$

appartenenti a G, come tutte le (8).

Indicando con $\lambda_{i_0, i_1, \ldots, i_m}$ $(i_0, i_1, \cdots, i_m$ è una disposizione di classe $m+1$ dei numeri $0, 1, \cdots, \pi)$, la t. c. m. che, nella forma (8), esegue la sostituzione ciclica $(i_0, i_1, \cdots, i_m)$ sugli indici $i_0, i_1, \cdots, i_m$ e lascia inalterati i rimanenti, si verifica subito che $\nu^{-1} = \lambda_{02}\,\nu\lambda_{02}$.

Inoltre, per $\pi \geqq 3$, chiamata δ la t. c. m.:

$$x'_1 = \frac{x_2\, x_3}{x_1} \quad , \quad x'_i = x_i \qquad (i = 2, 3, \cdots, \pi),$$

di matrice:

$$\begin{Vmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{Vmatrix},$$

risulta $\nu = \delta\lambda_{302}\,\delta\lambda_{320}$.

Concludendo, si può enunciare: *Per* $\pi \geqq 2$ *il gruppo delle t. c. m. di uno* S_π *affine in sè è generato dal gruppo continuo delle affinità* (3) *e dalle tre t. c. m.* $\lambda_{\pi\ldots210}, \lambda_{12}, \nu$; *inoltre, per* $\pi \geqq 3$ *lo stesso gruppo si può considerare generato dalle* (3) *e dalle* $\lambda_{\pi\ldots210}, \lambda_{12}, \delta$.

Tali trasformazioni hanno le matrici:

$$\lambda_{\pi\ldots210} = \begin{Vmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{Vmatrix}, \quad \lambda_{12} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{Vmatrix},$$

$$\nu = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \cdots 1 \end{Vmatrix}, \quad \delta = \begin{Vmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \cdots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots 1 \end{Vmatrix}.$$

Le $\lambda_{\pi \ldots 2.0}$, λ_{12} sono omografie cicliche, la prima di periodo $\pi + 1$, la seconda involutoria; le ν, δ sono trasformazioni quadratiche, la prima aciclica, la seconda involutoria.

3. Data ora comunque una t. c. m. α, essa muta nel sistema $\bar{\Sigma}$ degli iperpiani un sistema omaloidico Σ, ∞^π, di ipersuperficie; la α^{-1} muta in Σ il sistema degli iperpiani; cioè, con ovvio significato dei simboli: $\bar{\Sigma} = \alpha\Sigma$, $\Sigma = \alpha^{-1}\bar{\Sigma}$.

Se $\alpha = \lambda_{12}^{l}\, \lambda_{\pi \ldots 0}^{m} \cdots \lambda_{12}^{p}\, \lambda_{\pi \ldots 0}^{q}\, \nu^r$ è la decomposizione di α nel prodotto di trasformazioni generatrici [6], è

$$\Sigma = \nu^{-r}\, \lambda_{\pi \ldots 0}^{\pi+1-q} \lambda_{12}^{p} \cdots \lambda_{\pi \ldots 0}^{\pi+1-m} \lambda_{12}^{l}\, \bar{\Sigma};$$

e posto:

$$\Sigma' = \lambda_{12}^{l}\, \Sigma \quad , \quad \Sigma'' = \lambda_{\pi \ldots 0}^{\pi+1-m}\, \Sigma', \cdots, \Sigma = \nu^{-r}\, \Sigma^{(r)},$$

si saprà costruire Σ non appena si saprà come operano $\lambda_{\pi \ldots 0}$, λ_{12}, ν^{-1} su una forma qualunque dello spazio.

Come si è detto, le $\lambda_{\pi \ldots 0}$, λ_{12} non sono che omografie. La ν, per $\pi = 2$, è una trasformazione quadratica in cui due punti base per la rete omaloidica di coniche sono infinitamente vicini e il terzo è distinto.

La δ è la trasformazione quadratica generata dalle quadriche passanti per due $S_{\pi-2}$ (nel nostro caso $x_1 = x_2 = 0$ e $x_1 = x_3 = 0$) intersecantisi secondo uno $S_{\pi-3}$, e per un punto (il punto improprio dell'asse x_1).

Si osservi che [7] nel piano ogni rete Σ è costituita da curve non passanti per uno dei tre vertici del triangolo di riferimento, con l'unica [8] eccezione della rete di coniche per essi, corrispondente alla trasformazione di matrice $\begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}$.

Non vale una proprietà analoga per $\pi > 2$, in quanto, oltre alla t. c. m. di matrice:

$$\begin{Vmatrix} -1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & -1 \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \cdots & -1 \end{Vmatrix},$$

(6) S'intende che, per $\pi > 3$, invece della ν si può considerare la δ, ed anzi sarà conveniente farlo, data la maggiore semplicità e simmetria della trasformazione δ.

(7) Cfr. loc. cit. (3).

(8) S'intende: a meno di omografie λ.

analoga alla precedente, esistono *altre* t. c. m. il cui sistema è costituito da forme passanti per *tutti* gli spigoli $(\pi - 2)$-dimensionali del $(\pi + 1)$-edro di riferimento, come per esempio la:

$$\begin{Vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Terminerò osservando che, così come è stato impostato il problema, il caso $\pi = 2$ si distingue dagli altri casi, come appare già dalla considerazione della trasformazione δ; tale trasformazione sembra arbitrariamente introdotta, tuttavia la distinzione permane anche se si considera sempre la ν; questa infatti è una trasformazione quadratica per la quale il sistema omaloidico ∞^{π} è costituito da quadriche specializzate $\pi - 3$ volte; e quindi il caso $\pi = 2$ non può non presentarsi distinto dagli altri.

Geometria. — *Proprietà di curvatura di una particolare classe di varietà a connessione affine.* Nota di Aldo Cossu, presentata (*) dal Corrisp. B. Segre.

In questa Nota considero le varietà a connessione affine per le quali l'incremento subìto da un qualunque vettore controvariante, quando il vettore si trasporti per equipollenza lungo un ciclo infinitesimo, appartenga sempre alla faccetta del ciclo. Ciò, come ha osservato E. Bortolotti, comporta una particolarizzazione del tensore di curvatura riemanniana della varietà; nel caso riemanniano, tale proprietà caratterizza anzi le varietà riemanniane, considerate da E. Bompiani, per le quali il parallelismo di Levi-Civita coincide con il parallelismo di Severi.

Nel caso generale, considero come varia la direzione del suddetto incremento (direzione di curvatura del vettore) al mutare della direzione del vettore che si trasporta e della faccetta del ciclo infinitesimo. Si osserva allora che le direzioni di curvatura relative ad un assegnato vettore controvariante appartengono ad una $(n - 1)$-direzione, la quale corrisponde alla direzione del dato vettore in una reciprocità. Si determinano quindi i coni di incidenza Γ e Σ a questa relativi, luogo e inviluppo rispettivamente di direzioni di vettori controvarianti, e di $(n - 1)$-direzioni di vettori covarianti, per i quali si ha – relativamente a determinati cicli infinitesimi – un trasporto assoluto. Si ottengono poi diverse altre proprietà, e si considera infine il caso particolare delle varietà a connessione affine simmetrica, distinguendo le due possibilità che detta correlazione sia non singolare o singolare di specie qualunque.

Tale studio per la curvatura di siffatte varietà può riescir utile nel determinare le varietà ad esse subordinate a curvatura nulla, argomento che conto riprendere in una Nota successiva.

(*) Nella seduta del 12 maggio 1949.

1. È noto che, in una varietà a connessione affine A_n di parametri $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$ ($\lambda, \mu, \nu = 1, \cdots, n$), il tensore di curvatura riemanniana $R^{\cdots\nu}_{\lambda\omega\mu}$ determina la parte principale dell'incremento che un vettore della varietà subisce nel trasporto per equipollenza lungo un ciclo infinitesimo. Più precisamente, se si considera un ciclo infinitesimo coll'origine in un punto P della A_n e che appartenga alla giacitura determinata da due direzioni $dx^{\lambda}, \delta x^{\mu}$, la parte principale dell'incremento subìto dal vettore ξ^{ν}, applicato in P, nel relativo trasporto ciclico infinitesimale è dato da

$$\rho D\xi^{\nu} = R^{\cdots\nu}_{\lambda\omega\mu}\, \xi^{\mu}\, dx^{\lambda}\, \delta x^{\omega}, \tag{1}$$

ρ essendo uno scalare che dipende dall'area racchiusa dal ciclo infinitesimo e da quella del parallelogramma, pure infinitesimo, avente per lati $dx^{\lambda}, \delta x^{\mu}$.

In tal modo ad ogni giacitura e ad ogni vettore per P rimane associata una direzione, quella dell'incremento, che chiamerò *direzione di curvatura* dell'assegnato vettore relativa alla giacitura considerata.

Si prenda la particolare classe di varietà a connessione affine per le quali la direzione di curvatura di un qualunque vettore, relativa ad una qualunque giacitura, appartenga sempre a quest'ultima. In tal caso per il tensore di curvatura riemanniana si ha[1]

$$R^{\cdots\nu}_{\lambda\omega\mu} = \delta^{\nu}_{\lambda}\, \varphi_{\omega\mu} - \delta^{\nu}_{\omega}\, \varphi_{\lambda\mu}, \tag{2}$$

essendo $\varphi_{\omega\mu} = \dfrac{R^{\cdots\tau}_{\tau\omega\mu}}{n-1}$.

È facile mostrare che *le direzioni di curvatura di un vettore controvariante* ξ^{ν}, *applicato in un punto* P *dell'*A_n, *appartengono in generale, e qualunque sia la giacitura del ciclo, alla* $(n-1)$*–direzione associata al vettore covariante* $\lambda_{\omega} = R^{\cdots\tau}_{\tau\omega\mu}\, \xi^{\mu}$ [2], che chiameremo $(n-1)$*–direzione di curvatura* dell'assegnato vettore controvariante. Si ha infatti

$$R^{\cdots\nu}_{\lambda\omega\mu}\, \xi^{\mu}\, \lambda_{\nu} = \frac{1}{n-1}\left(\delta^{\nu}_{\lambda} R^{\cdots\tau}_{\tau\omega\mu} - \delta^{\nu}_{\omega} R^{\cdots\tau}_{\tau\lambda\mu}\right) \xi^{\mu} R^{\cdots\tau}_{\tau\nu\sigma}\, \xi^{\sigma} =$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(R^{\cdots\tau}_{\tau\omega\mu}\, \xi^{\mu}\, R^{\cdots\tau}_{\tau\lambda\sigma}\, \xi^{\sigma} - R^{\cdots\tau}_{\tau\lambda\mu}\, \xi^{\mu}\, R^{\cdots\tau}_{\tau\omega\sigma}\, \xi^{\sigma}\right) = 0.$$

Di conseguenza *la direzione di curvatura di un vettore* ξ^{ν} *relativa ad una assegnata faccetta*[3], *non appartenente alla* $(n-1)$*–direzione di curvatura determinata da* λ_{ω}, *è quella comune alla faccetta e alla suddetta* $(n-1)$*–direzione.*

2. Nel caso $n = 3$ si consideri la rete di correlazioni

$$\sigma\eta^{\nu} = R^{\cdots\nu}_{\lambda\omega\mu}\, \xi^{\mu}\, \eta^{\lambda\omega}\ [4], \tag{3}$$

(1) Cfr. ad esempio E. BORTOLOTTI, *Geometria delle varietà a connessione affine*. « Annali di Matematica », ser. IV, to. VIII (1930-31).

(2) Supponiamo naturalmente che il vettore $R^{\cdots\tau}_{\tau\omega\mu}$ sia di rango n.

(3) Per semplicità chiameremo faccetta la 2-direzione del ciclo infinitesimo lungo il quale si trasporta ξ^{ν}.

(4) La (1) per $n = 3$ si può interpretare come una rete di correlazioni sul piano improprio dello spazio affine tangente in P alla A_3, nella quale per ogni assegnata direzione ξ^{ν}, ad ogni giacitura della faccetta determinata dalle direzioni $dx^{\lambda}, \delta x^{\mu}$, corrisponde la direzione di curvatura $D\xi^{\nu}$. In tal caso la (1) può scriversi secondo la (3). La (3) si può anche interpretare come una rete di correlazioni nella stella di centro P, appartenente allo spazio affine *centrato*.

ove con $\eta^{\lambda\omega}$ si è indicato un bivettore controvariante semplice, la cui giacitura è quella del ciclo infinitesimo. Introducendo i trivettori unitari $\varepsilon^{\lambda\omega\varrho}$, $\varepsilon_{\lambda\omega\varrho}$ relativi di peso $+1$, -1 rispettivamente (5), poniamo

$$R^{\varrho\nu}_{\cdot\cdot\mu}\,\xi^{\mu} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{\lambda\omega\varrho}\,R^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\lambda\omega\mu}\,\xi^{\mu} \quad , \qquad \eta_{\varrho} = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\lambda\omega\varrho}\,\eta^{\lambda\omega},$$

essendo $R^{\varrho\nu}_{\cdot\cdot\mu}\,\xi^{\mu}$, η_{ϱ} rispettivamente due tensori relativi di peso 1 e -1, le cui componenti non differiscono da quelle di $R^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\lambda\omega\mu}\,\xi^{\mu}$ e $\eta^{\lambda\omega}$. La rete di correlazioni (3) può allora rappresentarsi sotto la forma

$$\tau\eta^{\nu} = R^{\varrho\nu}_{\cdot\cdot\mu}\,\xi^{\mu}\,\eta_{\varrho}\,. \tag{3'}$$

Se tale rete di correlazioni è di sistemi nulli, ogni generica faccetta deve contenere, per ogni assegnata direzione ξ^{ν}, la corrispondente direzione di curvatura, e quindi il tensore di curvatura deve essere della forma (1). Viceversa, per la (2),

$$R^{\varrho\nu}_{\cdot\cdot\mu} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{\lambda\omega\varrho}\,(\delta^{\nu}_{\lambda}\,\varphi_{\omega\mu} - \delta^{\nu}_{\omega}\,\varphi_{\lambda\mu}) = \frac{1}{2}\,(\varepsilon^{\nu\omega\varrho}\,\varphi_{\omega\mu} - \varepsilon^{\lambda\nu\varrho}\,\varphi_{\lambda\mu}) =$$

$$= -\frac{1}{2}\,\varepsilon^{\lambda\omega\nu}\,(\delta^{\varrho}_{\lambda}\,\varphi_{\omega\mu} - \delta^{\varrho}_{\omega}\,\varphi_{\lambda\mu}) = -R^{\nu\varrho}_{\cdot\cdot\mu}.$$

Si ha quindi che *condizione necessaria e sufficiente affinchè una* A_3 *abbia curvatura del tipo* (2), *è che la rete di correlazioni* (3') *sia una rete di sistemi nulli.*

Ritorniamo al caso di n qualunque (> 2) e mostriamo che, se la giacitura della faccetta del ciclo infinitesimale è parallela alla $(n-1)$-direzione associata a λ_{ω}, la direzione di curvatura del vettore ξ^{ν} è indeterminata; più precisamente, *il vettore* ξ^{ν} *si trasporta senza curvatura lungo ogni ciclo infinitesimo appartenente alla* $(n-1)$*-direzione associata a* λ_{ω}.

Consideriamo infatti un bivettore controvariante semplice $\eta^{\lambda\omega}$, la cui giacitura (coincidente con quella del ciclo) sia parallela alla $(n-1)$-direzione di λ_{ω}; si ha ovviamente $\eta^{\lambda\omega}\,\lambda_{\lambda\omega} = R^{\cdot\cdot\cdot\tau}_{\tau\omega\mu}\,\xi^{\mu}\,\eta^{\lambda\omega} = 0$, e quindi

$$R^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\lambda\omega\mu}\,\xi^{\mu}\,\eta^{\lambda\omega} = \frac{1}{n-1}\,(\delta^{\nu}_{\lambda}\,R^{\cdot\cdot\cdot\tau}_{\tau\omega\mu} - \delta^{\nu}_{\omega}\,R^{\cdot\cdot\cdot\tau}_{\tau\lambda\mu})\,\xi^{\mu}\,\eta^{\lambda\omega} =$$

$$= \frac{1}{n-1}\,(R^{\cdot\cdot\cdot\tau}_{\tau\omega\mu}\,\xi^{\mu}\,\eta^{\nu\omega} - R^{\cdot\cdot\cdot\tau}_{\tau\lambda\mu}\,\xi^{\mu}\,\eta^{\lambda\nu}) = \frac{2}{n-1}\,R^{\cdot\cdot\cdot\tau}_{\tau\omega\mu}\,\xi^{\mu}\,\eta^{\nu\omega} = 0.$$

3. In relazione a quanto s'è detto nel n. 1, esaminiamo come vari il vettore covariante λ_{ω} al mutare del vettore controvariante ξ^{ν}. Le relazioni

$$\lambda_{\omega} = R^{\cdot\cdot\cdot\tau}_{\tau\omega\mu}\,\xi^{\mu}$$

si possono interpretare, analogamente a quanto s'è fatto nel n. 2, come le equazioni di una correlazione nella stella di centro P, ed allora andranno scritte piuttosto

$$\tau\lambda_{\omega} = R^{\cdot\cdot\cdot\tau}_{\tau\omega\mu}\,\xi^{\mu}. \tag{4}$$

(5) Le componenti di tali trivettori sono nulle se due almeno degli indici λ, ω, ρ sono uguali, mentre sono $+1$ o -1 secondo che la permutazione degli indici è di classe pari o dispari rispetto alla permutazione fondamentale $1, 2, 3$.

Esistono quindi in ogni punto P *di una siffatta* A_n ∞^{n-2} *direzioni appartenenti alle corrispondenti* $(n-1)$*-direzioni di curvatura. Tali direzioni sono le generatrici di un cono* Γ $(n-1)$*-dimensionale quadrico, di vertice* P, *mentre le corrispondenti* $(n-1)$*-direzioni di curvatura inviluppano un altro cono quadrico* Σ, *generalmente distinto dal primo* (6).

Il cono quadrico Γ ha equazione $R^{\cdots\tau}_{\tau\omega\mu}\, dx^\omega dx^\mu = 0$. Se un vettore ξ^ν ha direzione coincidente con una delle generatrici di Γ per P, la sua direzione di curvatura, relativamente ad ogni faccetta passante per ξ^ν (7), è parallela a ξ^ν. In altre parole, Γ è il luogo delle direzioni per P per le quali si ha un *trasporto assoluto* relativamente alle faccette passanti per esse; rimane in tal modo determinato il significato geometrico del tensore $\varphi_{\omega\mu}$ che compare nella (2).

Dalla considerazione della (4), e ricordando (n. 2) che la curvatura di un vettore controvariante è nulla allora e soltanto quando la faccetta del ciclo appartiene alla $(n-1)$-direzione di curvatura corrispondente, se ne deduce che *tutti i vettori controvarianti le cui direzioni appartengono ad una assegnata* $(n-2)$*-direzione hanno curvatura nulla relativamente al ciclo infinitesimo appartenente alla faccetta reciproca della suddetta* $(n-2)$*-direzione nella correlazione* (4).

La precedente proprietà rientra anzi in una più generale, avendosi che *tutti i vettori controvarianti appartenenti ad una* $(n-h)$*-direzione* $(2 \leq h \leq n-1)$ *hanno curvatura nulla, relativamente ad ogni ciclo infinitesimo che appartenga ad una delle* $\infty^{2(h-2)}$ *faccette dell'*h*-direzione reciproca della suddetta* $(n-h)$*-direzione nella correlazione* (4). In altre parole, la A_n si comporta come una *varietà a connessione affine integrabile* rispetto ad ogni totalità di vettori per un punto P, che appartengano ad una $(n-h)$-direzione comunque assegnata, relativamente alle faccette dell'h-direzione corrispondente a questa nella (4). Se poi la direzione di curvatura di un vettore controvariante non è indeterminata, essa risulta la direzione reciproca di quella del vettore nella reciprocità (4) ed appartenente alla faccetta del ciclo relativo.

4. Analogamente a quanto s'è ricordato nel n. 1, l'incremento subìto da un vettore covariante η_ν nel trasporto ciclico infinitesimale per equipollenza è dato da

$$\rho D\,\eta_\mu = R^{\cdots\nu}_{\lambda\omega\mu}\, \eta_\nu\, dx^\lambda\, \delta x^\omega , \tag{5}$$

ove con dx^λ, δx^ω si sono indicate le direzioni che determinano la 2-direzione del ciclo. È facile mostrare nel nostro caso che *la curvatura di un vettore covariante* η^ν, *relativa ad ogni ciclo infinitesimo la cui 2-direzione appartenga alla* $(n-1)$*-direzione di* η_ν *è nulla*. Infatti, se la faccetta del ciclo è parallela alla giacitura di η_ν è $\eta_\nu\, dx^\nu = \eta_\nu\, \delta x^\nu = 0$ e quindi

$$\rho D\,\eta_\mu = \frac{1}{n-1}\,(\delta^\nu_\lambda\, R^{\cdots\tau}_{\tau\omega\mu} - \delta^\nu_\omega\, R^{\cdots\tau}_{\tau\omega\mu})\,\eta_\nu\, dx^\lambda\, \delta x^\omega =$$

$$= \frac{1}{n-1}\,(\eta_\lambda\, dx^\lambda\, R^{\cdots\tau}_{\tau\omega\mu}\, \delta x^\omega - \eta_\omega\, \delta x^\omega\, R^{\cdots\tau}_{\tau\lambda\mu}\, dx^\lambda) = 0 .$$

(6) I casi in cui i due coni coincidono, sono stati tutti determinati da B. SEGRE, *Gli scorrimenti nella geometria non euclidea degli iperspazi ed alcune notevoli corrispondenze proiettive*. « Ann. di Mat. », (4) 12 (1933-34), 327-347, § III.

(7) Purchè naturalmente la faccetta non appartenga alla $(n-1)$-direzione reciproca di ξ^ν, perchè in tal caso (n. 2) la curvatura è nulla.

Per determinare il comportamento della *giacitura di curvatura* di un vettore covariante η_ν al variare della faccetta del ciclo, si potrà sempre sostituire ad una delle direzioni che determinano la faccetta del ciclo quella comune alla faccetta ed alla $(n-1)$-direzione di η_ν; con ciò, infatti, il primo membro della (5) si altera soltanto per un fattore scalare. Indicato allora con ξ^λ un vettore controvariante la cui direzione sia parallela alla faccetta ed alla $(n-1)$-direzione di η_ν, si ha

$$\tau D\,\eta_\mu = \frac{\eta_\lambda\,\rho^\lambda}{n-1}\,R_{\tau\omega\mu}^{\cdot\cdot\cdot\tau}\,\xi^\omega,$$

ove con ρ^λ si è indicato un ulteriore vettore controvariante, la cui direzione, non parallela alla $(n-1)$-direzione di η_ν, determini con ξ^λ la faccetta del ciclo. Tali relazioni, interpretate come le equazioni di una correlazione nella stella di centro P dello spazio affine tangente in P alla A_n, si possono scrivere

$$\sigma\bar{\eta}_\mu = R_{\tau\omega\mu}^{\cdot\cdot\cdot\tau}\,\xi^\omega, \tag{6}$$

ove s'è posto $\bar{\eta}_\mu = D\eta_\mu$.

Se ne deduce quindi che la giacitura di curvatura di un vettore covariante η_ν, relativamente ad un ciclo infinitesimo, dipende dalla direzione di ξ^ω, comune alla faccetta del ciclo ed alla giacitura di η_ν; più precisamente *essa è la* $(n-1)$*-direzione reciproca di quella di* ξ^ω, *nella reciprocità* (6), che è la correlazione inversa della (4).

Da ciò consegue intanto che *il cono di incidenza* Σ, *inviluppo delle* $(n-1)$*-direzioni parallele alle direzioni reciproche nella* (4) *o* (6) *è anche l'inviluppo delle giaciture dei vettori covarianti* η_ν *paralleli alle giaciture di curvatura dei vettori stessi, relativamente alle faccette aventi in comune coi vettori* η_ν *le direzioni* ξ^ν *reciproche di questi nella* (6). Il luogo di tali direzioni è a sua volta il cono Γ trovato al n. 3.

5. Consideriamo ora in particolare il caso in cui la connessione della A_n sia simmetrica e si abbia $n \geqq 3$; si ha allora per il tensore di curvatura riemanniana la prima identità del Bianchi $R_{[\lambda\omega\mu]}^{\quad\nu} = 0$, da cui contraendo rispetto agli indici λ, ν $R_{[\nu\omega\mu]}^{\quad\nu} = 0$, cioè $R_{\mu\omega\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} - 2\,R_{\lambda[\omega\mu]}^{\cdot\cdot\cdot\lambda}$. Nel nostro caso essendo $R_{\mu\omega\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} = \frac{2}{n-1}\,R_{\lambda[\omega\mu]}^{\cdot\cdot\cdot\lambda}$ se ne deduce che $R_{\mu\omega\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} = 0$ [8], ossia *in una varietà* A_n *simmetrica di dimensione* $n \geqq 3$, *il cui tensore di curvatura sia del tipo* (2), *la connessione è necessariamente equiaffine*. Come prima conseguenza si ha allora che *la correlazione* (4) *è una polarità*, sicchè i due coni Γ, Σ di incidenza coincidono. Pertanto il cono $R_{\tau\omega\mu}^{\quad\tau}\,dx^\omega\,dx^\mu = 0$, è il luogo delle direzioni per P di quei vettori controvarianti con direzioni di curvatura ad essi parellele, relativamente alle faccette contenenti le direzioni di quei vettori ma non appartenenti alle $(n-1)$-direzioni tangenti al cono lungo queste ultime; il cono suddetto risulta in pari tempo l'inviluppo delle $(n-1)$-direzioni di quei vettori covarianti che hanno giaciture di curvatura ad essi parallele, relativamente alle faccette contenenti le direzioni di tangenza, senza tuttavia essere ad essi parallele.

Su ogni faccetta non appartenente al cono Γ, nè ad esso tangente, rimangono determinate due direzioni comuni al cono: esse sono i raggi doppi dell'involuzione

(8) Si noti che per $n = 2$ il suddetto ragionamento non è più valido.

nella quale si corrispondono le direzioni dei vettori controvarianti paralleli alla faccetta, e le direzioni di curvatura relativamente ad un qualunque ciclo appartenente alla faccetta stessa. Le direzioni corrispondentisi nella suddetta involuzione, sono anche le direzioni secondo cui le giaciture dei vettori covarianti e quelle delle rispettive giaciture di curvatura, relative alla faccetta, segano la faccetta stessa.

Se la faccetta è tangente, ma non appartiene al cono, la precedente involuzione degenera: la direzione di tangenza ha direzione di curvatura indeterminata, mentre ogni altra direzione parallela alla faccetta ha come direzione di curvatura quella di tangenza.

Se infine la faccetta appartiene al cono (9) tutte le direzioni della faccetta hanno direzione di curvatura indeterminata, rispetto ad un qualunque ciclo appartenente alla faccetta. Più precisamente, *se n è pari esistono in* Γ *due sistemi distinti di* $\infty^{\frac{n}{4}\left(\frac{n-2}{2}\right)}\frac{n}{2}$*-direzioni, tali che per tutti i vettori controvarianti appartenenti ad una qualunque delle suddette* $\frac{n}{2}$*-direzioni, e relativamente ad ogni ciclo ad essa appartenente, la* A_n *si comporta come una* A_n *a connessione integrabile; mentre se n è dispari esiste in* Γ *un sistema di* $\infty^{\frac{n-1}{4}\left(\frac{n-1}{2}\right)}$*-direzioni, tale che per tutti i vettori controvarianti appartenenti alla* $\left(\frac{n+1}{2}\right)$*-direzione polare di una qualunque delle suddette* $\left(\frac{n-1}{2}\right)$*-direzioni, e relativamente ad ogni ciclo appartenente a quest'ultima, la varietà si comporta come una* A_n *integrabile.*

6. Sin qui si è sempre supposto che il tensore $R^{\cdots\tau}_{\tau\omega\mu}$ fosse di rango n; supponiamo ora che sia di rango $n-h$ $(1 \leq h \leq n-1)$, e limitiamoci a considerare il caso in cui la A_n sia a connessione affine simmetrica; in tal caso il sistema polare (4) o (6) diventa singolare di specie h. Si avrà quindi un'h–direzione singolare che gode della seguente proprietà: *tutti i vettori controvarianti ad essa paralleli si trasportano senza curvatura lungo un qualunque ciclo infinitesimo.* Quindi la A_n si comporta relativamente alla totalità dei vettori controvarianti dell'h–direzione singolare come una *varietà a connessione affine integrabile*, o meglio come *uno spazio affine.*

Ogni vettore controvariante non appartenente all'h–direzione singolare, definisce una $(n-1)$–direzione di curvatura ben determinata, che passa per l'h–direzione singolare e non varia allorquando la direzione del vettore varia in una $(h+1)$–direzione parallela all'h–direzione singolare.

Si ha altresì che tutti i vettori covarianti le cui giaciture passano per un'assegnata $(h-1)$–direzione dell'h-direzione singolare si trasportano senza curvatura lungo un qualunque ciclo infinitesimo la cui faccetta abbia in comune una direzione coll'$(h-1)$–direzione suddetta.

(9) Caso che può presentarsi solo per $n \geq 4$.

Idrodinamica. — *Sul moto irrotazionale dei liquidi viscosi.* Nota II di GIULIO SUPINO, presentata (*) dal Socio A. SIGNORINI.

1. In una Nota precedente è stato studiato il moto di un liquido viscoso e si è mostrato che esso, in generale, non può avere carattere irrotazionale. Vogliamo nella presente Nota, ritornare sull'argomento per svolgere alcune considerazioni energetiche.

2. In un liquido viscoso in moto permanente irrotazionale è (indicando con Ω il potenziale delle forze esterne):

$$\Omega + \frac{p}{\rho} + \frac{q^2}{2} = \text{cost}$$

(essendo $q^2 = u^2 + v^2 + w^2$). Il trinomio di Bernoulli è dunque costante in tutta la massa anche se il liquido è viscoso (1). Ora questo trinomio rappresenta nel liquido perfetto la conservazione della energia meccanica; è chiaro che nel caso di liquido viscoso deve avere un diverso significato, altrimenti dovremmo concludere che la dissipazione di energia è nulla e, poichè questa è rappresentata da una funzione (di Lord Rayleigh) che contiene i quadrati delle derivate prime delle componenti di velocità, se ne dedurrebbe che la velocità del liquido in moto irrotazionale deve essere costante, contro gli esempi dei nn. 4 e 5 della mia Nota precedente.

Per chiarire questo argomento scriviamo le equazioni del moto di un liquido viscoso nella forma:

$$(2)\qquad \begin{cases} \rho X - \left(\dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) = \rho \dfrac{Du}{Dt} \\ \rho Y - \left(\dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}\right) = \rho \dfrac{Dv}{Dt} \\ \rho Z - \left(\dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z}\right) = \rho \dfrac{Dw}{Dt} \end{cases}$$

Si consideri il moto permanente e si fissi un elemento di traiettoria. Moltiplicando la prima delle (2) per $u\,dt$ la seconda per $v\,dt$, la terza per $w\,dt$ e sommando si ottiene:

$a)$ $\rho\,[Xu + Yv + Zw]\,dt = \mathfrak{L}_F$ (lavoro delle forze esterne di massa);

(*) Nella seduta del 12 maggio 1949.

(1) La deduzione è immediata ove si osservi che le equazioni di Navier:

$$(1)\qquad \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 u = \rho \frac{Du}{Dt}$$

. . . . . .

si riducono alle equazioni dei liquidi perfetti ove sia $\nabla^2 u = \nabla^2 v = \nabla^2 w = 0$ e quindi *in particolare* anche se il moto è irrotazionale.

b) la parte relativa alle derivate delle tensioni interne che può essere decomposta come segue:

$$b_1) \quad -\left[\frac{\partial \sigma_x u}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy} u}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx} u}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy} v}{\partial x} + \cdots\right] dt = \mathfrak{L}_P \text{ (lavoro delle pressioni);}$$

$$b_2) \quad +\left[\sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} + \cdots\right] dt = \mathfrak{L}_D \text{ (energia dissipata).}$$

Le somme $a), b_1), b_2)$ eguagliano

c) l'incremento dell'energia cinetica $\left(\text{che rappresenta il risultato delle somme effettuate nel secondo membro e cioè: } \rho \frac{dq^2}{2}\right)$. Il lavoro delle pressioni si può decomporre ancora in due parti:

$$-\left[\frac{\partial p u}{\partial x} + \frac{\partial p v}{\partial y} + \frac{\partial p w}{\partial z}\right] dt = \mathfrak{L}'_P$$

(cioè lavoro della parte statica delle pressioni)

$$+\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \cdot u\right) + \mu \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) u\right] + \cdots\right\} dt = \mathfrak{L}''_P$$

(cioè lavoro della parte *non statica* delle pressioni). La differenza fra l'energia dissipata $\mathfrak{L}_D$ e il lavoro $\mathfrak{L}''_P$ vale

$$\mu\,[u\nabla^2 u + v\nabla^2 v + w\nabla^2 w]\,dt$$

od anche

$$-2\mu\left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) u + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z}\right) v + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) w\right] dt.$$

Si conclude che « soltanto se la rotazione del vortice è nulla l'energia dissipata nel tempo *dt* eguaglia il lavoro della parte non statica delle pressioni nello stesso tempo »; negli altri casi le equazioni non indicano se sia $\mathfrak{L}_D \gtrless \mathfrak{L}''_P$ però « in generale » è $\mathfrak{L}_D > \mathfrak{L}''_P$ come si osserva nei pochi casi di moto viscoso che si sanno integrare (per esempio nel moto laminare nei tubi) e come risulta dallo studio approssimato e da quello sperimentale sulle correnti soggette alla sola azione della gravità dove sempre $z + \frac{p}{\gamma} + \frac{q^2}{2g}$ decresce nel senso del moto.

La difficoltà di ottenere un moto *irrotazionale*, appare quindi giustificata, dal punto di vista energetico, dalla difficoltà di ottenere che sia $\mathfrak{L}''_P = \mathfrak{L}_D$. Occorre per questo fornire energia di deformazione al liquido ed infatti negli esempi dei nn. 4-5 (della Nota I) questa energia è data attraverso le superficie mobili; le superficie fisse non possono cedere energia al liquido (il cui moto diviene allora rotazionale).

3. Può sembrare a prima vista che le difficoltà che si oppongono al moto irrotazionale siano esattamente le stesse che si oppongono a un moto più generale in cui sia $\text{rot rot } \bar{q} = 0$.

Ma, a parte qualche caso nel quale la condizione rot rot $\bar{q} = 0$ equivale alla rot $\bar{q} = 0$ come accade per tutti i moti paralleli ad un piano fisso [2], in generale, la condizione rot rot $\bar{q} = 0$ è, anche dal punto di vista energetico, meno restrittiva della precedente.

Infatti se il moto è irrotazionale si ha contemporaneamente su un'area ω racchiusa da una linea chiusa C:

$$\mathfrak{I} = 2 \int (l\xi + m\eta + n\zeta)\, d\omega = 0$$

(l, m, n, coseni direttori della normale all'elemento $d\omega$)

$$\frac{d\mathfrak{I}}{dt} = 2\mu \int (l\nabla^2\xi + m\nabla^2\eta + n\nabla^2\zeta)\, d\omega = 0$$

cioè

$$\mathfrak{I} = \int_C u\,dx + v\,dy + w\,dz = 0 \qquad \text{(circolazione nulla)}$$

$$\frac{d\mathfrak{I}}{dt} = \int_C \frac{dq^2}{2} + \frac{dp}{\rho} + d\Omega + \mu \int_C \nabla u\,dx + \nabla v\,dy + \nabla w\,dz .$$

Se il moto è irrotazionale si può concludere che è $\mathfrak{I} = 0$, $\frac{d\mathfrak{I}}{dt} = 0$ cioè che il lavoro del vettore $\bar{q}$ lungo una linea chiusa qualunque nell'interno del liquido è nullo; se invece è soltanto rot rot $q = 0$ allora la conclusione è molto meno grave: il lavoro del vettore è indipendente dal tempo.

Contro questa constatazione non vi è nulla da osservare: se rot rot $\bar{q} = 0$ le equazioni di Navier coincidono con quelle dei liquidi perfetti, ma le condizioni ai limiti sono diverse e il lavoro della velocità è diverso da zero; se invece il moto è irrotazionale allora il lavoro è *nullo* e ciò sembra costituire, come osserva il Poincaré [3], « une objection contre les hypothèses qui ont servi de point de depart » alle equazioni di Navier. Ma il moto irrotazionale di liquido viscoso non esiste che in casi eccezionali, giustificati dal punto di vista energetico, onde la obbiezione del Poincaré viene eliminata dalle osservazioni di queste due Note.

(2) Il prof. Signorini mi avverte che nel caso di moti alla Beltrami (cioè di moti per i quali sia $q = m(x, y, z)\,\text{rot}\,q$) si è immediatamente ricondotti a rot $q = 0$ se è rot rot $q = 0$, perchè rot $q = \text{grad}\, m \wedge \text{rot}\, q + m\,\text{rot rot}\, q = \text{grad}\, m \wedge \text{rot}\, q$ e quindi rot $q \times$ rot $q = 0$ c. d. d.

Per moti paralleli ad un piano fisso si ha in ogni caso $u = \frac{\partial\psi}{\partial y}$, $v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$ (ψ funzione di corrente) e se $\nabla^2 u = \nabla^2 v = 0$ allora sono armoniche $\frac{\partial\psi}{\partial y}$, $\frac{\partial\psi}{\partial x}$; segue che si può scegliere una determinazione della ψ che la renda armonica e considerare quindi la funzione armonica associata φ. Allora $u = \frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $v = \frac{\partial\varphi}{\partial y}$, e il moto è irrotazionale.

(3) Cfr. POINCARÉ, *Theorie des Tourbillons*. Parigi 1895, p. 194.

Meccanica. — *Sul moto di un solido asimmetrico attorno ad un punto fisso.* Nota di TRISTANO MANACORDA, presentata (*) dal Socio A. SIGNORINI.

1. Sia S un solido di massa m e baricentro G, $\mathfrak{E}$ l'elissoide centrale d'inerzia, s_α la sua sezione con un qualunque piano α per G e σ_α l'area di s_α, ed infine e_α l'ellisse omotetica ad s_α nel piano α col rapporto $\pi/\sigma_\alpha\sqrt{m}$. Il prof. Signorini ha già da qualche anno mostrato (1) che l'uso dell'antipolarità rispetto alla e_α rende agevole ed unitaria la trattazione di svariate questioni di stereodinamica e cinematica delle masse. In questo spirito, nella presente Nota ci si propone di caratterizzare le condizioni strutturali sotto le quali un solido fissato in un punto O diverso da G e mobile sotto l'azione di un sistema di forze il cui momento rispetto ad O verifichi la condizione

$$\mathbf{M} \times \mathrm{OG} = \delta \mathrm{M}_f = 0, \tag{1}$$

in cui si è indicato con f la retta orientata OG e con δ la distanza di G da O ammette la relazione invariante

$$\mathbf{K} \times \mathrm{OG} = \delta \mathrm{K}_f = 0, \tag{2}$$

dove si intende indicare con $\mathbf{K}$ il momento della quantità di moto rispetto ad O. Tali condizioni coincidono con quelle assegnate da Hess nel caso del solido asimmetrico pesante (2). Ma qui la trattazione, oltre ad essere estremamente più agile, mette in luce interessanti proprietà dell'antipolo A dell'asse istantaneo a_t rispetto ad e_α, proprietà che fra l'altro portano ad una legge del tipo della classica legge di reversibilità per il pendolo composto.

2. Cominciamo a cercare condizioni necessarie perchè valga la (2). Si osserva immediatamente che, valida la (2), a_t non può mai sovrapporsi ad f perche $\mathbf{K} \times \boldsymbol{\omega}$ è costantemente positivo. Ricordando inoltre che – se b è la normale al piano α individuato da G e a_t nell'antipolo A di a_t – l'insieme $\mathfrak{Z}^{(\omega)}$ delle quantità di moto del corpo ha come asse centrale b (3), si vede immediatamente che la (2) implica che a_t è durante il moto asse permanente. Difatti è

$$\delta \frac{d}{dt} \mathrm{K}_f = \boldsymbol{v}_\mathrm{G} \times \mathbf{K} = \frac{1}{m} \mathfrak{C} \tag{3}$$

(*) Nella seduta dell'8 giugno 1949.

(1) A. SIGNORINI, *Sopra alcune questioni di geometria delle masse, cinematica delle masse e stereodinamica.* «Ann. di Mat.» (4), 24, pp. 1–11 (1945); *Meccanica razionale*, I, pp. 320-333; II, pp. 328–331, Roma, 1947–48.

(2) W. HESS, *Ü. die Euler'schen Bewegungsgleichungen und ü. eine neue partikuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt.* «Math. Ann.», 37, pp. 153-181 (1890).

(3) Cfr. loc. cit. in (1) p. 5.

dove con $\mathcal{T}$ si è indicato l'invariante scalare del sistema $\mathfrak{Z}^{(q)}$. Per la (2) è $\mathcal{T} = 0$, e quindi $\mathfrak{Z}^{(q)}$ è equivalente all'unico vettore $m\boldsymbol{v}_G$ applicato in A, ciò che mostra l'asserto. Inoltre, sempre perchè b è asse centrale di $\mathfrak{Z}^{(q)}$, il componente di $\mathbf{K}$ secondo α è normale ad OA, e poichè è normale anche ad OG, deve essere

$$\text{OA} = \lambda \text{OG}. \tag{4}$$

Con ciò si ha per $\mathbf{K}$ l'espressione semplificata

$$\mathbf{K} = \text{OA} \wedge m\boldsymbol{v}_G = \lambda \text{OG} \wedge m\boldsymbol{v}_G. \tag{5}$$

È facile infine mostrare *che* λ *è indipendente dal tempo*. Difatti dall'identità $\dot{\mathbf{K}} \times \boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{K}$, valida anche quando si immagini di concentrare tutta la massa in G, nel qual caso diviene

$$\boldsymbol{\omega} \times \frac{d}{dt}(\text{OG} \wedge m\boldsymbol{v}_G) = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \text{OG} \wedge m\boldsymbol{v}_G,$$

si constata immediatamente che è $\dot{\lambda} = 0$: basta moltiplicare ambo i membri della precedente relazione per λ e tener conto della (5).

Escludiamo dalle nostre considerazioni il caso in cui a_t sia fisso nel corpo, cioè il moto si riduca ad una semplice rotazione. Allora la condizione che A si trovi costantemente sulla retta f porta che a_t è in ogni istante coniugata ad f anche rispetto ad s_α, e quindi che anche l'antipolo A* di a_t rispetto ad s_α appartiene sempre ad f. Quindi, poichè, se Q è uno dei punti in cui f incontra $\mathfrak{S}$, vale la relazione $|\text{A}^*\text{G}| \cdot |\text{OG}| = |\text{GQ}|^2$ e $|\text{GQ}|$ è costante, *anche* A* *è fisso nel corpo*. Ne segue che a_t si muove in un piano β passante per O, e poi, per la relazione di omotetia che sussiste tra s_α ed e_α, che l'area σ_α di s_α si conserva anch'essa costante. Ma il valore di σ_α è

$$\sigma_\alpha = \frac{\pi}{\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\dfrac{n_1^2}{\mathfrak{A}} + \dfrac{n_2^2}{\mathfrak{B}} + \dfrac{n_3^2}{\mathfrak{C}}}} \tag{6}$$ (4)

se si indicano con $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ i momenti centrali di inerzia e con $n_r, r = 1, 2, 3$ i coseni direttori della normale ad α. La costanza di σ_α porta alla costanza di $\dfrac{n_1^2}{\mathfrak{A}} + \dfrac{n_2^2}{\mathfrak{B}} + \dfrac{n_3^2}{\mathfrak{C}}$ la quale mostra che la normale ad α deve in ogni istante appartenere ad una delle sezioni circolari dell'elissoide reciproco di inerzia di centro G. Ne deriva che OA deve essere normale a detta sezione circolare se durante il moto vale la (2).

3. Mostriamo ora che la condizione strutturale poco sopra trovata come necessaria per la validità della (2), è anche sufficiente ad assicurare che la (2),

(4) La (6) si trova agevolmente adoperando le prime nozioni sulla cinematica delle deformazioni finite. Se $\Sigma A_r y_r^2 = 1$ è l'equazione di $\mathfrak{S}$, con la trasformazione $x_r = y_r \sqrt{A_r}$, $\mathfrak{S}$ si muta nella sfera $\Sigma x_r^2 = 1$. I coefficienti di trasformazione sono $c_{rr} = \sqrt{A_r}$, $c_{rs} = 0$, quindi il coefficiente di dilatazione superficiale è $(1 + \delta_\sigma)^2 = \Sigma n_r^2 A_{r+1} A_{r+2}$ e tra σ_α e l'area corrispondente nella sfera, che è π, vale la relazione $\sigma_\alpha (1 + \delta_\sigma) = \pi$: donde la (6). Cfr. ad esempio: A. Signorini, *Trasformazioni termoelastiche finite*. Mem. I, cap. 1, n. 4, « Ann. di Mat. » (4), 22 (1943).

se è soddisfatta in un istante, lo è sempre. A questo scopo scegliamo come sistema solidale $Gxyz$ un sistema trirettangolo levogiro di centro G e versori fondamentali $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ con $\boldsymbol{k} =$ vers. OG e $\boldsymbol{j}$ sovrapposto al semiasse intermedio di $\mathcal{E}$. Con ciò, l'equazione dell'elissoide reciproco di inerzia, tenuto conto che $\boldsymbol{k}$ è normale ad una delle sue sezioni circolari, assume la forma

$$a(x^2 + y^2) + cz^2 - 2b'zx = 1,$$

in cui le costanti a, c, b' dipendono dai momenti di inerzia e centrifughi rispetto a $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. Le componenti p, q, r di $\boldsymbol{\omega}$ si esprimono allora mediante quelle del momento della quantità di moto rispetto a G, $\mathbf{K}^*$, nella forma

$$(7) \qquad p = aK_x^* - b'K_z^* \quad , \quad q = aK_y^* \quad , \quad r = -b'K_x^* + cK_z^*.$$

Ciò premesso, poichè è $K_z^* = K_f$, la (3) si scrive

$$\frac{d}{dt}K_f - b'K_y^*K_f = 0 \quad , \quad K_f e^{-\int^t b'K_y^* dt} = \text{cost.}$$

la quale mostra che, se in un istante è $K_f = 0$, lo stesso si verifica in tutti gli istanti successivi. Con ciò *la condizione che* OG *sia ortogonale ad una delle sezioni circolari dell'elissoide centrale reciproco di inerzia è, oltre che necessaria, sufficiente* (nel senso sopra specificato) *per la validità della relazione invariante* (2).

4. Poichè A è antipolo rispetto ad e_α di tutte le rette per O appartenenti a β, e in particolare dell'asse γ, sussiste la relazione

$$(8) \qquad |AG|\,|GO| = \frac{\mathfrak{B}}{m} = \rho_0^2,$$

in cui ρ_0 indica il raggio di inerzia del sistema rispetto all'asse y. La (8) mostra che se si fissa senza attrito il corpo in A invece che in O, il nuovo antipolo viene a cadere in O. È questa una *legge di reversibilità dello stesso tipo di quella classica per il pendolo composto.*

Ammettiamo poi che le forze agenti sul corpo siano conservative col potenziale U e indichiamo con ϑ, φ e Ψ gli angoli di Eulero della terna $G, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ rispetto ad una terna fissa $G\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{c}_3$, infine con $\mathbf{N}$ il versore della linea dei nodi. Dalla (5) si ha

$$\lambda\dot{\mathbf{K}} = OA \wedge m\boldsymbol{a} = \lambda\mathbf{M}$$

in cui $\boldsymbol{a}$ indica l'accelerazione di A. Da questa moltiplicando per $\delta\boldsymbol{\omega} = \delta\vartheta\mathbf{N} + \delta\Psi\boldsymbol{c}_3 + \delta\varphi\boldsymbol{k}$ ed osservando che $\delta\boldsymbol{\omega} \wedge OA = \delta A$, $\lambda\mathbf{M} \times \delta\boldsymbol{\omega} = \lambda\left(\frac{\partial U}{\partial\vartheta}\delta\vartheta + \frac{\partial U}{\partial\Psi}\delta\Psi\right)$ si ottengono facilmente le equazioni di moto di A

$$(9) \qquad \begin{cases} \ddot{\vartheta} - \dot{\Psi}^2 \sin\vartheta\cos\vartheta = \dfrac{1}{m\lambda\delta^2}\dfrac{\partial U}{\partial\vartheta} \\ \sin^2\vartheta\cdot\ddot{\Psi} + 2\dot{\Psi}\dot{\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta = \dfrac{1}{m\lambda\delta^2}\dfrac{\partial U}{\partial\Psi}. \end{cases}$$

La condizione (1) equivale a $\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0$, per cui U è funzione solo di ϑ e Ψ. Se più in particolare U è indipendente anche da Ψ, accanto all'integrale delle forze vive che si scrive

$$\dot{\vartheta}^2 + \dot{\Psi}^2 \sin^2 \vartheta = \frac{2}{m\lambda\delta^2}(h + U), \tag{10}$$

con h costante, sussiste l'integrale che si ricava dalla seconda delle (9)

$$\dot{\Psi} \sin^2 \vartheta = \text{cost.} \tag{11}$$

5. Tutto questo vale in particolare quando le forze attive si riducono al peso. Allora gli integrali (10) e (11) che, per la (5) ed indicando con $\boldsymbol{c}_3$ il versore verticale diretto verso il basso, possono scriversi

$$m\boldsymbol{v}_A^2 = 2\,(h + mg\,\mathrm{OA} \times \boldsymbol{c}_3) \quad , \quad \mathrm{OA} \wedge m\boldsymbol{v}_A \times \boldsymbol{c}_3 = \text{cost.}$$

mostrano che l'antipolo A si muove come un pendolo sferico, e tale risultato è valido senza che si debba alterare il valore dell'accelerazione di gravità g dividendola per λ come è necessario se si vuole riferire tale proprietà a G [5]. In particolare, se si abbandona il solido senza atto di moto iniziale in una posizione sufficientemente vicina a quella di equilibrio stabile, il punto A si muove come un pendolo semplice e il periodo delle piccole oscillazioni è dato per la (8) da

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{|\mathrm{OA}|}{g}} = 2\pi \frac{\rho_0}{\sqrt{\delta g}}.$$

Chimica. — *Attività antibatterica di alcune cumarine naturali e sintetiche* (*). Nota di Enrico Del Pianto, presentata (**) dal Socio G. Bargellini.

Il numero di sostanze aventi struttura cumarinica isolate fino ad oggi da piante diverse è davvero rilevante, il che sta a testimoniare la notevole diffusione di questo tipo di composti nel regno vegetale. Il loro significato fisiologico non è ancor chiaro; essi però sono stati oggetto di studi tossicologici che hanno fatto emergere proprietà degne di rilievo, le quali si esplicano su organismi di ambedue i regni appartenenti a classi molto distanti tra loro. Sono state infatti

(5) N. A. Joukowski, *Geometrische Interpretation des Hess'schen Falles der Bewegung eines schweren starren Körpers um einen festen Punkt.* « Jah. berich. d. Deuts. Math. Ver. », 3, pp. 62-70 (1893).

(*) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica Organica dell'Istituto Chimico dell'Università di Roma, Centro di Chimica Generale del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta dell'8 giugno 1949.

descritte azioni tossiche su alghe [1], semi e radici [2, 3] di varie piante e su pesci di acqua dolce [4, 5, 6, 7], insetti e mammiferi.

Riguardo all'azione insetticida della cumarina è interessante ricordare che sono stati osservati effetti letali su zanzare del genere *Anopheles* e *Culex* [8], il che spiegherebbe perchè zone ricche di piante contenenti cumarine siano esenti da malaria [9].

Riguardo all'azione sui mammiferi, i fenomeni osservati si possono riassumere in: effetti narcotici [10], depressivi sulle funzioni circolatoria e respiratoria, degenerazione necrotica del fegato, nefrite tubulare, glicosuria e ipotermia [11]. Queste osservazioni spiegherebbero perchè alcune qualità di fieno risultino tossiche per il bestiame [12, 13]. È noto inoltre che la malattia del bestiame detta del trifoglio dolce è dovuta alla presenza nel fieno di dicumarolo (3-3'-metilen-bis-4-ossi-cumarina) il quale è provvisto in alto grado di potere emorragico. Per questa sua proprietà questo composto ha trovato qualche applicazione in terapia umana.

L'attività antibatterica dei composti della serie cumarinica è stata invece oggetto di pochi studi. Goth [14] ha trovato il dicumarolo attivo verso lo Stafilococco aureo alla concentrazione di 1/100000. (L'attività antibatterica del dicumarolo è diminuita dalla aggiunta, nel terreno di coltura, di alcune vitamine e di alcuni flavonoli [15]). Recentemente Brodersen e Kjaer [16] hanno sperimentato su 25 specie batteriche quattro composti cumarinici insieme con numerose altre sostanze aventi la struttura di lattone insaturo.

Tale scarsezza di dati mi ha indotto ad eseguire una sperimentazione comparativa con un discreto numero di composti variamente sostituiti per vedere se vi fosse qualche rapporto tra attività e gruppo sostituente. I 20 composti esaminati, e cioè la cumarina, 17 suoi derivati e 2 analoghi solforati, sono elencati nella tabella insieme con i risultati delle esperienze.

L'attività antibatterica dei prodotti in esperimento è stata saggiata verso lo Stafilococco aureo con la tecnica delle diluizioni usando, come terreno di cultura,

(1) KLEBS, *Die Bedingungen der Fortpflanzung bei einigen Algen und Pilzen* (Jena 1896).
(2) SIGMUND, « Biochem. Z. », *62*, 339 (1914).
(3) L. J. AUDUS e J. H. QUASTEL, « Nature », *159*, 320 (1947).
(4) E. SPÄTH, « Monatsh. », *69*, 75 (1936).
(5) H. PRIESS, « Ber. dtsch. pharm. Ges. », *21*, 227 (1911). H. THOMS e H. PRIESS, « Chem. Ztg. », *34*, 1279 (1910).
(6) H. THOMS, « Ber. dtsch. Chem. Ges. », *44*, 3325 (1911).
(7) E. SIEBURG, « Biochem. Z. », *113*, 176 (1921).
(8) M. BRUCE, « Indian Journ. med. Res. », *17*, 963 (1930).
(9) H. ZIEMANN, « Arch. Schiffs Tropen-Hyg. », *35*, 410 (1931).
(10) E. BERGSTROM, « Skand. Arch. Physiol. », *53*, 236 (1928); « C. R. Soc. Biol. », *53*, 1159 (1925).
(11) E. MAMELI e E. FILIPPI, « Ann. Chim. Appl. », *16*, 556 (1926).
(12) K. SMITH e R. A. BRINK, « J. agric. Res. », *57*, 145 (1938).
(13) C. PAK e B. E. READ, « Chin. J. Physiol. », *12*, 263 (1937).
(14) A. GOTH, « Science », *101*, 383 (1945).
(15) Y. RAOUL, « Bull. Soc. Chim. Biol. », *29*, 518 (1947); J. NAGHSKI, M. I. COPLEY e J. F. CONCH, « Science », *105*, 125 (1947).
(16) R. BRODERSEN e A. KJAER, « Acta pharm. et toxicol. », *2*, 109 (1946).

un brodo di comune preparazione [17]. Le soluzioni madri dei composti venivano fatte in alcool etilico e si è badato che la concentrazione del solvente nel brodo non superasse l'1,2 %, concentrazione alla quale non si hanno effetti apprezzabili sullo sviluppo del batterio.

Dato che questi composti sono poco solubili in acqua, per alcuni di essi non si è potuta svelare alcuna attività in quanto le concentrazioni massime raggiungibili nel brodo (riportate nella terza colonna) sono risultate senza effetto; per altri invece, alle massime concentrazioni (seconda colonna), si è potuto osservare un ritardo nello sviluppo del batterio.

Dei composti sperimentati sono risultati più attivi i 3-fenil–derivati e i due analoghi solforati. Essi inibiscono lo sviluppo dello stafilococco a concentrazioni comprese tra grammi $0{,}29 \times 10^{-4}$ e grammi $4{,}3 \times 10^{-4}$ per cc. di terreno.

Mi sembra interessante il fatto che la sostituzione nella cumarina dell'ossigeno in posizione 2 con lo zolfo faccia comparire una discreta attività antibatterica in concentrazioni alle quali la cumarina è del tutto inattiva, e che la sostituzione anche dell'altro ossigeno in posizione 1 raddoppi tale attività.

Il confronto di questi risultati con quelli recenti di Murti e Seshadri [18], i quali hanno osservato che le cumarine più tossiche per i pesci sono le 3 o 4 fenil–sostituite, mette in evidenza un certo parallelismo tra l'azione ittiocida e quella antibatterica.

Devo qui far rilevare che nelle cumarine è presente un anello lattonico insaturo che si riscontra in molte sostanze naturali aventi effetti inibitori sullo sviluppo cellulare [19, 20, 21]; ciò è stato recentemente fatto notare anche da Blodersen e Kjaer [16] riguardo alla attività antibatterica e da Audus e Quastel [3] riguardo a quella fitocida.

Così tra i lattoni insaturi naturali che esplicano attività antibatterica basterà citare l'anemonina [22, 23] e l'acido parasorbico [24] isolati da piante, l'acido penicillico [25], la clavacina [26, 27] e l'acido helvolico isolati da funghi, ed infine l'acido vulpinico [28] isolato dai licheni.

(17) Estratto carneo standardizzato Acas gr. 10; peptone gr. 10; sale da cucina gr. 5; acqua di fonte cc. 1.000.

(18) V. V. S. Murti e T. R. Seshadri, «Proc. Indian Acad. Sci.», *25 A*, 333 (1947).

(19) P. Länger, H. Martin e P. Muller, «Helv. Chim. Acta», *27*, 892 (1944).

(20) P. B. Medawar, G. M. Robinson e R. Robinson, «Nature», *151*, 195 (1943).

(21) Veldstra e E. Havinga, «Enzymologia», *11*, 373 (1944).

(22) F. Boas e R. Steude, «Biochem. Zeitschr.», *279*, 417 (1935).

(23) Schmidt, «Ztschr. f. Immun. exp. Ther.», *102*, 233 (1942).

(24) R. Kuhn, D. Jerchel, F. Moewus, E. F. Moller e H. Lettre, «Naturwiss», *31*, 468 (1943).

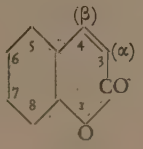
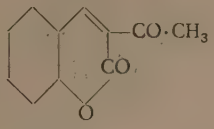
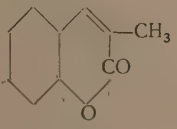
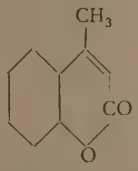
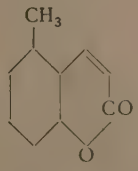
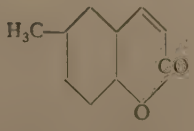
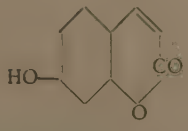
(25) A. E. Oxford, H. Raistrick e G. Smith, «Chem. and Ind.», *61*, 22 (1942).

(26) H. Raistrick, J. H. Birkinshaw, A. Braeken e S. E. Michael, «Lancet», *2*, 625 (1943).

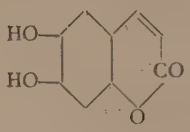
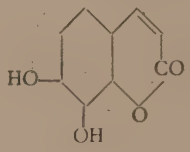
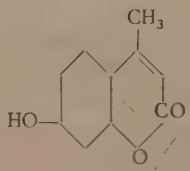
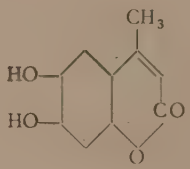
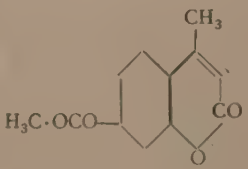
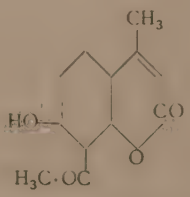
(27) P. A. Katzman, Hays, Cain, Van Wyk, Reithel, Thayer, Doisy, Gaby, Carroll, Muir, Jones, Wade, «J. Biol. Chem.», *154*, 475 (1944).

(28) G. Bargellini, E. Del Pianto, G. B. Marini Bettolo, «Atti Acc. Naz. Lincei», ser. VIII, vol. I, 1252 (1946).

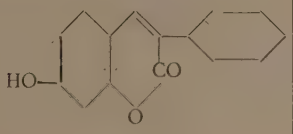
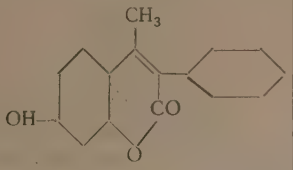
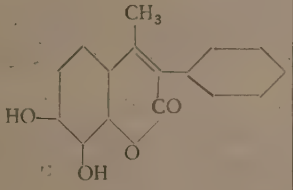
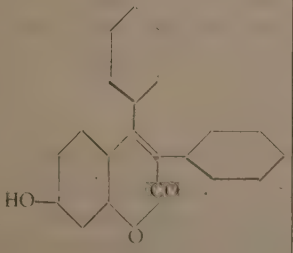
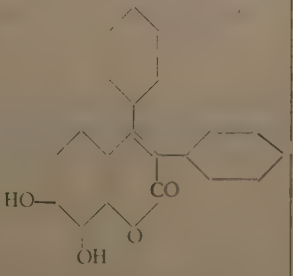
TABELLA.

PRODOTTO	FORMULA DI STRUTTURA	Concentrazione (gr./cc.) alla quale lo sviluppo è inibito	Concentrazione (gr./cc.) massima compatibile con la solubilità del prodotto alla quale lo sviluppo è ritardato	Concentrazione (gr./cc.) massima compatibile con la solubilità del prodotto alla quale lo sviluppo non è ritardato
Cumarina				$6{,}48 \cdot 10^{-4}$
3–acetil–cumarina			$6{,}5 \cdot 10^{-4}$	
3–metil–cumarina			$1{,}2 \cdot 10^{-4}$	
4–metil–cumarina			$1{,}2 \cdot 10^{-4}$	
5–metil–cumarina			$1{,}2 \cdot 10^{-4}$	
6–metil–cumarina			$1{,}2 \cdot 10^{-4}$	
7–ossi–cumarina (umbellifero ne)				$1{,}4 \cdot 10^{-4}$

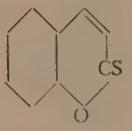
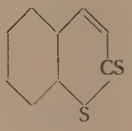
Segue: TABELLA.

PRODOTTO	FORMULA DI STRUTTURA	Concentrazione (gr./cc.) alla quale lo sviluppo è inibito	Concentrazione (gr./cc.) massima compatibile con la solubilità del prodotto alla quale lo sviluppo è ritardato	Concentrazione (gr./cc.) massima compatibile con la solubilità del prodotto alla quale lo sviluppo non è ritardato
6–7–diossi–cumarina (esculetina)			$1{,}45 \cdot 10^{-4}$	
7–8–diossi–cumarina (dafnetina)			$1{,}45 \cdot 10^{-4}$	
4–metil–7–ossi–cumarina .				$1{,}1 \cdot 10^{-4}$
4–metil–6–7–diossi–cumarina			$5{,}0 \cdot 10^{-4}$	
4–metil–7–acetossi–cumarina				$0{,}7 \cdot 10^{-4}$
4–metil–7–ossi–8–acetil–cumarina				$1{,}3 \cdot 10^{-4}$

Segue: TABELLA.

PRODOTTO	FORMULA DI STRUTTURA	Concentrazione (gr./cc)		
		alla quale lo sviluppo è inibito	massima compatibile con la solubilità del prodotto alla quale lo sviluppo	
			è ritardato	non è ritardato
3-fenil-7-ossi-cumarina		$0{,}68 \cdot 10^{-4}$		
3-fenil-4-metil-7-ossi cumarina		$2{,}88 \cdot 10^{-4}$		
3-fenil-4-metil-7-8-diossi-cumarina		$4{,}32 \cdot 10^{-4}$		
3-4-difenil-7-ossi-cumarina				$0{,}5 \cdot 10^{-4}$
3-4-difenil-7-8-diossi cumarina		$0{,}54 \cdot 10^{-4}$		

Segue: TABELLA.

PRODOTTO	FORMULA DI STRUTTURA	Concentrazione (gr./cc.) alla quale lo sviluppo è inibito	Concentrazione (gr./cc.) massima compatibile con la solubilità del prodotto alla quale lo sviluppo è ritardato	Concentrazione (gr./cc.) massima compatibile con la solubilità del prodotto alla quale lo sviluppo non è ritardato
2-tiocumarina		$0{,}58 \cdot 10^{-4}$		
1-2-ditiocumarina		$0{,}29 \cdot 10^{-4}$		

Ricorderò infine che nelle cumarine è presente, oltre all'anello lattonico, il raggruppamento $-CH=\underset{|}{C}-CO-$ (cioè un sistema di doppi legami attivati da un gruppo $=CO$) che, secondo Geiger e Conn [29], sarebbe il responsabile della attività antibatterica dell'acido penicillico in quanto capace di bloccare l'azione di enzimi batterici contenenti gruppi tiolici. Tale ipotesi, e cioè che l'aggruppamento indicato abbia una qualche importanza nel conferire ad una molecola organica potere antibatterico, pare confermata da Amstutz e Coll. i quali hanno sintetizzato e trovato attivi composti aromatici contenenti tale aggruppamento [30].

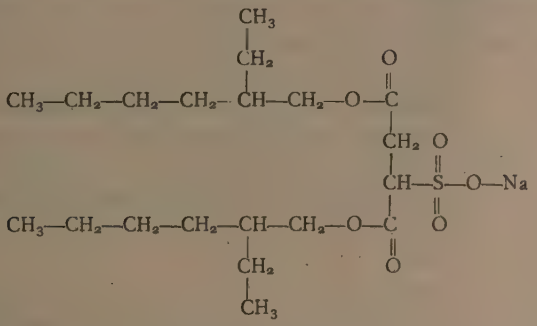
Riassumendo in breve i risultati delle presenti esperienze, si può affermare che dei 20 composti della serie della cumarina presi in esame nella loro attività antibatterica nei confronti dello Stafilococco aureo il più attivo è la 1–2–ditiocumarina che inibisce lo sviluppo alla concentrazione di gr. $0{,}29 \times 10^{-4}$ per cc., mentre discreta attività svolgono anche la 2-tiocumarina ed alcune cumarine 3–fenil–sostituite.

(29) W. B. GEIGER e J. E. CONN, « J. Am. Chem. Soc. », *67*, 112 (1945).

(30) E. D. AMSTUTZ, E. A. FEHENEL e C. R. NEUMOYER, « J. Am. Chem. Soc. », *68*, 349 (1946).

Chimica. — *Il comportamento dell'«Aerosol» O T all'elettrodo a goccia di mercurio* (*). Nota di ELENA GAGLIARDO, presentata (**) dal Corrisp. G. SEMERANO.

L'«Aerosol» OT o estere di-ottilico dell'acido solfosuccinico,



appartiene a quella classe di sostanze che hanno il nome commerciale generico di «Aerosol» e che trovano da alcuni anni interessanti applicazioni come agenti imbibitori ed emulsionanti. Queste proprietà sono in stretta relazione con la struttura delle loro molecole costituite da due parti, una idrofila e l'altra idrofoba. Se a due liquidi non miscibili, quali ad esempio olio e acqua, si aggiungono piccole quantità di queste sostanze, esse si raccolgono all'interfase col gruppo idrofilo rivolto verso l'acqua, quello idrofobo verso l'olio. Intense sono le forze interessate nell'orientazione di queste molecole alle interfasi e notevole è di conseguenza la loro azione. Se queste sostanze sono presenti in quantità sufficiente, così da formare uno strato continuo tra i due liquidi, il carattere dell'interfase risulta completamente modificato e facilmente si può ottenere la miscibilità o piuttosto l'emulsione dell'olio e dell'acqua.

In altri casi gli aerosoli si limitano a migliorare il contatto fra le fasi: favoriscono, ad esempio, l'adesione della colla e dei cementi, la fissazione uniforme dei coloranti, la soluzione della gomma grezza, l'azione dei lubrificanti, i processi collegati alla flottazione, ecc. Non è inutile inoltre ricordare che queste sostanze hanno mostrato in alcuni casi di poter aumentare o diminuire il carico di rottura di vari materiali.

L'OT è il più attivo degli agenti imbibitori finora conosciuti: i suoi due gruppi ottilici offrono infatti una larga base idrofoba così che poche molecole sono sufficienti per ricoprire una data superficie.

Ora, come è noto, notevole importanza hanno in elettrochimica alcune sostanze dotate di elevata attività superficiale, poichè esse permettono di stabilire agli elettrodi il rifornimento di sostanza depolarizzatrice mediante un processo di pura diffusione, che è quello assoggettabile ad un trattamento teorico semplice.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Fisica dell'Università. Centro di Studio per la Polarografia del C. N. R., Padova.

(**) Nella seduta dell'8 giugno 1949.

Largo uso di queste sostanze viene fatto anche in polarografia, allo scopo di ottenere gradini ben sviluppati ed esenti da contributi di corrente dovuti a fenomeni di adsorbimento o di agitazione irregolare del liquido nelle vicinanze della goccia di mercurio. Si ricorderanno tra esse principalmente alcuni colloidi, alcaloidi, coloranti, composti aromatici e alifatici diversi che vengono aggiunti in piccola quantità (0,005–0,01 %) alle varie soluzioni base.

Una particolare attenzione deve essere rivolta alla scelta di queste sostanze e alla loro concentrazione, poichè spesso sia l'una che l'altra possono influenzare in maniera sensibile l'altezza dei gradini e quindi i risultati quantitativi delle determinazioni.

L'importanza e, purtroppo, l'attualità di queste considerazioni risultano, ad esempio, da un recentissimo lavoro di Proske [1] nel quale vengono messe in evidenza gravi deficenze nelle prescrizioni analitiche proposte per l'analisi degli ottoni più di dieci anni or sono [2], e che sono riportate come uno degli esempi più brillanti di applicazione della tecnica analitica polarografica dai maggiori trattati dedicati all'elettrodo di Heyrovský [3].

È pure noto che talvolta, specialmente quando si studiano sostanze dotate a loro volta di elevata attività interfasale (coloranti, composti naturali di importanza biologica, ecc.), è necessario ricorrere ad aggiunte spesso notevoli di soppressori e ciò è causa di depressione nell'altezza dei gradini e quindi di riduzione nella sensibilità del metodo. Si spiega perciò come siano particolarmente ricercate quelle sostanze che, per essere fortemente adsorbite all'interfase mercurio/soluzione possano essere sufficienti in concentrazione straordinariamente bassa, si da non influenzare sensibilmente la composizione della soluzione.

A questo scopo, alcuni anni or sono, è stato studiato in questo laboratorio, il comportamento dell'acido laurinico e del reattivo di Twitchell [4], ed è stato riscontrato in quest'ultima sostanza un soppressore del tipo desiderato, che si è dimostrato di notevole vantaggio in molti casi [5].

Si è pensato quindi di esaminare il comportamento polarografico dell'«Aerosol» OT in vista del suo possibile impiego sia come soppressore di massimi, sia come agente atto a portare in soluzione sostanze insolubili nei comuni solventi usati in polarografia, per renderne così possibile l'indagine.

Parte sperimentale. — Per la misura dell'attività interfasale dell'«Aerosol» OT è stato seguìto il procedimento solito della graduale soppressione dei massimi dell'ossigeno disciolto in soluzioni diluite di elettrolita base (fig. 1, curve 5, 6 e 7). In una prima serie di misure si è usata la solita disposizione polarografica [6] e

(1) G. E. Proske, «Angew. Chem.», *61*, 70-3 (1949).

(2) H. Hohn, «Z. Elektrochem.», *43*, 127–39 (1937); E. Mnich, «Z. Elektrochem.», *44*, 132–4 (1938).

(3) J. Heyrovský, *Polarographie*. Wien: Springer–Verl., 1941; I. M. Kolthoff e J. J. Lingane, *Polarography*. New York: Interscience Publishers, (1941).

(4) V. Capitanio e A. Pittoni, «Atti reale ist. Veneto sci.», Pt. 2, *100*, 209–29 (1941).

(5) Lavori non pubblicati.

(6) G. Semerano e E. Gagliardo, *Quantitative determination of iron, lead and zinc in zinc ores. A rapid polarographic method*. In corso di pubblicazione sull'«Anal. Chem.».

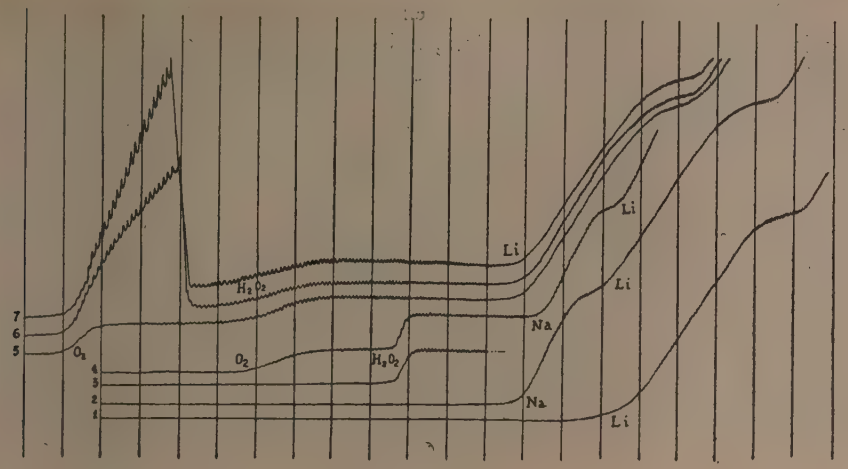


Fig. 1.

una soluzione di cloruro di litio $2{,}6 \cdot 10^{-3}$ n., che, secondo i dati della letteratura (7), rappresenta una delle soluzioni più indicate per lo sviluppo di un elevato massimo di corrente dell'ossigeno.

TABELLA I.

Concentrazione «Aerosol» OT (μ mole/l.)	H (in mm.)	ΔH (in mm.)	$\frac{\Delta H}{c}$ (in mm./μ mole/l.)
0	53,9	—	—
0,75	51,1	2,8	3,73
1,51	45,3	8,8	5,69
2,26	41,6	12,3	5,45
3,03	37,6	16,3	5,38
3,78	29,9	24,0	6,35
4,54	22,8	31,1	6,85
5,29	16,5	37,4	7,08
6,06	11,1	42,8	7,08
6,81	8,2	45,7	6,71
7,57	5,1	48,8	6,44
8,32	3,9	50,0	6,01
9,09	2,5	51,4	5,66
9,84	1,7	52,2	5,31

(7) E. VARASOVA, «Collection Czechoslov. Chem. Communs.», 2, 8-30 (1930).

I dati della Tabella I e la curva della fig. 2 indicano che in questo caso per la relazione tra la caduta del massimo, ΔH, e la concentrazione di « Aerosol », c, esiste una relazione che si discosta alquanto da quella generalmente riscontrata in casi simili [8] e che obbedisce all'equazione $\log \frac{H_o}{H} = Kc$ dove H_o indica l'altezza del massimo (corrente di diffusione esclusa) per $c = 0$, H le altezze del massimo alle rispettive c, e K è la costante caratteristica del processo, indicata col nome di « coefficiente soppressivo specifico ». Con una certa approssimazione si può invece parlare di una relazione quasi lineare lungo la maggior parte del tratto di soppressione.

Abbastanza soddisfatta è risultata invece l'equazione precedente nel caso di una seconda serie di misure eseguita usando cloruro di litio 10^{-2} n., cioè una soluzione più concentrata dello stesso elettrolita base, e ciò allo scopo di stabilire l'influenza della forza ionica della soluzione sulle proprietà capillari dell'« Aerosol » OT.

Tabella II.

Concentrazione « Aerosol » OT (in μ mole/l.)	H (in mm.)	$\log \frac{H_o}{H}$	$K \cdot 10^{-5}$
0	57,7		
0,75	36,4	0,200	2,7
1,51	21,2	0,436	2,7
2,26	15,2	0,579	2,9
3,03	10,7	0,731	2,6
3,78	7,5	0,886	2,4
5,29	2,1	1,314	2,4
		media . . .	2,6

Dalla Tabella II risulta per K il valore $2{,}6 \cdot 10^5$; l'OT ha quindi un'attività interfasale leggermente superiore a quella del reattivo di Twitchell ($2{,}5 \cdot 10^5$), che finora non era stata ancora superata.

Un confronto fra i dati della Tabella I e II si può istituire, fino a un certo punto, ricorrendo, come è stato fatto talvolta in passato [9], all'esame delle concentrazioni di sostanza attiva necessarie per ridurre a metà l'altezza del massimo (fattore di semisoppressione del massimo). Poichè nella soluzione di cloruro di litio 10^{-2} n. è sufficiente una concentrazione tre volte minore di quella richiesta nella soluzione $2{,}6 \cdot 10^{-3}$ n., se ne deve concludere che, a quella concentrazione di elettrolita di fondo l'OT è molto più attivo. Ciò si accorda con i risultati delle

(8) G. Semerano, « Arch. sci. biol. (Italy) », *20*, 329-42 (1934).
(9) B. Rayman, « Collection Czechoslov. Chem. Communs. », *3*, 314-27 (1931).

misure di tensione interfasale e con le considerazioni generali che si possono fare tra attività di superficie e forza ionica di soluzioni diluite.

Si è voluto successivamente stabilire l'effetto prodotto dall'OT, in concentrazioni superiori a quelle richieste per la soppressione del massimo dell'ossigeno, sull'altezza del gradino dell'ossigeno stesso. A questo scopo si è elettrolizzata una soluzione di cloruro di litio $2{,}6 \cdot 10^{-3}$ n. avente una concentrazione in OT $2{,}1 \cdot 10^{-3}$ m. Il polarogramma ottenuto (fig. 1, curva 4) era fornito di tre gradini, il primo simile a quello dovuto alla riduzione dell'ossigeno, ma a $-0{,}7$ V. ca., il secondo e il terzo molto ben sviluppati con gomiti netti a ca. $-1{,}3$ V. e $-2{,}1$ V. rispettivamente. Se il terzo gradino era facilmente attribuibile alla deposizione del sodio dell'OT (teorico 5,18%), data la notevole concentrazione dell'«Aerosol» nella soluzione, non si poteva senz'altro ammettere che i primi due gradini fossero dovuti alla riduzione dell'ossigeno e dell'acqua ossigenata, sia per il notevole spostamento dei potenziali di riduzione, sia per la nettezza del gradino che avrebbe dovuto essere attribuito all'acqua ossigenata e che invece di solito è molto stirato, in accordo con il carattere di irreversibilità ascritto al secondo dei due processi consecutivi di riduzione dell'ossigeno al catodo a goccia di mercurio [10]. Per individuare con sicurezza i gradini osservati, si è operato nel modo seguente: una soluzione $2{,}1 \cdot 10^{-3}$ m. di OT in cloruro di litio $2{,}6 \cdot 10^{-3}$ n. è stata disaerata con idrogeno. Elettrolizzando la soluzione, si ottenne come sola differenza tra curva base del cloruro di litio (fig. 1 curva 1) e quella del cloruro di litio più «Aerosol» (curva 2) il gradino dovuto alla deposizione del sodio dell'imbibitore.

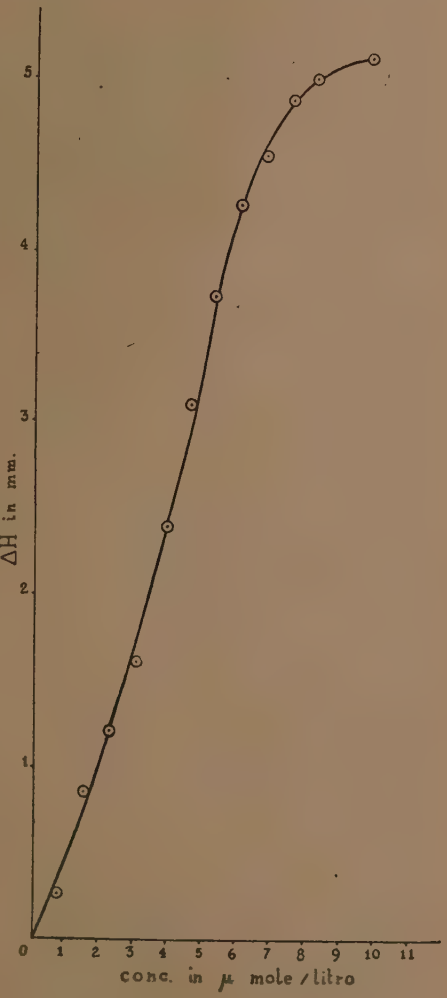


Fig. 2.

(10) J. HEYROVSKÝ, «Casopis Ceskoslov. Lekarnictva», 7, 242-52 (1927); I. M. KOLTHOFF e C. S. MILLER, «J. Am. Chem. Soc.», *63*, 1013-7 (1941).

Lasciata qualche tempo all'aria la soluzione, sono ricomparsi i gradini in questione (curva 4); alla soluzione nuovamente disaerata con idrogeno, è stata aggiunta una quantità di acqua ossigenata pari a quella che si ottiene nella riduzione dell'ossigeno disciolto nelle soluzioni lasciate a contatto dell'aria; tale aggiunta ha dato un gradino allo stesso potenziale, della stessa forma e della stessa altezza di quello attribuito a ragione in precedenza all'acqua ossigenata (curva 3).

Successivamente si è esaminato, aggiungendo progressivamente l'OT, con quale andamento i due gradini si spostano verso potenziali più negativi. Si è trovato che il gradino dell'ossigeno viene a poco a poco schiacciato e stirato in modo che, per una certa concentrazione, si ha una salita uniforme e molto lenta della corrente da 0 V. fino al potenziale di scarica dell'acqua ossigenata; a concentrazioni maggiori di OT il gradino dell'ossigeno ritorna ad essere più netto e si forma il gradino a ca. —0,7 V. Il gradino dell'acqua ossigenata si sposta gradualmente, sebbene in misura minore, ma nello stesso tempo si raddrizza, fino a diventare così netto da essere attribuito ad un processo rigorosamente rapido e reversibile.

Le esperienze furono ripetute in cloruro di litio 10^{-2} n., 10^{-1} n. e n. e i risultati furono analoghi. La tabella III riporta i valori ottenuti in cloruro di litio 10^{-1} n.: l'altezza del primo gradino è misurata da 0 a —0,8 V., quella del secondo da —0,9 a —1,4 V. (rispetto all'E. C. N.).

TABELLA III.

Concentrazione « Aerosol » OT (in μ mole/l.)	Altezza del gradino dell'ossigeno (in mm.).	$\pi_{1/2\,O_2}$	Altezza del gradino dell'acqua ossigenata (in mm.)	$\pi_{1/2\,H_2O_2}$
0	13,5	—0,11	8,9	—0,96
0,94	12,9	—0,13	10,5	—1,01
2,8	13.4	—0,14	10,5	—1,05
4,7	12,0	—0,29	11,7	—1,12
7,0	10,6	—0,40	13,0	—1,19
9,4	10,2	—0,63	13,7	—1,25
11,8	10,0	—0,69	13,8	—1,27
14,1	10,0	—0,70	14,0	—1,28
16,5	9,6	—0,71	14,2	—1,31

Per la soluzione n./1 di cloruro di litio, la variazione dell'altezza dei due gradini con la concentrazione di OT non è risultata così netta.

Ripromettendomi di studiare a fondo le modalità dell'influenza esercitata dall'« Aerosol » OT sul processo di deposizione dell'acqua ossigenata, ho ritenuto sin da ora opportuno richiamare l'attenzione sull'interessante fenomeno osservato, che con tutta attendibilità è accompagnato da altre modificazioni dell'attività del perossido d'idrogeno.

Un'influenza catalitica sulla riduzione dell'acqua ossigenata al catodo a goccia di mercurio era stata osservata, alcuni anni or sono, da Strnad per gli ioni Pb^{++} e sopratutto da Brdicka e Tropp per le sostanze coloranti del sangue [11]: il fenomeno qui osservato presenta però caratteristiche ben differenti, cosicchè un confronto appare senz'altro desiderabile.

Per finire si riferisce sulla determinazione del contenuto in sodio del campione di « Aerosol » OT eseguito per via polarografica con il procedimento dell'aggiunta tarata; l'analisi ripetuta due volte ha dato i risultati 4,81 e 4,79 % media 4,8 %; da essi si deduce che il campione di OT aveva un contenuto del 92,8 % di sostanza attiva.

Ringrazio vivamente la American Cyanamid Company (30 Rockefeller Plaza, New York 20, N. Y.) per aver messo gentilmente a mia disposizione un campione del suo prodotto e avermi fornito utili indicazioni sul suo uso.

Chimica inorganica. — *Sulla struttura cristallina del composto* $PrGe_2$ [*]. Nota di ALDO IANDELLI, presentata [**] del Socio L. ROLLA.

Nelle leghe fra praseodimio e germanio, il composto più ricco di germanio, che si trova nel diagramma di stato, è quello corrispondente alla formula $PrGe_2$, col 50,74 % di Ge. La sua struttura cristallina, che è stato possibile determinare completamente, verrà descritta nel presente lavoro; mentre i risultati dell'analisi termica e micrografica del sistema saranno riferiti in un secondo tempo.

Il composto $PrGe_2$ ha una temperatura di fusione di 1570 °C., e forma col germanio un eutettico a 825 °C. Esso presenta una durezza ed una fragilità notevoli, si forma dagli elementi con grande sviluppo di calore; ed è molto stabile di fronte ai reattivi chimici ordinari, venendo attaccato soltanto dall'acqua regia. I campioni usati nella presente ricerca sono stati analizzati, come le altre leghe Pr–Ge, distillando dalla soluzione in acqua regia il tetracloruro di germanio, precipitando successivamente il germanio come solfuro e pesandolo come ossido. Nella soluzione rimasta dopo distillazione, il praseodimio era poi separato come ossalato e pesato come Pr_6O_{11}.

Nelle leghe Pr–Ge a composizione più ricca di Ge del 50,7 %, il composto $PrGe_2$ si separa sotto forma di laminette cristalline, di circa mezzo mm. di larghezza, e di 0,1 mm. di spessore, in cavità che si formano nella solidificazione della lega fusa. Fotogrammi di Laue eseguiti col fascio di raggi X perpendicolare al piano della lamina mostrano la simmetria D_{4h} e l'appartenenza del composto al sistema tetragonale. La determinazione della grandezza della cella elementare è stata quindi successivamente effettuata con fotogrammi del cristallo rotante, eseguiti nelle direzioni [100], [110], e [001]. I dati ottenuti sono riuniti nelle

(11) F. STRNAD, « Collection Czech. Chem. Communs. », *11*, 391–402 (1939); R. BRDICKA e C. TROPP, « Biochem. Z. », *289*, 301–12 (1937); « Angew. Chem. », *50*, 192 (1937).

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto chimico dell'Università di Genova col sussidio del Consiglio Nazionale delle ricerche.

(**) Nella seduta dell'8 giugno 1949.

tabelle I, II, III; e da esse si rileva che le dimensioni della cella tetragonale sono, entro l'esattezza fornita dal metodo usato: $a_0 = 4{,}24$ A.; $c = 14{,}15$ A.; e che la cella non ha le basi centrate, essendo il periodo nella direzione [110] esattamente uguale ad $a_0 \cdot \sqrt{2}$.

TABELLA I.

Cristallo rotante di $PrGe_2$
secondo [100]. *Radiazione* K Mo.

Linea n.	μ	Periodo
1	9° 36′	4,25
2	19° 38′	4,22
3	30° 1′	4,25
4	41° 52′	4,25

Media : 4,245 A.

TABELLA II.

Cristallo rotante di $PrGe_2$
secondo [110]. *Radiazione* K Mo.

Linea n.	μ	Periodo
1	6° 44′	6,05
2	13° 35′	6,03
3	20° 40′	6,02
4	28° 53′	5,94
5	36° 53′	5,90

Media : 5,990 A.

$5{,}99 \cdot \sqrt{2} = a_0 = 4{,}236$ A.

TABELLA III.

Cristallo rotante di $PrGe_2$
secondo [001]. *Radiazione* K Cu.

Linea n.	μ	Periodo
1	6° 17′	14,07
2	12° 24′	14,35
3	18° 45′	14,41
4	25° 51′	14,12
5	33° 4′	14,10
6	41° 40′	13,89

Media : 14,15 A.

La determinazione del gruppo spaziale può essere ottenuta assegnando gli indici alle macchie dei fotogrammi di Laue, del cristallo rotante nelle tre direzioni, e ai Debye ottenuti sia sulla polvere delle lamine cristalline che su quella del blocchetto di lega a composizione stechiometrica. È possibile in tutti i casi dare alle interferenze X degli indici *hkl*, che mostrano le seguenti regolarità: la somma $h+k+l$ è sempre pari; se $l=0$, anche h e k sono pari; se $h=k$, $2h+l$ è multiplo di 4; ed in generale $2h+l$ è multiplo di 4 o dispari. Queste regole di estinzione sono caratteristiche del gruppo spaziale D_{4h}^{19}, al quale quindi si può assegnare il cristallo.

Il fotogramma delle polveri, i cui risultati sono riportati nella tabella IV, permette di fissare con maggior precisione i valori dei parametri della cella elementare ad $a_0 = 4{,}253$ A., $c = 13{,}940$ A., $c/a = 3{,}277$. La densità del composto è stata determinata su un campione ottenuto per fusione, avente secondo l'analisi una composizione leggermente spostata (0,4%) verso il germanio rispetto a quella del composto, e contenente infatti, all'esame micrografico, una piccolissima quantità di germanio libero. La lega presentava inoltre delle piccole, ma numerose cavità, che rendono inesatta la determinazione della densità. Il metodo migliore è stato quello di far condensare nel vuoto, sulla lega contenuta in un picnometro, il liquido picnometrico (xilolo). Il valore ottenuto in tal modo per la densità di $PrGe_2$ è di 7,24 a 15° C.; e da questo e dal volume della cella elementare si ricava un numero di molecole per cella di $3{,}88 \cong 4$. Col valore 4 si calcola viceversa una densità X di 7,48.

Nel gruppo spaziale D_{4h}^{19} sono possibili allora le seguenti disposizioni per i 4 atomi di Pr e gli 8 di Ge (con la denominazione delle tabelle internazionali[1]):

	1)	2)	3)	4)	5)	6)
4 atomi di Pr in	(*a*)	(*b*)	(*a*)	(*b*)	(*a*)	(*b*)
8 » » Ge »	(*c*)	(*c*)	(*d*)	(*d*)	(*e*)	(*e*)

Si possono escludere facilmente le disposizioni 1), 2), 3), 4) sia per una delle regole di estinzione già vedute, sia per ragioni dimensionali, perchè risulterebbero delle distanze fra atomi di Ge troppo piccole (14% in meno) di quelle corrispondenti ai raggi atomici normali; e rimangono così solo le disposizioni 5) e 6) che sono equivalenti fra loro, la seconda corrispondendo ad uno spostamento dell'origine delle coordinate.

Le coordinate finali risultano così le seguenti:

4 Pr in: 000 ; $0\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}\,0\,\frac{3}{4}$

8 Ge in: $00z$; $00\bar{z}$; $0\,\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+z\right)$; $0\,\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-z\right)$

$\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+z\right)$; $\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-z\right)$; $\frac{1}{2}\,0\left(\frac{3}{4}+z\right)$; $\frac{1}{2}\,0\left(\frac{3}{4}-z\right)$

e mentre quelle del Pr risultano fissate, le posizioni del Ge dipendono da un parametro, il cui valore deve essere stabilito.

(1) Internationale Tabellen zur Bestimmung von Kristallstrukturen-Gebrüder Borntraeger/Berlin 1935

TABELLA IV.

Fotogramma delle polveri di $PrGe_2$.

Radiazione K *del rame. Diametro del film 114,6 mm. Spessore della bacchetta 0,5 mm.*

Riga n.	$\sin^2\theta \cdot 10^4$ osservato	$\sin^2\theta \cdot 10^4$ calcolato	Indici *h k l*	Intensità osservata	Intensità calcolata per un valore di *z* di: 0,395	0,400	0,405	0,410	0,415	0,420	0,425
1	350	358	101	*md*	11,6	11,2	10,9	10,5	10,1	9,8	9,6
2	490	489	004	*d*	4,7	5,3	6,1	7,0	8,2	9,5	11,1
3	602	602	103	*f*	36,8	34,1	31,3	28,7	26,1	23,5	21,3
4	780	777	112	*fff*	54,5	57,6	60,7	63,7	66,7	69,7	72,6
5	1087	1091	105	*ff*	36,9	37,2	36,9	36,0	34,4	32,5	30,2
6	1314	1309	200	*f-ff*	32,6	32,6	32,6	32,6	32,6	32,6	32,6
7	1676	1667	121	*d*	9,4	9,1	8,9	8,6	8,3	8,1	7,9
8	1751	1755	116	*dd*	9,4	7,9	6,7	5,9	5,6	5,7	6,2
9	1817	1798	204	*f*	18,4	21,7	25,3	28,9	32,6	35,8	38,7
		1825	107								
10	1908	1911	123	*mf*	30,4	28,3	26,1	24,0	22,0	19,9	18,1
11	1947	1956	008	*dd*	8,5	7,1	5,7	4,4	3,3	2,5	1,9
12	2400	2400	215	*ff*	37,5	37,8	37,5	36,6	35,1	33,2	30,9
13	2614	2618	220	*m*	18,3	18,3	18,3	18,3	18,3	18,3	18,3
14	2832	2873	109	*dd*	2,3	2,9	3,8	5,2	7,1	9,3	11,6
15	2990	2976	301	*ddd*	2,5	2,5	2,4	2,3	2,2	2,2	2,1
16	3127	3107	224	*f-ff*	19,7	23,4	27,4	31,2	34,9	38,0	40,4
		3134	217								
17	3242	3221	303	*m*	32,4	28,0	23,6	19,6	16,1	13,3	11,2
		3265	208								
18	3405	3395	312	*ff*	32,9	34,6	36,4	38,1	39,9	42,6	43,2
19	3715	3709	305	*ff*	41,1	42,1	41,1	38,3	34,1	29,2	24,2
		3711	1.1.10								
20	4057	4025	1.0.11	*ddd* ?	3,1	2,1	1,6	1,5	1,8	2,4	3,5
21	4114	4112	219	*d*	3,4	4,3	5,7	7,8	10,5	13,7	17,2
22	4297	4285	321	*dd*	5,2	5,1	4,9	4,8	4,6	4,5	4,4
23	4365	4373	316	*d*	9,8	8,2	6,9	6,2	5,9	5,9	6,4
24	4451	4443	307	*d*	6,1	7,4	8,7	9,9	11,0	11,8	12,2

Segue: TABELLA IV.

Riga n.	$\text{sen}^2\theta \cdot 10^4$		Indici $h\ k\ l$	Intensità							
	osservato	calcolato		osservata	calcolata per un valore di z di:						
					0,395	0,400	0,405	0,410	0,415	0,420	0,425
25	5029	5018	325	*f*	23,6	23,8	23,6	23,1	22,1	20,9	19,5
26	5244	5236	400	*md*	11,9	11,9	11,9	11,9	11,9	11,9	11,9
27	—	5335	2.1.11	—	5,7	4,0	3,1	2,9	3,3	4,5	6,6
28	—	5493	1.0.13	—	9,5	7,2	5,0	3,2	2,1	1,5	1,5
29	5716	5710	2.0.12	*m*	10,1	14,3	18,4	21,9	23,7	23,3	23,4
30	6014	6013	332	*m*	14,1	14,8	15,6	16,3	17,1	17,8	18,5
31	6336	6329	3.1.10	*ff*	49,6	51,3	49,6	45,1	38,5	30,8	23,3
32	6537	6546	240	*f*	27,9	27,9	27,9	27,9	27,9	27,9	27,9
33	—	6645	1.1.14	—	3,5	4,8	7,5	11,9	16,7	23,2	27,0
34	7036	7019	2.2.12	*ff*	21,3	27,2	33,6	39,2	43,1	44,8	44,3
		7035	424								
35	7189	7193	408	*d*	21,8	18,2	14,7	11,4	8,8	6,7	5,2
36	7998	8039	419	*d*	5,7	7,0	9,2	12,5	16,7	21,7	27,0
37	—	8213	501	—	8,2	8,0	7,8	7,5	7,3	7,2	7,0
		8213	431								
38	8480	8457	503	*fff*	154,2	143,6	127,0	106,2	85,2	67,0	53,9
		8457	433								
		8502	428								
		8513	2.1.15								
39	8621	8631	512	*ff*	56,8	59,8	62,8	65,6	68,6	71,5	75,5
40	8931	8946	505	*fff*	147,5	148,4	147,5	140,0	128,9	115,4	101,3
		8946	435								
		8947	3.3.10								
41	9223	9262	1.4.11	*ff*	39,4	40,1	52,3	75,6	108,6	120,8	167,2
		9263	3.1.14								

$$\text{sen}^2\theta = 0{,}032728\,(h^2 + k^2) + 0{,}0030564\,l^2$$

Una limitazione al campo di variabilità di z può essere trovato con un criterio geometrico, immaginando che gli atomi di Pr e Ge conservino, in prima approssimazione, le dimensioni che hanno nei reticoli dei due elementi separati. Come risultato del calcolo si trova che deve essere $0{,}4044 \leq z \leq 0{,}4131$; per

una valutazione precisa essendo necessario calcolare l'intensità delle riflessioni osservate. Il calcolo è stato eseguito per tutti gli indici che compaiono sul fotogramma delle polveri, e per i valori di z di: 0,395; 0,400; 0,405; 0,410; 0,415; 0,420; 0,425, ed è riportato come risultato nella tabella IV.

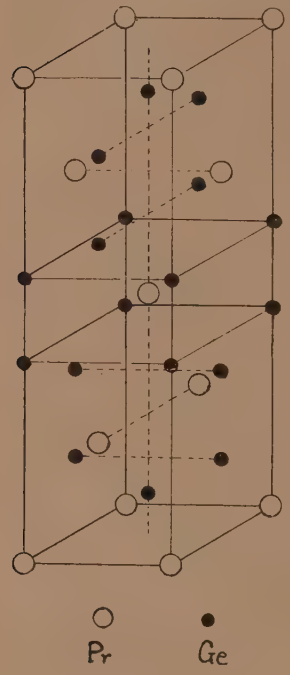


Fig. 1.

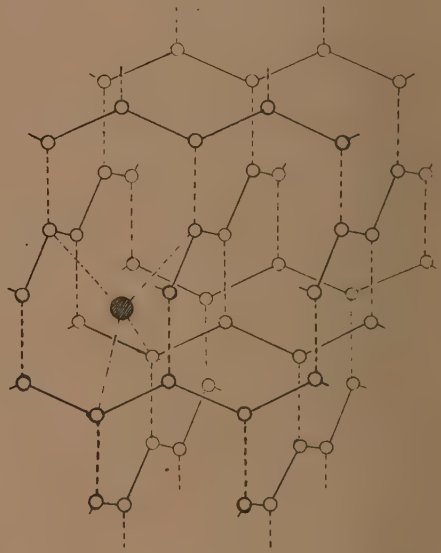


Fig. 2.

Dal confronto delle intensità osservate con quelle calcolate, si possono escludere i valori del parametro al difuori di quelli nel campo fra 0,405 e 0,415; e si può precisarlo dal confronto diretto, eseguito sul fotogramma, di coppie di righe di intensità quasi uguale, scelte possibilmente per valori vicini di θ. Per esempio, nella coppia 105–200, la 200 è notevolmente più forte della 105, il che è in accordo con un valore di z fra 0,405 e 0,41, piuttosto che fra 0,41 e 0,415. La 204 + 107 ha intensità minore della 200; la 105 ha intensità leggermente maggiore della 312, ed anche qui dovrebbe essere $0{,}405 \leq z \leq 0{,}410$. Viceversa la 219 è assai più forte della 316, e non si può accordare con un valore minore di 0,410; ecc. Come risultato finale, si trova che il valore di z, che rende conto nel modo migliore di tutte le intensità osservate, è di $z = 0{,}410$, o di poco inferiore; e si può quindi prenderlo come il valore più probabile per il parametro che definisce la posizione degli atomi di Ge.

Riassumendo: il composto $PrGe_2$ cristallizza in un reticolo tetragonale, la cui cella elementare è rappresentata nella fig. 1, e che ha le seguenti dimensioni: $a_0 = 4{,}523$ A., $c = 13{,}940$ A. Le posizioni dei 4 atomi di Pr e degli 8 di Ge contenuti nella cella sono quelle indicate precedentemente, col valore del parametro

z di 0,41. Nel reticolo, ogni atomo di Ge ha due atomi della stessa specie vicini, disposti a formare un triangolo isoscele schiacciato, alla distanza di 2,34 A., ed un terzo, normalmente alla base del triangolo, a 2,51 A. Ogni atomo di Pr ha intorno 4 atomi della stessa specie a 4,08 A., ed altri 4 a 4,25 A.; 4 Ge a 3,08 A., ed altri 8 a 3,26 A. Le distanze Pr–Pr e Ge–Ge nei reticoli dei due elementi sono rispettivamente di 3,65 e 2,45, e quella Pr–Ge calcolata come media è di 3,05. Si vede quindi che le distanze Pr–Ge e Pr–Pr sono aumentate (la seconda fortemente), mentre quella Ge–Ge risulta diminuita, rispetto a quelle dei due reticoli separati; cosa che si verifica in diversi altri casi del genere. La struttura appare quindi determinata essenzialmente dal comportamento degli atomi di Ge fra loro. Essi costituiscono una serie di catene a zig–zag disposte in piani orizzontali; ed estendentesi in direzioni parallele fra loro in ogni piano, e perpendicolari a quelle dei piani adiacenti. Nella fig. 2 è rappresentata da una porzione del reticolo, corrispondente a 4 celle elementari, e nella quale per semplicità è stato lasciato soltanto un atomo di Pr; collegando con segmenti gli atomi di Ge più vicini (a 2,34 A.), e con trattini le coppie corrispondenti alla distanza di 2,51 A. Gli atomi di Pr riempiono le cavità del reticolo parziale del Ge.

Il reticolo di $PrGe_2$ offre una buona illustrazione dei criteri che si presentano come abbastanza naturali per interpretare il comportamento degli elementi più elettropositivi nei composti intermetallici. Il calcio forma anch'esso col Ge un composto di formula $CaGe_2$, isomorfo col siliciuro $CaSi_2$ [2]. Gli atomi di Ge sono disposti in questo caso in strati, fra i quali sono inseriti gli atomi Ca; ed ogni Ge è al vertice di una piramide trigonale formata con altri 3 atomi Ge. Una tale struttura è interpretabile (come quella del $CaSi_2$ [3], ammettendo che l'atomo di Ca si ionizzi, cedendo i suoi due elettroni ai due Ge. Ogni atomo di germanio acquista così la configurazione elettronica $s^2 p_x p_y p_z$, ed è in grado di stabilire tre legami p con gli atomi vicini. Se al calcio si sostituisce un'altra specie atomica che per ionizzazione dia più di due elettroni per atomo (e non più di 4), ogni atomo di germanio non ha più disponibili i tre orbitali p per effettuare il legame con gli atomi vicini; ed il numero di coordinazione deve abbassarsi da 3 a 2, con una conseguente variazione del reticolo, che permetta lo stabilirsi di catene –Ge–Ge–Ge–. Questo è quanto appunto si verifica nel caso di $PrGe_2$.

Una variazione di struttura perfettamente parallela si ha per i composti del silicio, di formula MSi_2 con M = Ca , Th , Ce , U , Pu [4]. Mentre $CaSi_2$ è isomorfo con $CaGe_2$, tutti gli altri appartengono allo stesso tipo di reticolo di $PrGe_2$. Per questi ultimi però risulta molto più difficile la localizzazione delle posizioni degli atomi metalloidici, per il piccolo valore del fattore atomico del Si, e quello generalmente maggiore del fattore del metallo (Th , U , Pu). Nel caso di $ThSi_2$, in cui è stato effettivamente eseguito il calcolo delle intensità da Brauer e Mitius, i resultati sperimentali lasciano indeterminato il valore di z fra 0,404 e 0,421. Gli

(2) H. J. WALLBAUM, *Die Naturwissenschaften* 32, 76 (1944).

(3) A. IANDELLI, «Gazzetta chim. ital.» 79, 70 (1949).

(4) J. BÖHM, O. HASSEL, «Z. anorg. allgem. Chemie», *160*, 152 (1927): $CaSi_2$; G. BRAUER e A. MITIUS, «Z. anorg allgem. Chemie», *249*, 324 (1942): $ThSi_2$; W. H. ZACHARIASEN, «Z. anorg. allgem. Chemie», MDDC, 67: $CeSi_2$, USi_2, $PuSi_2$.

AA. tedeschi scelgono perciò $z = 0{,}4165$ col criterio di rendere uguali le tre distanze più piccole Si–Si, e contemporaneamente tutte quelle Th–Si fra loro. Un criterio simile non è fondato che su quella « tendenza al raggiungimento del più alto numero di coordinazione » caratteristica dei metalli, ma che molto frequentemente non vale per i composti intermetallici; e d'altra parte sarebbe facile constatare che per gli altri siliciuri $CeSi_2$, USi_2, $PuSi_2$ non potrebbe essere applicato, per il diverso valore del rapporto assiale. Sembra quindi probabile che anche in questi composti il numero di coordinazione Si–Si sia 2, e che il meccanismo di formazione del reticolo sia lo stesso di quello descritto per $PrGe_2$.

Geologia. — *Sulla tettonica degli altipiani del Gran Sasso d'Italia* (*). Nota di JEAN DEMANGEOT, presentata (**) dal Socio R. FABIANI.

Un esame accurato della carta tettonica che ho rilevato permette di distinguere *5 fasi* nell'evoluzione tettonica della regione considerata.

Tale carta è stata così costruita: per i fogli di Aquila e di Teramo il rilevamento è intieramente originale, ed è stato eseguito alla scala di 1:50.000. Per il foglio di Sulmona e la regione situata a oriente della linea Barisciano–Civitaretenga, si sono verificate e completate talvolta tutte le dislocazioni segnalate dal Beneo. Al contrario, fra questo limite e l'Aterno, abbiamo riferito esclusivamente il rilevamento del precitato Autore.

I FASE. – La tettonica più antica che sia dato di riconoscere con l'analisi strutturale è rivelata da qualche faglia e cicatrice di milonite completamente livellate da un'erosione antica e appartengono generalmente alla direzione meridiana o radiale (Cecco d'Antonio; Piano Viano). La età precisa di questa I fase ci sfugge completamente, ma ci riserviamo di tornare su questo problema. Non si conosce che il termine successivo, e cioè la seconda fase. I movimenti anteriori rivelati dalle discordanze stratigrafiche non hanno lasciato, per quanto ci risulta, nessuna traccia strutturale riconoscibile.

II FASE. – Consiste in un'ampia ondulazione con direzione abruzzese; i suoi tratti più salienti appaiono l'anticlinorio della Catena Abruzzese ed il sinclinorio delle conche Aquilane (da S. Vittorino a Navelli). Vi si possono attribuire alcune anticlinali intermedie: Monte Bolza, Serra della Natrella, Cima delle Serre, sinclinale di Campo Imperatore.

È notevole il fatto che molte di tali anticlinali siano accompagnate a S da faglie della medesima direzione e di fronte tirrena: così ad esempio le faglie

(*) Lavoro eseguito negli Istituti di Geologia e Geografia della Università di Roma. Uno studio più dettagliato, corredato da illustrazioni e bibliografia è in corso di pubblicazione in « Contributi delle ricerche eseguite dall'Istituto di Geologia di Roma » in C.N.R., Roma 1949.

(**) Nella seduta dell'8 giugno 1949.

Collebrincioni – Filetto (14 Km.) e Cecco d'Antonio – Licciardi; essendo successive alla compressione, testimoniano un inizio di distensione secondo l'asse minore della regione, attribuibile all'inarcamento della catena.

Esisterebbe dunque una fase II bis.

Molto verosimilmente, l'orogenesi II ha avuto principio nel Miocene superiore e sarebbe responsabile della formazione dei conglomerati Mp [vedi abbreviazioni indicate sul foglio 146 (Sulmona) della Carta Geologica d'Italia] del versante Adriatico. Questo movimento è proseguito nel Pliocene, poiché questi stessi conglomerati sono coinvolti nell'inarcamento abruzzese: si tratterebbe precisamente della fase II bis.

III FASE. – La struttura prodotta dalla seconda fase è stata in seguito affatto deformata per un fagliamento obliquo generalizzato, di direzione appennina. Dalla carta appare chiaro come queste nuove direttrici colpiscano obliquamente la catena e le conche: gli esempi di dettaglio sono numerosi. Così la faglia Bazzano–Fossa, vero e proprio diaframma della Conca orientale d'Aquila; la faglia M. Stabiata–Madonna d'Apparo che taglia quella di Collebrincioni; le piccole faglie che troncano la cima delle Serre, la Serra della Natrella, il M. Bolza, ecc.

L'esame delle fronti di faglia non è meno interessante. Esso prova la esistenza d'un curioso movimento di torsione: il compartimento S. Demetrio–S. Stefano si è inclinato verso SO (*faglie adriatiche*) ed il compartimento Beffi–Navelli–Ofena verso NE (*faglie tirrene*). Il che comporta in quest'ultimo caso il sollevamento del Sirente, e per il precedente il sollevamento della catena verso Campo Imperatore; correlativamente un allungamento dell'asse minore: nei piani a N di Aquila invece non possediamo nessun indizio d'una consimile torsione.

Questi movimenti della III fase sono per definizione successivi alla II fase, poichè le dislocazioni si immergono sotto al Quaternario antico delle conche: si potranno approssimativamente datare intorno al Pliocene medio o superiore. Secondo ogni evidenza si tratta di un movimento post–Piacenziano ben determinato sul versante adriatico; pertanto non possediamo ancora nessuna prova locale sicura di questa identità.

IV FASE. – Ed è proprio allora che sopraggiungono i movimenti più singolari di questo diastrofismo. Essi consistono in un ripiegamento generalizzato con direzione radiale, dunque in pratica perpendicolare alle dislocazioni appennine della III fase. Questa ondulazione implica naturalmente un raccorciamento dell'asse maggiore della regione, che potrebbe essere in correlazione con un aumento di curvatura e d'altitudine della catena.

Le dorsali di questa ondulazione (le dislocazioni antistanti essendosi nuovamente mosse) sono caratterizzate dal fatto che le faglie abruzzesi e appennine sono state ringiovanite tettonicamente e le zolle sensibilmente sollevate: queste ultime sono zone tettonicamente positive e topograficamente corrispondono ad aree montuose. Dal Passo Capannelle a Ofena se ne contano nove di importanza differente. La quarta, sesta e nona hanno particolare interesse per aver chiuso,

separandole, le conche di Aquila, di Barisciano–S. Demetrio ne' Vestini, di Navelli–Civitaretenga.

Topograficamente le gronde sinclinali sono evidentemente palesate da allineamenti di depressioni e da valichi che facilitano grandemente l'insediamento umano; esse costituiscono luoghi preferenziali per lo stabilirsi dei villaggi. Tettonicamente sono prodotte dalla stasi locale delle faglie abruzzesi o appennine. Sono al contrario disseminate da dislocazioni radiali, sia faglie (Fosso S. Giuliano), sia strette zone sprofondate (Fosso del Ferone), sia depressioni chiuse (Piano S. Marco–Regione Locce) ulteriormente carsificate. La gronda sinclinale Paganica–Assergi presenta un'ampiezza affatto eccezionale accentuata dal bacino di Camarda.

Quale l'età di questi movimenti? Ad Aquila, Barisciano, e Civitaretenga le dorsali hanno piegato i conglomerati *q* delle conche, a S. Demetrio ne' Vestini il lacustre si mostra fagliato (sul prolungamento della gronda sinclinale di S. Stefano); lo stesso a S. Gregorio. Infine sul Campo Imperatore orientale il riempimento fluvio–glaciale è rotto da faglie radiali molto nette. Tutto prova dunque che la IV fase è quaternaria, ma senza che si possano avanzare ulteriori precisazioni. D'altronde questa è un'opinione già divenuta classica per l'Appennino Centrale.

V Fase. – Ma con questo non si è terminato, poichè lo studio del terreno prova che queste radiali sono state deformate successivamente sia in senso verticale sia in senso tangenziale. Effettivamente le gronde sinclinali sono talvolta bruscamente serrate da ostacoli montuosi dietro i quali esse continuano, e che può darsi risultino da un ravvivamento molto tardivo di dislocazioni più antiche: per esempio il monte Cappucciata che interrompe la sinclinale di Ofena, il M. Bolza che interrompe quella di S. Stefano, la faglia d'Aragno, quella del M. Stabiata. Altrove, tra Navelli e S. Stefano, si constata che le gronde sinclinali sono state disinnestate con spostamento orizzontale di uno a 2 Km. verso ovest. Ovunque intorno alle conche il Quaternario appare fortemente raddrizzato (Barisciano) o fagliato in direzione appennina (S. Pio delle Camere, Civitaretenga).

Da ultimo aggiungiamo dal punto di vista glaciologico, che la possibilità di un ulteriore sollevamento postglaciale non è affatto da escludersi. Concludendo circa questi differenti fatti, dobbiamo ammettere che l'orogenesi si è prolungata durante il periodo storico e probabilmente continua ancora ai nostri giorni, sotto i nostri occhi.

Questo concetto è d'altro canto molto rinforzato dall'esame della documentazione sismologica che riguarda gli Abruzzi. Appare evidente che l'Arco Abruzzese Interno (Velino) e quello Esterno (Corno Grande) non essendo sismici, possono considerarsi come immobili. Al contrario la sismicità è *intensissima* nelle conche allineate da Montereale a Sulmona, con una recrudescenza *catastrofica* intorno ad Aquila; indizio che i movimenti tettonici non sono ancora terminati. Nel dettaglio le irregolarità della sismicità dimostrano che i riassestamenti tettonici sono locali e indipendenti gli uni dagli altri. Per esempio nel 1850 si ebbe un forte terremoto a S. Nicandro e quiete a Barisciano, situato sopra un altro compartimento fagliato. La stessa cosa si nota per il terremoto anteriore al 1871 (?) che interessò S. Pio ma risparmiò Tussio.

PROBLEMI PARTICOLARI. – Noi non cercheremo di dissimulare le incertezze e lacune che questa ricostruzione genetica lascia sussistere. Eccone alcune:

Quale è precisamente la natura della tettonica I?

Le tracce radiali che la rivelano sono state accompagnate da una prefigurazione della II ondulazione: può darsi che le puddinghe *mp* che abbiamo ricollegato al principio della II fase si possano attribuire a questa I orogenesi.

Evidentemente il Campo Imperatore è stato chiuso dalla regione di Pietrattina prima o durante la formazione del lago: il IV movimento radiale ha dunque potuto avere inizio prima del Quaternario.

Le direttrici radiali della IV fase sembrano raccordarsi, oltre la catena, con le direzioni submeridiane che sono state riconosciute nell'avan–paese adriatico. Per esempio la dorsale M. delle Macchie–M. Guardiola si prolunga a N attraverso la Rocca Finadamo e il Monte Giove fino a S di Teramo; la dorsale Rocca Calascio–Monte Camicia si prolunga fino a Teramo attraverso la quota 574 (Case De Angelis), ecc. Invece più a oriente la Catena interferisce con questi allineamenti laddove manifesta ciò che l'Argand definisce come *virgazione forzata di I genere.*

Altrove, per la mancanza di falde detritiche particolarmente poderose alla base dei dirupi, è ben difficile ammettere che le radiali siano state interrotte soltanto alla V fase. È molto probabile al contrario che queste *chiuse Abruzzesi* siano preesistite al IV movimento e che il movimento tangenziale che presuppone questa IV fase le abbia soltanto ringiovanite; contemporaneamente avrebbe operato il disinnestamento orizzontale segnalato precedentemente. E allora la V fase comprenderebbe solamente il riassestamento locale e storico dei compartimenti.

Un altro punto da prendere in esame concerne il rapporto fra queste direzioni radiali e le grandi depressioni strutturali segnalate a N dal Segre (Alto Vomano) e a S dal Beneo (Fossa di Roccatagliata). Il parallelismo dell'orientamento è indiscutibile, il carattere tettonico simile, e l'identità genetica evidente; il sincronismo invece non sembra altrettanto sicuro. Si è già osservato precedentemente che, in seguito ai ravvivamenti tettonici, l'identità di orientamento non è prova di sincronismo. Queste dislocazioni sono certamente recenti rispetto al II piegamento, ma si esita, ragionevolmente, ad attribuir loro l'età IV. La loro stessa importanza è differente, poichè sono di scala regionale mentre le nostre radiali hanno carattere locale.

Si sarà osservato durante questa esposizione e a proposito di ciascuna fase, che certe regioni del Gran Sasso sono state citate più sovente di altre. Ciò dipende da sensibili differenze che permettono di individuare la metà SE e la metà NO, onde l'articolazione si pone tra Barisciano e Filetto. Nella metà SE le direttrici tettoniche sono abbastanza uniformi e generalmente di carattere abruzzese; le fratture sovente non sono che dei ritocchi apportati alle ondulazioni per effetto di una grandiosa ma semplice torsione. Gli assi radiali si manifestano con delle dorsali e delle gronde sinclinali. Le prove del IV movimento sono numerose, ma la sismicità è indipendente da quella della Majella (essa stessa ancor più giovane).

Al contrario, nella metà NO le direttrici sono alquanto intricate e i movimenti verticali compaiono più numerosi che le torsioni provocate da inclinazioni

opposte e contrastanti; le radiali si manifestano soprattutto con fratture e strette fosse. Le prove del IV movimento sono più rare: la sismicità vi è in rapporto molto evidente con quella dell'Umbria (per esempio terremoti del 1349, 1730, 1785, con speciale riguardo per quello a carattere progressivo del 1703). Questa regione è dunque fortemente influenzata dal passaggio della gronda sinclinalica del Vomano e della tettonica Umbro–Marchigiana.

Conclusione. – Allorchè il nostro studio della catena e dell'avan–paese Adriatico sarà ultimato, quando sarà stata stabilita una correlazione con le regioni finitime, allora soltanto sarà possibile avvicinarsi ad una esatta concezione dell'insieme. Ma allo stato attuale delle nostre cognizioni, ogni conclusione a carattere sintetico apparirebbe prematura.

Speriamo, ciò nondimeno, d'aver mostrato l'interesse che presenta lo studio tettonico sistematico per una siffatta regione. Certamente per la sicurezza delle datazioni l'analisi stratigrafica rimane fondamentale ed insostituibile, ma qui essa appare impossibile. Effettivamente la successione dei terreni è a mala pena conosciuta nelle sue grandi linee, d'altro canto in una regione spesso emersa come la nostra, i movimenti del suolo vengono a stento registrati dalla stratigrafia. Quando lo sono, producono dei conglomerati breccioidi d'impossibile datazione essendo privi totalmente di fossili, onde l'utilità dell'interpretazione tettonica.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Spiegazione dei segni: 1, allineamenti montuosi; 2, bacini o conche, generalmente colmati da conglomerati quaternari; 3, faglie di fronte adriatica (fronte alla componente nord o est); 4, faglie di fronte adriatica, probabili ma non verificate; 5, faglie di fronte tirrena (fronte alla componente sud o ovest); 6, faglie di fronte tirrena, probabili ma non verificate; 7, gronde sinclinali con andamento radiale; 8, centri abitati. Quote in metri.

Spiegazione delle abbreviazioni: Ar, Aragno; Ari, Arischia; Ass, Assergi; Bar, Barisciano; Baz, Bazano; Bef, Beffi; Cal, Calascio; Cam, Camarda; Cap, Capestrano; Civ, Civitaretenga; Cm, Castel del Monte; Col, Collebrincioni; Fil, Filetto; Font, Fontecchio; M, Montereale; Ma, Madonna d'Apparo; Nav, Navelli; Of, Ofena; Pag, Paganica; Piz, Pizzoli; Pog, Poggio Picenze; S. Dem, S. Demetrio ne' Vestini; Sgr, S. Gregorio; S. Nic, S. Nicandro; S. pio, San Pio delle Camere; S. St, S. Stefano di Sessannio; Tus, Tussio.

Rilievi: CA, Cecco d'Antonio; Cis, Cima delle Serre; FF, Fosso del Ferone; FG, Fosso S. Giuliano; LI, regione Licciardi; MA, M. d'Aragno; MB, M. Bolza; MC, Monte Cappucciata, MdM, Monte delle Macchie; MM, M. Marino; MO, M. Offermo; MR, M. Ruzza; MS, M. Stabiata; PA, M. Pietra aspra; PC, Passo Capannelle; PV, Piano Viano; RC, Rocca Calascio; RF, Rocca Finadamo; RL, Regione Locce; SM, Piano S. Marco; SN, Serra della Natrella.

CARTA TETTONICA DEGLI ALTIPIANI DEL GRAN SASSO D'ITALIA

Patologia. — *Ricerche parassitologiche e biologiche sul materiale del Giardino Zoologico di Roma.* - I. *Osservazioni parassitologiche su alcuni mammiferi di recente cattura ed importazione* (*). Nota di ERMANNO BRONZINI, presentata (**) dal Corrisp. V. PUNTONI.

Per utilizzare il ricco e vario materiale scientifico che può essere raccolto al nostro Giardino Zoologico, grazie all'interessamento del prof. V. Puntoni, direttore dell'Istituto di Igiene dell'Università di Roma, è stata organizzata una stretta collaborazione tra il nostro Zoo e l'Università stessa.

Presso l'Istituto di Parassitologia Medica già dallo scorso anno sono state iniziate e tuttora si stanno svolgendo sotto la direzione del prof. E. Biocca ricerche varie in campi diversi della biologia e della parassitologia.

È bene a tale proposito ricordare che già da anni i principali Giardini Zoologici del mondo (Londra, Parigi, Berlino, Lipsia, Mosca, New York, Filadelfia, ecc.) utilizzano a scopo scientifico il loro abbondante materiale ed alcuni di essi pubblicano Bollettini (1) che trattano vari problemi di biologia, di parassitologia, di microbiologia e di patologia animale. Era dunque necessario che anche il nostro Giardino Zoologico, il quale in quest'ultimo decennio ha limitato la propria attività culturale alla parte strettamente zoologica, abbracciasse nel proprio studio altri campi di ricerca.

In una precedente Nota redatta in collaborazione con Biocca ed Agostinucci (2) abbiamo reso noto un primo quadro schematico dei risultati ottenuti dall'esame delle feci di tutti i mammiferi già da anni allo Zoo. Proseguendo nello studio, abbiamo esteso le ricerche oltre che alle feci anche al sangue. Inoltre abbiamo costantemente praticato le autopsie degli animali che sono venuti a morte, nella ricerca di eventuali parassiti.

Il ripopolamento del Giardino Zoologico, in atto dall'estate scorsa, ha visto affluire nuovi animali, che abbiamo subito fatto oggetto delle ricerche in questione. Nella presente Nota ci limitiamo a comunicare schematicamente i risultati ottenuti dall'esame delle feci di 64 nuovi mammiferi (di cui 61 provenienti dall'Africa e 3 dal Sud America) giunti a Roma in due scaglioni successivi, rispettivamente nel settembre 1948 e nel maggio del corrente anno. Riferiamo inoltre i risultati degli esami parassitologici del sangue e del contenuto intestinale di alcuni di questi animali venuti a morte durante il periodo di acclimatazione. Tali ricerche offrono senza dubbio un particolare interesse in quanto

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Parassitologia Medica dell'Università di Roma.

(**) Nella seduta dell'8 giugno 1949.

(1) « Proceedings of the Moscow Zoological Park »; « Bulletin of the New-York Zoological Society »; « Report of the Penrose Research Laboratory and Museum of Comparative Pathology of the Zoological Society of Philadelphia »; « Proceeding of the Zoological Society of London »; « Der Zoologische Garten » (di Lipsia), ecc.

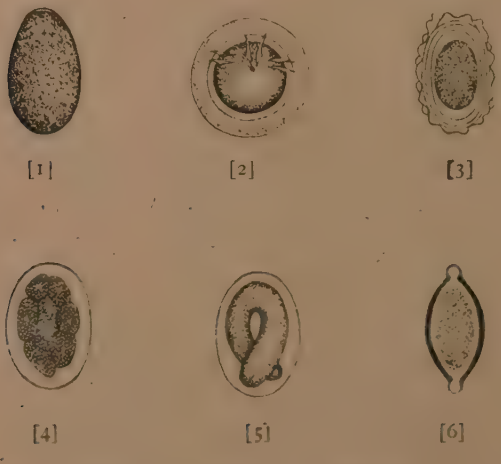
(2) E. BIOCCA, G. AGOSTINUCCI, E. BRONZINI, *Ricerche parassitologiche preliminari sulle feci dei mammiferi del Giardino Zoologico di Roma.* « Rivista di Parassitologia », 2, 169 (1948).

che – trattandosi di animali di recente cattura – abbiamo la quasi certezza che gli endoparassiti in essi osservati sono stati acquisiti dall'ospite durante la vita libera nel suo *habitat* originario.

Ripetuti esami per ciascun mammifero sono stati eseguiti durante i mesi di ottobre e novembre 1948 e durante il maggio 1949; la tecnica utilizzata è stata quella già adottata per le precedenti indagini [2], e cioè: raccolta separata delle feci di ciascun animale; quindi, per la ricerca dei protozoi, esami a fresco su materiale diluito in soluzione fisiologica ed in Lugol forte; per la ricerca di uova di elminti, esame diretto e dietro arricchimento mediante i metodi di Telemann e di Damas. Ricerche speciali per i casi risultati positivi saranno riferiti a parte.

Riportiamo schematicamente l'elenco dei parassiti rinvenuti e dei loro ospiti; la frazione tra le parentisi indica il numero di individui esaminati (denominatore) ed il numero di individui parassitati (numeratore).

PROTOZOI	Amebe (cisti)		*Theropithecus gelada* (1/1); *Papio hamadrya* (3/4); *Papio choiropithecus sphinx* (1/1); *Herpestes albicaudus* (1/4); *Procavia abyssinica* (1/2); *Tapirus americanus* (1/1); *Oryx beisa* (1/1); *Tragelaphus meneliki* (2/2); *Hystrix cristata* (1/3).
	Flagellati (forme vegetative)		*Papio hamadryas* (1/4); *Procavia abyssinica* (1/2); *Tapirus americanus* (1/1); *Xerus rutilus* (1/3).
	Ciliati (Balantidi)		*Xerus rutilus* (1/3).
	Sporozoi (Coccidi)	*Isospora*	*Herpestes ichneumon* (2/2).
		Eimeria	*Genetta genetta* (1/4).
		(ancora in cultura)	*Tragelaphus meneliki* (2/2).



[1] [2] [3]

[4] [5] [6]

Tipi di uova: Trematodi [1]; Cestodi [2]; Nematodi [3], [4], [5], [6].

BLASTOCISTI			*Cercopithecus griseoviridis* (1/3).
VERMI		Trematodi [1]	*Felis serval* (4/6); *Lynx caracal* (2/2).
		Cestodi [2]	*Felis serval* (1/6); *Genetta genetta* (1/4).
	tipi di uova	[3]	*Thos mesomelas* (1/2); *Felis concolor* (2/2); *F. maniculata* (1/2); *F. serval* (1/6); *Herpestes albicaudus* (3/4); *Hystrix cristata* (1/3); *Xerus rutilus* (2/3); *Giraffa camelopardalis reticulata* (1/1); *Potamochoerus choeropotamus* (1/2).
		[4]	*Cercopithecus griseoviridis* (1/3); *Papio hamadryas* (1/4); *Thos mesomelas* (2/2); *Otocyon cafer* (1/3); *Felis serval* (4/6); *F. maniculata* (1/2); *Cynailurus guttatus* (1/1); *Herpestes ichneumon* (2/2); *Genetta genetta* (1/4); *Xerus rutilus* (2/3); *Giraffa c. reticulata* (1/4); *Potamochoerus choeropotamus* (2/2).
		Nematodi [5]	*Felis maniculata* (1/2); *Xerus rutilus* (1/3); *Procavia abyssinica* (2/2).
		[6]	*Theropithecus gelada* (1/1); *Papio hamadryas* (1/3); *Papio choiropithecus sphinx* (1/1); *Felis serval* (1/6); *Herpestes ichneumon* (2/2); *Hystrix cristata* (1/3); *Giraffa c. reticulata* (1/1).
	larve di Nematodi		*Papio hamadryas* (1/4); *Felis serval* (3/6); *Herpestes ichneumon* (2/2); *Otocyon cafer* (1/3); *Procavia abyssinica* (2/2).

Le feci dei seguenti animali risultarono totalmente negative:

1 *Cercopithecus griseoviridis*; 1 *Papio cynocephalus*; 1 *Hapale jacchus*; 1 *Felis leo*; 1 *Felis serval*; 1 *Felis maniculata*; 1 *Vulpes vulpes aegyptiaca*; 2 *Otocyon cafer*; 1 *Hyaena crocuta*; 1 *Mephitis zorilla*; 3 *Genetta genetta*; 1 *Herpestes albicauda*; 1 *Herpestes cafer*; 1 *Phacochoerus aethiopicus*; 2 *Cobus ellipsiprymnus*; 1 *Lithocranius walleri*; 1 *Cephalophus grimmia*.

Durante il periodo di acclimatazione alcuni individui vennero a morte. All'autopsia furono eseguiti anche esami parassitologici del sangue e del contenuto intestinale, di cui diamo i risultati schematici.

Esami positivi:

I. SANGUE:

PROTOZOI (*Plasmodio*)	1 *Cercopithecus albogularis preussi*.
VERMI (*Microfilaria*)	1 *Otocyon cafer*.

II. CONTENUTO INTESTINALE:

VERMI	*Cestodi*	1 *Hystrix cristata*.
	Ascaridi	2 *Cercopithecus albogularis preussi*; 1 *Thos mesomelas*; 2 *Xerus rutilus*; 1 *Phacochoerus aethiopicus*.
	Tricocefali	1 *Cercopithecus griseoviridis*; 1 *Cercopithecus albogularis preussi*; 1 *Hystrix cristata*; 3 *Strepsiceros imberbis*.

Esami totalmente negativi: 1 *Xerus rutilus*; 1 *Strepsiceros imberbis*; 1 *Tragelaphus meneliki*; 1 *Orycteropus aethiopicus*.

* * *

Rimandiamo a successiva comunicazione lo studio specifico degli endoparassiti rinvenuti; a proposito delle uova di elminti ricordiamo che le uova di ascaridi osservate in *Felis concolor* hanno i caratteri del genere *Toxascaris* mentre quelle notate in *Thos mesomelas* ed in *Herpestes albicauda* richiamano più propriamente il genere *Toxocara*.

Dal raffronto dei reperti parassitologici relativi al gruppo di mammiferi di recente importazione con quelli già resi noti [2] a proposito di tutti gli altri mammiferi ormai da gran tempo in cattività allo Zoo, emergono alcuni rilievi degni di un certo interesse.

I coccidi sono presenti solamente in alcuni dei nuovi mammiferi (carnivori e ungulati). Assai elevato è tra i nuovi mammiferi il numero degli individui parassitati da elminti: tali infestazioni, per la frequenza ed intensità dei casi, pongono veramente al nostro Zoo un grave problema igienico-sanitario ed esercitano indubbiamente un'influenza negativa sul processo di acclimatazione degli animali colpiti.

Biologia vegetale. — *Ricerche sull'azione della vernalizzazione nel metabolismo del «Triticum vulgare»* [*]. Nota di Delio Petrucci, presentata [**] dal Socio G. Vernoni.

Vari autori hanno tentato di definire le cause e precisare le condizioni ambientali che determinano nelle piante la differenziazione degli organi della riproduzione; nonostante però le notevoli conquiste fatte dal Klebs, dall'Allard, dal Garner, dal Cholodny, dal Blaauw, dal Gassner, dal Maximov e da molti altri fitobiologi, il problema rimane tuttora oscuro nella sua intima natura. Di notevole interesse è tuttavia la teoria di Lysenko dello sviluppo stadiale delle terofite che vede nel dispiegamento dell'ordine biologico dell'individuo pianta, una successione rigidamente ordinata di cambiamenti – promossi solo da particolari condizioni dell'ambiente – e che ricorda da vicino la rappresentazione data dal Waddington del processo differenziativo negli animali. Poco nota però è la natura di detti cambiamenti i quali non essendo necessariamente connessi a differenziazioni morfologiche, si pongono in evidenza solo perchè se non si verificano le condizioni ambientali, secondo un determinato ordine di successione, a cui è legata la genesi di anche uno solo di essi, la pianta arresta il proprio sviluppo ad un determinato stadio e pur continuando ad accrescersi non si riproduce [1].

Recenti ricerche hanno tentato di dimostrare che l'attitudine della pianta a differenziare le iniziali degli antofilli è dovuta alla formazione di ipotetici ormoni

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Patologia Generale della Università di Roma. Centro di Fisiopatologia del C.N.R.

(**) Nella seduta dell'8 giugno 1949.

(1) Tonzig S., «Elementi di Botanica», *1*, 1084, 1948 (Milano).

antogeni. Ma se le esperienze di innesto di Melchers [2] dimostrano probabile la genesi di antogeni nel fotostadio, non si sa ancora come si eserciti l'azione delle basse temperature nel promuovere il termostadio.

Ho voluto pertanto recare un personale contributo a questa interessantissima parte della biologia vegetale, studiando l'azione esplicata dalla vernalizzazione sul metabolismo delle cariossidi germinanti di frumenti invernali e primaverili, in base alla comparazione delle curve dell'intensità respiratoria degli individui normali e vernalizzati.

MATERIALE E METODO. – Ho preso in esperimento 2 razze fornitemi dalla stazione di genetica per la cerealicoltura di Rieti: Virgilio e Fanfulla; la prima invernale, la seconda primaverile.

Ho misurato l'intensità respiratoria impiegando il respirometro di Warburg [3] e procedendo secondo la tecnica che segue.

Un discreto numero di cariossidi di ciascuna razza veniva fatto germinare al buio, su carta bibula tenuta costantemente bagnata con acqua distillata, in scatole Petri, poste in termostato alla temperatura di 22°,5 C. Ogni 24 ore circa si prelevano gli individui occorrenti alla determinazione dell'intensità respiratoria, scegliendoli tra quelli aventi velocità media di accrescimento, che poi in numero di dieci in un primo tempo e successivamente, ad accrescimento più avanzato, in numero di cinque, venivano posti unitamente a cinque c. c. di acqua distillata, nella cavità centrale di vaschette di respirazione cilindriche, il cui volume aggirantesi intorno ai 23 c. c. era noto fino al centesimo di c. c. Nell'appendice laterale di questa, si introducevano c. c. 0,2 di idrato sodico al 10 %. Si procedeva quindi alla determinazione dei mm.^{3} di ossigeno assunto in un'ora dalle plantule al buio, tenendo le vaschette schermate con panno nero ed il bagno termostatico alla temperatura di 22°,5 C., uguale a quella del termostato. Le plantule ricevevano luce solo nel tempo necessario al trasferimento dal termostato alle vaschette di respirazione. Per il calcolo si teneva conto, nel fissare il Vg, non solo del volume della vaschetta occupato dai liquidi, ma anche di quello occupato dal materiale di prova, misurandolo volta per volta, mediante spostamento di acqua in un cilindro graduato.

Al termine della prova, le cariossidi venivano accuratamente degerminate mediante un ago a lancetta, asportando anche lo scutello. L'operazione era facilitata dall'esistenza di un piano di clivaggio, dovuto alla diversa consistenza meccanica dell'epitelio colonnare e dei tessuti dell'albume. Le plantule di ogni vaschetta, isolate dal resto della cariosside, venivano poi distintamente introdotte in apposite capsuline di vetro e quindi poste ad essiccare in stufa alla temperatura di 100°C., fino a peso costante. Ciò allo scopo di escludere dalla determinazione del peso secco della plantula i tessuti di riserva.

Nello stesso modo si procedeva per la determinazione dell'intensità respiratoria e del peso secco nei lotti vernalizzati.

Si otteneva la vernalizzazione facendo permanere in frigorifero, ad una temperatura poco superiore agli zero gradi centigradi, per sessanta giorni, le carios-

(2) *Vernalization and Photoperiodism: a symposium*, 67 (1948) (Waltham, Mass. U. S. A).
(3) DEOTTO R., *I metodi manometrici in biologia* (Bologna) (1942).

sidi, dopo averle portate all'idrobiosi e tenute in termostato fino a germinazione iniziata. Allo scopo di assicurare una perfetta riuscita della vernalizzazione, le scatole Petri contenenti le cariossidi venivano tenute chiuse durante la refrigerazione ad evitare una eccessiva disidratazione ed un conseguente eccessivo rallentamento dei processi vitali dell'embrione.

Nella costruzione delle curve esprimenti le variazioni del peso secco e dell'intensità respiratoria in funzione del tempo, ho eliminato le differenze iniziali della massa dei tessuti delle plantule, facendo coincidere l'età iniziale delle plantule prerefrigerate con quella corrispondente allo stesso peso secco delle plantule non trattate.

Che le modificazioni interessanti la vernalizzazione abbiano sede nei tessuti dell'embrione e non siano correlate a quelle indotte sull'endosperma dalle stesse basse temperature, è stato dimostrato da Purvis vernalizzando, con esito positivo, embrioni escissi e fatti germinare su terreni artificiali [2]; conclusione che del resto si potrebbe dedurre dal fatto che le piante di frumenti a semina autunnale ricevono l'azione vernalizzante delle temperature invernali quando hanno superato da molto la fase eterotrofa ed i tessuti dell'endosperma più non esistono. Ad evitare quindi interferenze ho valutato anche l'intensità respiratoria delle cariossidi degerminate dei lotti vernalizzati e dei testi.

I dati ottenuti sono riportati nei grafici 1, 2, 3, 4; ogni valore rappresenta la media dei risultati di quattro prove in ciascuna delle quali si misurava la respirazione totale di 10 o 5 individui.

Conclusioni. – Dall'esame dei grafici si possono trarre le conclusioni che seguono.

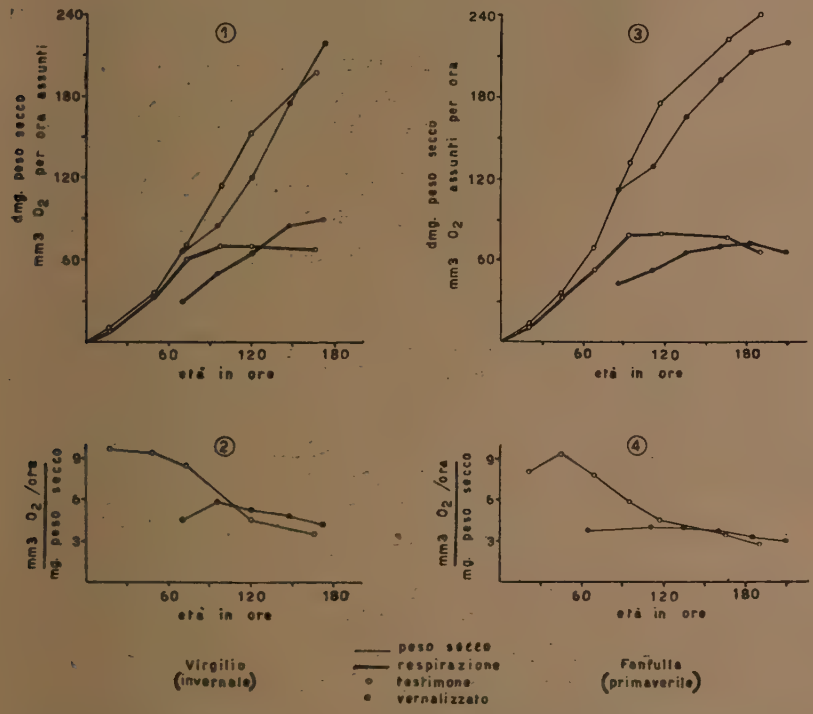
Il peso secco varia in funzione dell'età secondo una curva ad S di facile interpretazione.

In molti lavori è stato dimostrato il frequente parallelismo tra l'intensità respiratoria e la velocità di accrescimento. Fatto questo ovvio, quando si pensi che l'energia necessaria alla sintesi dei materiali plastici è fornita dal processo respiratorio. Orbene, se tutta l'energia che si libera dal processo catabolico venisse utilizzata nel processo di accrescimento, la curva esprimente le variazioni dell'intensità respiratoria in funzione del tempo dovrebbe essere campaniforme tale essendo la curva della derivata di una funzione ad S. Questo invece si verifica solo in parte, che se nel primo tratto delle curve esiste la detta correlazione, dal punto corrispondente alla massima velocità di accrescimento in poi, l'intensità di respirazione si mantiene superiore al valore che comporterebbe l'accrescimento. Le ragioni non debbono ricercarsi nella limitatezza delle osservazioni, in quanto la S delle curve di accrescimento risulta delineata completamente e le stesse curve ottenute da Stiles e Leach con osservazioni di più lunga durata su *Fagopirum esculentum*, *Lathyrus odoratus* ed *Helianthus annuus*, pur mostrando un abbozzo completo della forma a campana presentano il secondo ramo più alto del primo [4]. La spiegazione va ricercata nella considerazione di altri processi vitali che, intensificandosi sempre più con l'età, fanno sentire maggiormente la loro importanza

(4) Stiles W., *An introduction to the Principles of Plant Physiology*, 135 (1936) (London).

dopo il punto di massima velocità dell'accrescimento embrionale, quali ad esempio l'accrescimento per distensione, la differenziazione, e che, pur non essendo accompagnati da aumento di peso secco, coinvolgono una certa aliquota dell'energia generata dalla respirazione.

Il trattamento con le basse temperature deprime, in un primo tempo, fortemente l'attività respiratoria, risultando questa nei lotti vernalizzati di tutte e due le razze esaminate circa metà, dopo 24 ore dal trattamento, di quella dei testi



I grafici (1) e (3) rappresentano le variazioni del peso secco (linea sottile) e dell'intensità respiratoria (linea spessa) in funzione dell'età: (1) nel VIRGILIO, (3) nel FANFULLA. I grafici (2) e (4) rappresentano le variazioni dell'intensità respiratoria riferita all'unità di peso secco, in funzione dell'età: il (2) nel VIRGILIO, il (4) nel FANFULLA. I cerchietti vuoti si riferiscono ai valori dei testimoni, quelli pieni ai valori dei vernalizzati.

di uguale peso secco. A questo primo periodo di inibizione segue nella razza invernale una evidente esaltazione dell'attività respiratoria fino ad aversi dopo le 97 ore dal trattamento, 16 mmc. circa per plantula di ossigeno assunto in più per ora dai lotti vernalizzati, pari a mmc. 1,0 $\pm$ 0,054 di ossigeno assunto per ora e per mg. di peso secco. Il periodo di inibizione si estingue più lentamente nella razza primaverile: mentre infatti le curve dell'intensità respiratoria riferita all'unità di peso secco si intersecano nel Virgilio dopo 40 ore dal trattamento,

nel Fanfulla dopo 95 ore, ed anche in questa ultima razza segue a tale periodo, una lieve esaltazione dell'attività respiratoria.

Una netta differenza di comportamento delle due razze di fronte alla vernalizzazione è data dal fatto che mentre nella invernale alla esaltazione dell'attività respiratoria si accompagna una corrispondente intensificazione dell'accrescimento, inibito anch'esso in un primo tempo, nella primaverile al contrario, la velocità di questo processo diminuisce continuamente. Ne consegue che l'aumento di respirazione nel Fanfulla vernalizzato è a completo carico dell'accrescimento per distensione e dei processi di differenziazione. Lo stimolo indotto dalla vernalizzazione sull'accrescimento per distensione ho potuto constatarlo in tutte e due le razze esaminate dalla maggiore estensione della lamina fogliare e dalla maggiore lunghezza delle radici che presentavano le piante trattate. Questi fatti fanno pensare ad un aumento del contenuto in auxina determinato dalla vernalizzazione. Thimann e Lane già nel 1938 riscontrarono nell'Avena e nel Triticum in base a misure della velocità di accrescimento e dello stimolo indotto sulla fioritura una analogia di azione tra la vernalizzazione ed il trattamento con la auxina (5). Senza però misure dirette del contenuto in auxina non si può affermare nulla con sicurezza a questo riguardo.

Le spiegazioni del diverso modo di comportarsi delle curve di accrescimento del Virgilio e del Fanfulla si possono ricercare:

1°) in un più rapido esaurimento delle sostanze di riserva nelle cariossidi vernalizzate di Fanfulla dovuto, nei confronti delle piante controllo, al consumo di nutrimento verificatosi durante la vernalizzazione, e nei confronti del Virgilio vernalizzato, al minor contenuto iniziale delle cariossidi; mentre infatti le cariossidi degerminate del Virgilio avevano all'inizio della germinazione un peso secco medio di mg. 440, quelle del Fanfulla un peso secco medio di mg. 343.

2°) In un diverso modo di reagire della sostanza protoplasmatica delle due razze al trattamento.

Se vera la seconda spiegazione, la diversità osservata del comportamento delle due razze potrebbe fornirci un dato importante per approfondire le nostre conoscenze sul significato della vernalizzazione.

Mi riprometto in una successiva Nota di dimostrare la maggiore o minore plausibilità delle due spiegazioni formulate.

La vernalizzazione esalta decisamente la respirazione delle cariossidi degerminate e lo stimolo non è preceduto, almeno dopo le 24 ore dal trattamento, da un periodo di inibizione, come si ha invece nelle plantule. L'intensità respiratoria dei tessuti dell'endosperma segue durante la germinazione una curva parabolica; da mmc. 1,37 di O_2 assunto da una singola cariosside degerminata, dopo le 24 ore di germinazione, si sale ad un massimo di mmc. 3,45, dopo le 72 ore, per poi precipitare rapidamente a mmc. 1,05 dopo le 96 ore; al quinto giorno la respirazione non è più avvertibile. Nelle cariossidi degerminate dei lotti vernalizzati si nota, fino dalla 24ª ora dal trattamento, una forte esaltazione della respirazione, che dopo le 48 ore, raggiungendo il massimo, supera il doppio di quella dei controlli. Mentre in queste ultime si ha un massimo di mmc. 0,21 di ossi-

(5) Thiman e Lane, « American Journ. Bot. », *25*, 535 (1938).

geno assunto per ora e per mmg. di residuo di cariosside, nei trattati il massimo valore sale a mmc. 0,43.

La respirazione delle cariossidi degerminate, non interferisce nei risultati della comparazione delle curve respiratorie delle plantule vernalizzate con quelle delle plantule controllo, essendo quasi estinta in corrispondenza dei valori estremi nelle curve stesse.

L'esaltazione dell'attività respiratoria determinata dalla prerefrigerazione può attribuirsi sia all'aumento di glucidi solubili sia ad una maggior produzione di enzimi respiratori per effetto delle basse temperature. L'aumento di glucidi solubili in seguito alla prerefrigerazione è stato dimostrato da vari autori (Hanes e Barker) (7).

Biologia. — *La fosfatasi alcalina nella ghiandola nidamentale dei Selaci* (*). Nota di BRUNO TANZI e BRUNO BATTAGLIA, presentata (**) dal Socio G. COTRONEI.

Negli Elasmobranchi ovipari la funzione di secernere le sostanze componenti i diversi tegumenti dell'uovo è esplicata da una ghiandola che viene denominata ghiandola nidamentale e di cui diamo succinta descrizione, rimandando a Filhol e Garrault (1) per lo studio anatomo istologico più completo. Essa è costituita da due lobi applicati alle pareti dorsale e ventrale dell'ovidutto. Ciascun lobo presenta una superficie interna (mucosa) divisa in tre zone (in senso cefalo–caudale), distinguibili anche macroscopicamente:

1ª Una zona anteriore, bianco–traslucida, riccamente vascolarizzata;

2ª Una zona intermedia, finemente striata da pieghe circolari;

3ª Una zona posteriore, liscia e biancastra (1–2).

Passando nella zona anteriore l'uovo si circonda di albume. Le due zone seguenti provvedono invece a fornire l'uovo di un involucro costituito da una scleroproteina denominata ovocheratina (vedi in 1ª, 2ª, 3ª) e caratteristica delle uova degli Elasmobranchi. La zona albuminifera è costituita da tessuto ghiandolare a tubuli tappezzato da epitelio monostratificato. Alla zona intermedia corrisponde un tessuto ghiandolare a tubuli tappezzati da epitelio monostratificato cilindrico fra le cui cellule sono intercalati elementi ciliati che sboccano nel lume di ciascun tubulo. Le pliche lamellari che corrispondono a questa zona e sporgono nel lume ghiandolare sono tappezzate da epitelio ciliato, continuazione dell'epitelio dell'ovidutto. Alla zona posteriore infine, detta anche delle ampolle ghiandolari, corrisponde un tessuto ghiandolare che si distingue dal precedente per la presenza di diverticoli ampolliformi i quali sboccano da una parte e dall'altra di ciascuno dei tubuli escretori.

(7) CIFERRI R., *Fisiologia vegetale*, 369-375 (Bologna) (1943).

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto di Genetica dell'Università di Napoli ed il Centro di Biologia del C. N. R.

(**) Nella seduta dell'8 giugno 1949.

(1) J. FILHOL, H. GARRAULT, « Arch. Anat. Microsc », *34*, 105 (1938).

Nel corso di osservazioni sulla distribuzione della fosfatasi alcalina lungo il tratto genitale di alcune specie di Selaci a diverso tipo di gestazione e che saranno oggetto di altra Nota, abbiamo posto particolare attenzione al reperto di fermento nella ghiandola nidamentale specialmente nella parte che corrisponde alle zone intermedia e posteriore, secernenti, come accennato sopra, l'involucro ovocheratinico, avendo assunto particolare interesse, in questi ultimi anni, lo studio dei rapporti fra sintesi di scleroproteine ed attività fosfatasica (vedi più avanti).

Le osservazioni sono state eseguite principalmente su ghiandola nidamentale di *Scylliorhinus canicula* L. In questa specie, nell'individuo in fase di ovulazione attiva, l'organo si presenta di forma ovoidale, misura cm. 3,5–4 di lunghezza e cm. 2,5–3 di larghezza [1], ed ha la zona delle ampolle assai modestamente sviluppata o addirittura inesistente [1, 2, 3].

Per la ricerca istochimica della fosfatasi alcalina si è applicata la tecnica di Gomori [4] con le modifiche di Danielli [5]. Si sono ottenuti i seguenti risultati:

1° Le cellule albuminifere dànno reazione scarsamente positiva e prevalentemente nei nuclei.

2° Nella parte della ghiandola a secrezione procheratinica, possiamo distinguere diversi gradi di positività della reazione: *a*) Reazione prevalentemente positiva nei nuclei ed assente o quasi nel citoplasma. Si tratta probabilmente di cellule in riposo secretorio o che si sono appena liberate del prodotto di secrezione. Può rimanere una lieve positività al polo apicale (fig. 1); *b*) Reazione intensamente positiva nei nuclei e al polo basale della cellnla (fig. 2); *c*) Reazione intensamente positiva in tutto l'ambito cellulare (fig. 3); *d*) Reazione intensamente positiva nei nuclei e al polo apicale (fig. 4).

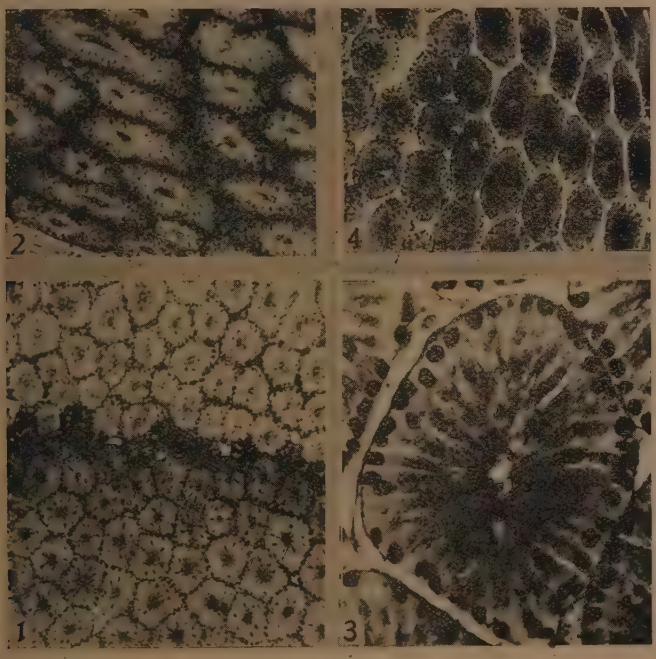
3° La reazione è negativa, eccetto che nei nuclei dove si osserva una lieve positività, a livello delle pliche lamellari e nella regione delle ampolle, che, come si è detto, è rudimentale nella specie da noi studiata.

Da questi dati un po' schematicamente espressi si può arguire che lo spostamento dell'attività fosfatasica nell'ambito citoplasmatico sia in rapporto all'elaborazione dei granuli di procheratina accompagnandone passo passo il processo di secrezione sino all'emissione nel lume dei tubuli ghiandolari secondo lo schema funzionale descritto in [1] e cioè: Comparsa dei granuli di procheratina al di sotto del nucleo verso il polo basale della cellula secernente; diffusione del processo in tutta la cellula e successivo accumulo dei granuli al polo apicale con conseguente espulsione nella cavità ghiandolare. Il prodotto di secrezione si fluidificherebbe, costituendo attorno all'albume strati di sostanza omogenea, ma anisotropa, che successivamente si organizzano nell'involucro di ovocheratina [2].

Tale involucro in alcune specie di Selaci (Raje) sarebbe costituito da quattro strati sovrapposti, tre dei quali (dall'interno) traggono verosimilmente origine dal secreto procheratinico della zona intermedia, e il quarto (più esterno), che manca nello *Scylliorhinus canicula* [1, 2], dalla zona posteriore. Quest'ultimo

(2) H. Garrault, J. Filhol, «C. R. Soc. biol.», *126*, 773 (1937).
(3) E. Fauré-Frémiet, C. Baudony, «Bull. Soc. Chim. Biol.», *20*, 14 (1938).
(4) G. Gomori, «Proc. Soc. Exp. Biol. Med.» (New York), *42*, 23 (1939).
(5) J. F. Danielli, «Brit. Jour. Exp. Biol.», *22*, 110 (1946).

strato ha anche struttura diversa, non omogenea [2], fibrosa, e si formerebbe per accollamento delle fibre di ovocheratina che si organizzerebbero come tali nei canalicoli escretori della zona posteriore della ghiandola nidamentale. La procheratina e l'ovocheratina furono oggetto di studio da parte di Fauré-Frémiet e Baudony [3] che ne caratterizzarono alcune proprietà fisiche, chimiche e chimico-fisiche nella *Raja batis*, nel *Mustelus laevis* (ovocheratina) e nello *Squalus acanthias* (ovocheratina). Ci limitiamo qui a riferire che si tratta di scleroproteine ricche di zolfo.



Ghiandola nidamentale di « Scylliorhinus canicula L. », *nelle diverse fasi di secrezione. Le zone annerite indicano la presenza dell'enzima.*

Fig. 1. – Tubuli a procheratina con cellule in riposo secretorio (in alto) e al termine della secrezione (in basso). Ingr. 68 ×.

Fig. 2. – Tubuli a procheratina in fase iniziale di secrezione. Ingr. 68 ×.

Fig. 3. – Sezioni di un tubulo le cui cellule sono al massimo della loro attività secretoria. Ingr. 320 ×.

Fig. 4. – Tubuli in fase terminale di secrezione. Ingr. 68 ×.

Se colleghiamo ora le nostre osservazioni a quelle più sopra riportate, sembra essere degno di rilievo il reperto di notevole attività fosfatasica nelle cellule secernenti la procheratina, con distribuzione di tale attività in quelle zone di citoplasma che sono sede di secrezione attiva; e di poter quindi inserire queste osservazioni nel quadro più generale di quelle che indicano probabili rapporti tra sintesi di alcuni tipi di proteine, quali, ad esempio, le nucleoproteine [vedi in Brachet [6]] e, ciò che più direttamente c'interessa, di scleroproteine.

(6) J. BRACHET, « Growth », *11*, n. 4, p. 309 e sg. (1947)

Le osservazioni fatte da Bradfield [7] sul bruco di un lepidottero (*Cossus cossus*) e su di un ragno (*Tegenaria domestica*) indicano specialmente rapporti tra secrezione delle ghiandole serigene ed attività della fosfatasi alcalina: l'enzima è presente nei nuclei ed in corrispondenza dei granuli nelle cellule secernenti.

Pure le osservazioni di Jeener [8] nel topolino castrato e trattato con estradiolo, indicano tali rapporti: l'attività della fosfatasi alcalina aumenta notevolmente negli epitelii vaginali proliferanti (particolarmente nel citoplasma) ed evolventi verso la corneificazione (sintesi di cheratina). Contemporaneamente si nota anche aumento dell'acido ribonucleico citoplasmatico.

Biesele e Biesele [9] avevano già fatto analoghe osservazioni negli epitelii cutanei di topolino in corso di trattamento carcinogenetico con metilcolantrene. Pensiamo anche che fenomeni simili non siano estranei alla organizzazione dell'involucro membranoso dell'uovo nell'ovidutto di gallina (porzione albuminifera ed utero) nel quale, nella fase di deposizione, aumenta notevolmente il contenuto in fosfatasi (alcalina ed acida) [10].

Concludendo brevemente, si può quindi asserire che le nostre osservazioni sembrano concordare con quelle degli Autori sopra citati a conferma della ipotesi, da essi avanzata, che tra il processo di sintesi di proteine fibrose e fosfatasi alcalina sussista un ben definito rapporto, il cui significato biochimico e fisiologico resta da chiarire.

Biologia (Microbiologia). — *Sul potere patogeno di un micobatterio: il cosidetto «ceppo Battaglini»* [*]. Nota di Giuseppe Penso, Giovanni Lelli [**] e Vittorio Ortali, presentata [***] dal Corrisp. D. Marotta.

Nel 1935, Ugo Battaglini, dell'Istituto Pasteur di Parigi, comunicava alla *Société de Biologie* («C. R. S. B.», 1935, CXVIII, 305) di avere isolato dalle ghiandole trachebronchiali ipertrofiche di una cavia «nuova», un germe acido-resistente, bianco, liscio, cremoso che cresceva più o meno bene in tutti i comuni terreni di cultura, germe che, inoculato nelle cavie per via sottocutanea, endoperitoneale o endovenosa, si dimostrava dotato di «un certo potere patogeno»: ascesso locale con ipertrofia seguìta da colliquazione delle ghiandole corrispondenti; estensione del processo morboso al fegato e alla milza che si presentavano ipertrofici, mentre nel fegato si mettevano in evidenza macchie puntiformi.

L'Autore non fornisce alcun dato sulle alterazioni istologiche osservate, e aggiunge che il germe non provoca nei conigli, anche se inoculato per via

(7) J. R. G. Bradfield, «Nature», *157*, 876 (1946).
(8) R. Jeener, «Nature», *159*, 578 (1947).
(9) J. J. Biesele, M. Biesele, «Cancer Res.», *4*, 751 (1944).
(10) B. Tanzi, A. Bertolini, in corso di pubblicazione su «Archivio di Fisiologia».
(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Superiore di Sanità.
(**) Direttore inc. dell'Istituto di Anatomia patologica dell'Università di Roma.
(***) Nella seduta dell'8 giugno 1949.

endovenosa e nella dose di 10 mgr. « nessuna lesione viscerale visibile » ; malgrado ciò, un coniglio morì dieci giorni dopo l'inoculazione e dal di lui fegato e milza si potè ricoltivare il micobatterio inoculato. L'Autore non dà nessun ragguaglio sul numero di animali impiegati per tali esperienze e parla di un solo pollo usato per prove compiute su tali volatili.

Da parte nostra, in una serie di ricerche orientative sul potere patogeno dei diversi micobatteri non tubercolari, fummo colpiti dal costante potere patogeno del ceppo Battaglini inoculato nei conigli; questi, infatti, andavano costantemente a morte con o senza lesioni macroscopicamente visibili, ma sempre con lesioni istologiche ben definite. Su 18 conigli inoculati in queste prove di orientamento, 12 presentarono lesioni a focolaio macroscopicamente visibili e 6 soltanto lesioni microscopiche, identiche, però, a quelle presentate dai conigli che avevano lesioni visibili.

Prima di descrivere tali lesioni – scopo precipuo della presente comunicazione –, vogliamo riferire qualche dato sul ceppo Battaglini, e ciò perchè su di esso nulla è stato pubblicato dopo la prima e breve comunicazione del Battaglini stesso.

Uno studio completo e sistematico del germe in questione e di altri tre ceppi (Butter, Lanterna e Vallée gelb), che noi consideriamo identici al Battaglini, sarà fatto prossimamente, i pochi dati che oggi forniamo non sono che una premessa a quel nostro imminente lavoro.

Il ceppo Battaglini in nostre mani lo abbiamo avuto, con questo nome, direttamente dall'Istituto Pasteur di Parigi.

Si tratta di un germe fortemente acido e alcool resistente, le cui culture presentano un pigmento giallo e sono capaci di svilupparsi sino alla temperatura di 47° C. Il ceppo in questione – coltivato su terreno di Merril all'agar purificato – è incapace di utilizzare i carboidrati come fonte di carbonio ed è capace di vegetare soltanto in presenza di glicerina. Uguale comportamento hanno anche gli altri tre ceppi menzionati e tutti e quattro sono lisati da un ceppo di *Phagus phlei* indotto sul Battaglini.

Il nostro micobatterio – e i suoi tre consimili – ha tutto l'aspetto di essere una specie a sè stante, più che un indeterminato « bacillo paratubercolare » nel qual gruppo il Battaglini lo vuol « classificare ». Ma di ciò noi tratteremo in seguito ampiamente.

Le esperienze orientative sul potere patogeno di vari micobatteri, e del ceppo Battaglini in particolare, sono state condotte inoculando conigli per via endovenosa con 1 mgr. di germi sospesi in 1 cm^3 di soluzione fisiologica.

Gli organi più frequentemente colpiti sono stati la milza e il polmone.

Nel polmone i focolai flogistici, spesso in forma nodulare, sono giallastri, distribuiti bilateralmente e senza particolarità di localizzazione. Qualche volta si hanno focolai broncopneumonici a tipo caseoso, altre volte localizzazioni a tipo miliarico o submiliarico. In qualche caso il processo morboso è molto esteso e grave; in altri, invece, scarso e limitato.

Nella milza, la disseminazione nodulare è di diversa intensità. I nodulini, talvolta visibili anche all'esame esterno, sono bianco–giallastri e possono talvolta

confondersi, per il loro volume ridotto, con formazioni linfatiche; talvolta, invece, sono nettamente distinguibili per la maggiore grandezza, per la loro forma e consistenza. Talora sono a tipo miliarico. Nella milza si ha, molto spesso, un notevole aumento di volume che può raggiungere anche 4 o 5 volte il normale. La capsula, in tali casi, è tesa e talvolta ispessita, i margini arrotondati. Al taglio, oltre il reperto frequente dei noduli già ricordati, si rileva un apparente aumento del connettivo, con polpa trattenuta e spesso congesta. La consistenza dell'organo risulta quasi sempre diminuita con facile apprezzamento tattile di noduli duri corrispondenti a localizzazioni specifiche.

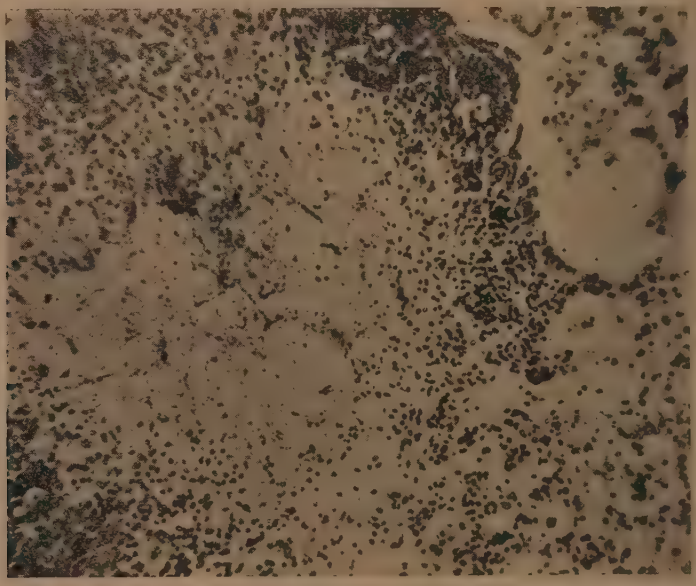


Fig. 1. – *Polmone:* focolaio infiammatorio con disfacimento necrobiotico a tipo caseoso.

Anche il fegato presenta spesso lesioni a tipo nodulare e un certo grado di congestione.

Alterazioni abbastanza frequenti si notano a carico delle linfoghiandole che sono aumentate di volume e di colorito giallastro. In un caso erano evidenti ghiandole notevolmente tumefatte al giugulo.

In un caso con alterazioni polmonari gravi e diffuse, apparivano compromesse anche le pleure, il peritoneo, le trombe oltre agli organi in precedenza ricordati (milza e fegato).

In un caso abbiamo riscontrato una flogosi necrotica di uno dei due surreni con distruzione totale della midollare sostituita da materiale giallastro, compatto, asciutto.

Alle alterazioni di focolaio ora ricordate si aggiungono quelle riportabili ad uno stato degenerativo torbido grasso esteso più o meno a tutti i parenchimi.

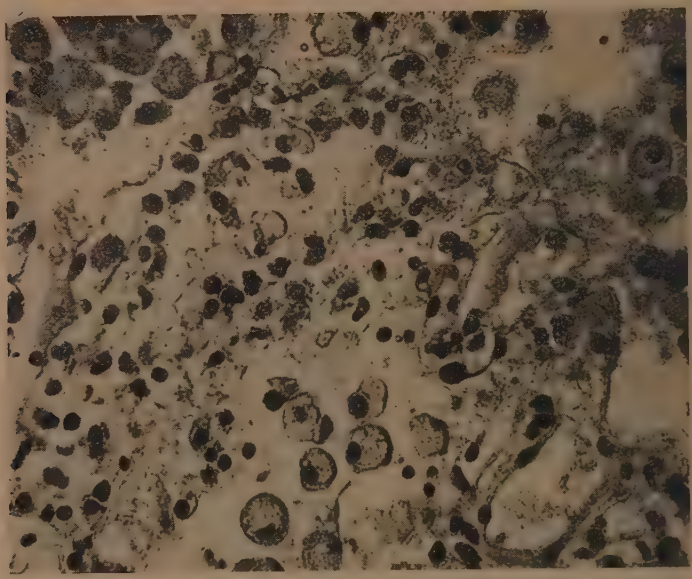
All'esame istologico, sistematicamente condotto su tutti gli organi, risulta che nei focolai nodulari si riscontrano quadri istologici di flogosi prevalentemente produttiva. Solo in qualcuno di essi si ha disfacimento necrotico dei tessuti con un aspetto più o meno identificabile con quello della necrosi caseosa tubercolare (fig. 1). Il tessuto di granulazione è formato in prevalenza di elementi a tipo istiocitario con presenza di molte cellule giganti plurinucleate. Mancano in genere i linfociti.

A carico del polmone è frequente un'alterazione nodulare a tipo broncopneumonico, spesso con lesione alveolitica desquamativa perinodulare. Molti noduli

Fig. 2. – *Polmone:* focolaio granulomatoso aderente alla parete bronchiale.

sono localizzati in vicinanza o addirittura aderenti alla parete bronchiale (fig. 2); la loro grandezza è molto variabile. Nell'interno delle cavità alveolari vi sono, in estesi tratti, numerose cellule rotondeggianti od ovalari, con abbondante citoplasma e con alone periferico ipercromico di demarcazione (figg. 3 e 4). Nell'interno degli stessi alveoli si osservano frequentemente cellule giganti plurinucleate, con nuclei disposti alla periferia. Gli elementi istiocitari dei focolai polmonari ispessiscono in alcuni punti i setti interalveolari.

Nella milza si rileva, nei casi di splenomegalia, una forte e diffusa proliferazione di cellule piuttosto grandi a tipo endotelioide, ammassate in più punti sino a costituire focolai che corrispondono ai noduli rilevati macroscopicamente e che sostituiscono il tessuto normale dell'organo (fig. 5). Tale proliferazione è uniformemente diffusa con qualche centro di maggiore accentuazione. Elementi di questo tipo si riscontrano anche nell'interno dei follicoli linfatici, dove si distinguono particolarmente bene dai linfociti per la grandezza e per la acidofilia del



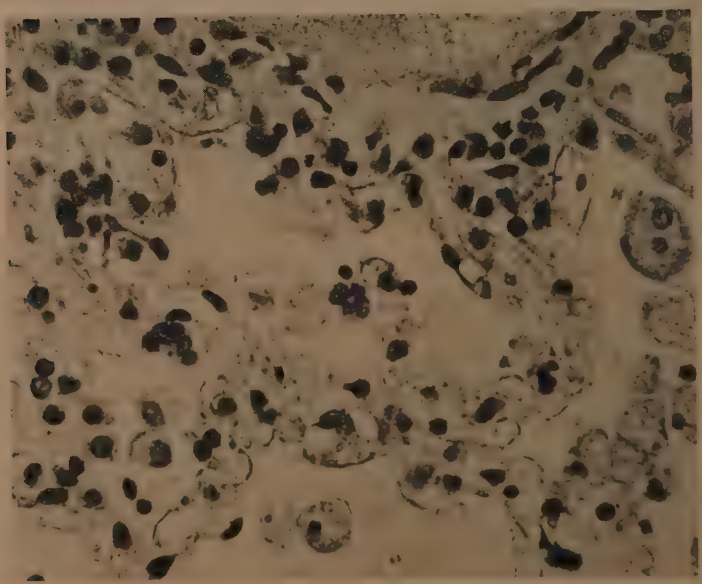


Fig. 3 e 4. – *Polmone:* elementi di flogosi essudativa nell'interno delle cavità alveolari.

Fig. 5. – *Milza:* infiltrazione granulomatosa diffusa.

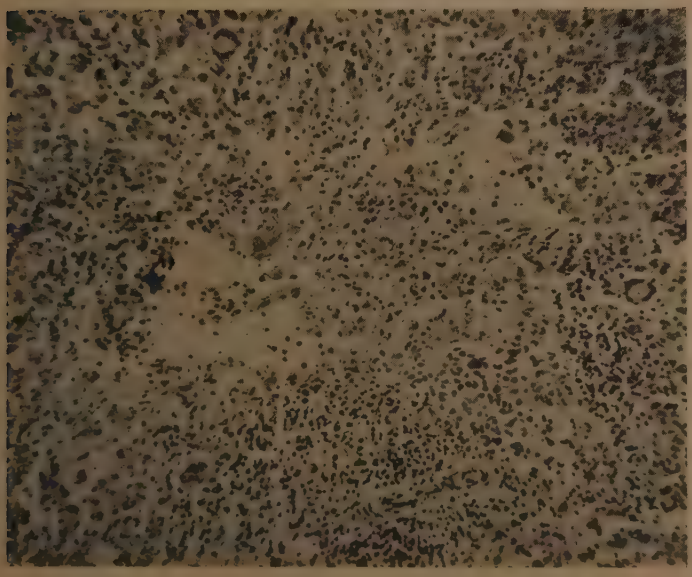


Fig. 6. – *Milza:* tessuto granulomatoso con cellule giganti.

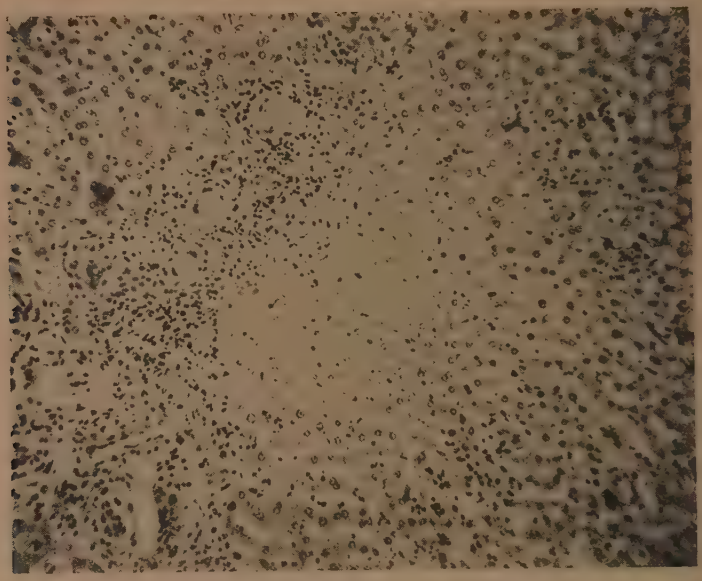


Fig. 7. - *Fegato:* infiltrazione granulomatosa.

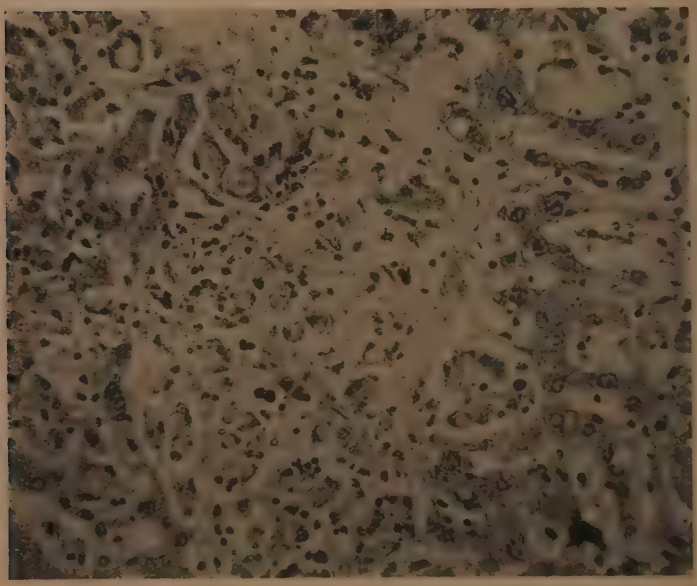


Fig. 8. – *Fegato:* tessuto di granulazione con elementi rotondeggianti forniti di alone ipercromico di demarcazione (vedi anche Figg. 3-4 del polmone).

citoplasma. I follicoli linfatici sono in genere piccoli, spesso dimezzati dal tessuto istioide in proliferazione; in qualche caso particolarmente grave, la polpa splenica risulta addirittura sostituita in ampie zone dal tessuto di granulazione (fig. 6).

In questo tessuto sono scarsi i linfociti, mentre risultano piuttosto numerose le cellule giganti tipo Langhans. Nei casi senza splenomegalia, le alterazioni non sono costanti. Talora si osservano proliferazioni di cellule istioidi molto limitate, talora un quadro di modica iperplasia diffusa del connettivo.

Anche nel fegato le alterazioni istologiche sono numerose ed evidenti. Il disegno dell'organo è spesso sovvertito dalla presenza di focolai di granulazione che presentano aspetto diverso riguardo alla forma, alla estensione e alla loro compo-

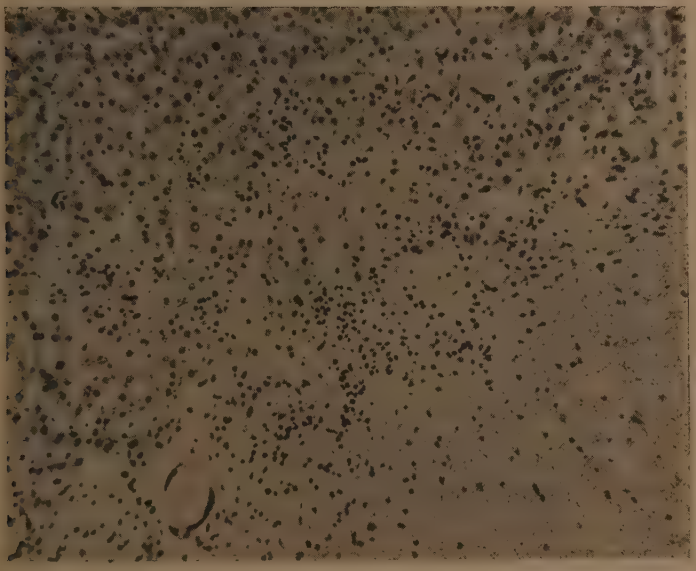


Fig. 9. – *Fegato:* area di necrosi circoscritta da tessuto reattivo con cellule giganti.

sizione citologica (fig. 7). Alcuni focolai risultano costituiti da tessuto compatto formato da elementi allungati a tipo endotelioide, fittamente stipati; altri, invece, si presentano come un agglomerato di cellule rotondeggianti od ovalari, a citoplasma abbondante, acidofilo, con nucleo evidente e con alone ipercromico di demarcazione più o meno pronunciato alla periferia della cellula stessa (fig. 8). Tali elementi sono spesso dissociati fra loro, così da risultarne un tessuto scarsamente compatto. Si rileva inoltre nel fegato, la presenza di frequenti aree di necrosi più o meno estese (fig. 9), oltre a disturbi di circolo rappresentati da aree con forte replezione e dilatazione capillare. Il parenchima si dimostra in più punti con cellule rigonfiate e vacuolizzate per degenerazione torbidograssa. Anche nei casi senza alterazioni a focolaio macroscopicamente rilevabili, è stato possibile

osservare piccoli focolai flogistici nel tessuto, con caratteristiche strutturali identiche a quelle ora riferite.

Nel rene e nel cuore, istologicamente scarsi focolai flogistici, spesso costituiti da aggruppamenti linfocitari con qualche cellula istioide. Gli elementi parenchimali presentano (rene) frequenti alterazioni degenerative in genere a tipo albuminoideo.

A carico delle linfoghiandole l'alterazione è notevolmente interessante e presenta caratteristiche identiche a quelle riscontrate nella milza. Si rileva una più o meno diffusa proliferazione di elementi grandi, rotondeggianti od ovalari, che infiltrano il tessuto linfoadenoideo ed in alcuni punti lo sostituiscono con formazione di focolai; nell'interno di questi, o nelle loro vicinanze, esistono talvolta cellule giganti abbastanza caratteristiche. Gli elementi di proliferazione si distinguono bene dai linfociti per forma, grandezza e tingibilità.

Nel solo caso in cui abbiamo trovato lesioni nelle ghiandole surrenali, si è rilevato un disfacimento necrotico ampio e tale da interessare completamente la midollare e buona parte della corticale. Al limite col tessuto sano esisteva un alone flogistico con cellule di diverso tipo, ma senza polimorfonucleati.

Concludendo il ceppo Battaglini provoca una reazione dei tessuti prevalentemente orientata verso quella di tipo granulomatoso con alcuni requisiti morfologici che ricordano quelli patognomonici della tubercolosi (necrobiosi di tipo caseoso, reazione epitelioide, formazione di cellule di tipo Langhans); tuttavia è possibile distinguere una forma di reazione a carattere più squisitamente essudativo (alveolite, broncoalveolite, polmonite) senza caratteri patognomonici; una seconda forma di tipo più decisamente produttivo (centri nodulari di tipo epitelioide, alveoliti epitelioidi, ecc.); una terza forma di tipo decisamente granulomatoso nodulare con centro necrobiotico, e reazione periferica iperplastica epitelioide e gigantocellulare. Le tre forme possono essere associate o disgiunte nei diversi tessuti ed organi. Come ogni forma granulomatosa non ha in sè alcun elemento morfologico specifico (la specificità essendo insita nello stretto rapporto tra antigene e citoreazione submicroscopica), e forse neppure alcun elemento patognomonico in quanto facilmente si può confondere con altre reazioni granulomatose e particolarmente con quella tubercolare; con questa ha di comune sopratutto un processo necrobiotico che probabilmente è legato a frazioni della struttura bacillare ad azione prevalentemente disintegrativa necrotica.

Biologia. — *Alcuni problemi delle parabiosi studiati negli anfibi* (*). Nota II di LEA URBANI-MISTRUZZI, presentata (**) dal Socio G. COTRONEI.

Nella Nota precedente (1) ho riportato alcuni dati della letteratura ed ho accennato sommariamente ai problemi ed ai risultati di alcune esperienze che riguardano il comportamento di embrioni normali di *Rana esculenta* uniti in parabiosi con embrioni, della stessa specie ed allo stesso stadio di sviluppo, precedentemente trattati con raggi X.

Per maggior chiarezza espositiva richiamo i problemi che mi sono proposta di studiare con la suddetta tecnica sperimentale:

1° deprimendo il metabolismo e alterando la morfogenesi con raggi X di un embrione, come si comporta l'embrione normale? Si ha una prevalenza o esso risente delle alterazioni e della morte del parabionte trattato con dosi letali?

2° l'embrione irradiato risente della convivenza con l'embrione normale? I processi degenerativi e regressivi hanno la stessa estensione ed intensità che nei controlli irradiati isolati?

3° visto che in alcuni casi di irradiazione meno prolungata (30 minuti) ma pur sempre letale, la unione con un embrione normale permette alle cellule meno colpite dell'irradiato di moltiplicarsi e differenziarsi determinando un accrescimento globale dell'irradiato stesso, sebbene risultino notevolmente alterate la testa e parte del tronco, possono le parti che si sono sviluppate subire le trasformazioni inerenti alla metamorfosi?

I risultati ottenuti mi permettono di rispondere a queste domande ma prima di descriverli penso sia opportuno esporre le modalità tecniche adoperate e accennare agli effetti delle radiazioni.

Gli embrioni di *Rana esculenta* allo stadio di bottone codale sono stati irradiati, dopo essere stati privati dell'involucro gelatinoso, in pochissima acqua, con raggi X per vari tempi (15-30-60 minuti) alla distanza di 21,5 cm. dall'anticatodo a 40 Kv. e 3 mA con tubo Müller per radioterapia e poi uniti in parabiosi in parallelo con embrioni normali, allo stesso stadio, provenienti dalla stessa deposizione.

Trattando le uova e gli embrioni sia con i raggi X che con il radio si possono avere condizioni patologiche di diversa entità a seconda della dose adoperata: se la dose è debole e non lede troppo profondamente l'intima struttura cellulare, l'embrione sopravvive, è capace di ulteriore sviluppo e si può avere restituzione completa delle cellule colpite; nella gran maggioranza dei casi però, per dosi più forti, il danno subito dalle cellule è tale che l'organismo muore

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia Comparata «G. B. Grassi» della Università di Roma.

(**) Nella seduta dell'8 giugno 1949.

(1) «Rend. Acc. Lincei», vol. VI, fasc. 4, p. 530 (1949).

dopo un certo tempo dall'irradiazione. In quest'ultimo caso, lo sviluppo è proceduto con ritmo inferiore al normale fino a che «la distruzione dei tessuti, che per lo più si inizia in una zona, determina la morte» (O. Hertwig 1911 [2]). Sul meccanismo della azione biologica dei raggi X e del radio varie sono le teorie e dopo quasi un cinquantennio di studi nulla di sicuro si può dire. L'effetto è tanto più notevole quanto maggiori sono le funzioni organogenetiche delle cellule colpite e quindi si comprende come le prime fasi dello sviluppo siano più sensibili di quelle tardive e come i tessuti che conservano caratteri embrionali anche nell'adulto (strato germinativo della pelle, ghiandole sessuali, organi emopoietici) risentano più di quelli già differenziati ed inoltre le cellule che sono destinate a dare tessuti più differenziati sono a parità di condizioni, più sensibili di quelle destinate a dare tessuti che lo sono meno.

Negli embrioni e larve di Anfibio si mostrano più sensibili il sistema nervoso e gli organi di senso; per quanto riguarda il tessuto muscolare, le cellule del sangue, il pronefro, la corda, il mesenchima e la pelle i vari Autori non sono d'accordo nello stabilire una graduatoria di sensibilità.

Le alterazioni e degenerazioni non si manifestano subito ma insorgono e si estendono con il procedere dello sviluppo fino a determinare la morte degli embrioni. Esiste quindi un periodo di latenza prima che compaiano i segni manifesti dell'azione dei raggi. In un primo tempo (la durata del quale dipende dalla dose e dallo stadio) non si osservano evidenti differenze rispetto ai controlli normali mentre in seguito esse sono notevoli: gli irradiati presentano l'estremità cefalica malformata con fenomeni regressivi e degenerativi dell'apparato boccale, degli organi olfattori, del cervello e delle vesicole ottiche. Si nota che le differenti zone dell'embrione rispondono diversamente al trattamento e si può stabilire un gradiente di sensibilità decrescente in senso cranio caudale. La maggiore sensibilità della parte precordale della testa agli agenti tossici era stata già messa in evidenza dal Cotronei [3] nelle sue esperienze con le larve al litio nel 1915–1922 e esperienze successive di altri autori (Bellamy 1919–1922) [4] Pasquini (1932) [5] e Pasquini e Meldolesi (1930) [6] le hanno confermate con altri metodi e l'hanno messa in relazione al gradiente metabolico di Child.

Anche le branchie ed il pronefro e mesonefro sono sensibili ai raggi X; nei casi di irradiazione prolungata (60 minuti) le prime si sviluppano poco o per niente mentre i secondi, già abbozzati al momento dell'irradiazione regrediscono e nei preparati istologici eseguiti alcuni giorni dopo il trattamento non si riscontrano tracce di essi. Anche l'intestino con le ghiandole annesse è molto sensibile e in maniera particolare le gonadi. Il manifestarsi di queste alterazioni è graduale e molte sono conseguenza di altre precedenti; così per esempio l'idrope che si

(2) O. Hertwig, «Arch. f. Mikr. Anat.», 77, I^a e II^a parte (1911).

(3) G. Cotronei, «Rend. Acc. Lincei», vol. XXIV, 295–300, 1248–1253 (1915); XXVIII, 206 209, 511–513 (1919); «Ricerche di Morf.», II, 1–33 (1921); «Arch. it. Biol.», LXXI, 1–29. (1921); «Rend. Acc. Lincei», XXXI, 433–436, 473–476 (1922).

(4) A. W. Bellamy, «Amer. Journ. Anat.», *30*, p. 473 (1922); «Biol. Bull.», *37*, 312 (1919).

(5) P. Pasquini, «Atti Pont. Acc. Sci.», *85*, 424–486 (1932).

(6) P. Pasquini e G. Meldolesi, «Rend. Acc. Naz. Lincei», X (1929); XI (1930).

sviluppa nella zona cardiaca comprime il cuore che non si può sviluppare e lo stesso avviene per l'idrope che si forma intorno ai reni. Le estese emorragie (nell'irradiazione per 60 minuti) che si formano sono causa anch'esse di difettosa nutrizione di alcuni organi che degenerano Con questo non voglio dire che l'idrope e le emorragie siano la causa dell'atrofia e degenerazione degli organi ma che sono fattori che certamente concorrono all'estendersi di esse.

Schubert (1928)(7) ha studiato l'influenza del terreno di cultura ottenuto da embrione normale sullo sviluppo dei mioblasti di cuore di pollo irradiato e ha riscontrato risultati diversi dipendenti dal tempo, susseguente all'irradiazione, nel quale i mioblasti venivano asportati dall'embrione e posti in terreno di cultura. Le ricerche di Perri già pubblicate e quelle in corso riguardano il comportamento di organi irradiati trapiantati in embrioni e larve normali e di organi di embrioni e larve normali trapiantati su embrioni e larve di anfibi trattati con raggi X. Organi irradiati trapiantati ortopicamente ed eterotopicamente vivono e si sviluppano presentando un ritmo di accrescimento proprio mentre se fossero stati lasciati *in situ* sarèbbero morti insieme all'embrione o larva pochi giorni dopo l'irradiazione. Con il metodo dei trapianti e degli innesti Perri(8) ha studiato la suscettibilità differenziale dei vari organi degli embrioni e delle larve di Anfibi anche in rapporto alla metamorfosi.

Le mie esperienze di parabiosi hanno fornito dei risultati complessivi in questo campo. La parabiosi rappresenta il metodo ideale per lo studio di questi problemi perchè permette di esaminare il comportamento reciproco di due individualità, una delle quali ha subito un trattamento particolare, e di stabilire, come descriverò in seguito, la sensibilità differenziale dei vari organi lasciati *in situ* ma in rapporto con un organismo normale e di trarre conclusioni sulle cause che determinano le alterazioni e la degenerazione di parti o di tutto l'embrione.

Per quanto riguarda il primo problema, ossia se l'embrione normale risenta o si avvantaggi della convivenza con uno irradiato posso dire che si osservano in taluni casi ambedue queste reazioni. Unendo in parabiosi embrioni normali con irradiati per 60 minuti (dose che determina la morte entro 4–5 giorni dall'irradiazione, prima che gli embrioni siano riusciti a consumare tutto il vitello) al secondo giorno, quando si sviluppano le branchie esterne si comincia a notare idrope, atrofia delle branchie che si presentano tozze e piccole, emorragie in vari punti e atrofia della testa. L'idrope si estende alla zona di unione e deprime lo sviluppo dei visceri del normale. Ora si possono avere due casi: o la coppia muore (prima dell'inizio del periodo larvale) o, ed è la maggioranza dei casi, soprovvive. *Nel primo caso* l'idrope si estende e può fare scoppiare la parete del corpo. All'esame istologico i tessuti del normale non sono alterati ma gli organi viscerali sono piccoli, atrofici e i tuboli nefridiali si presentano molto dilatati. Questa osservazione fa pensare che i reni siano oberati di lavoro per cercare di eliminare i prodotti della necrosi e degenerazione cellulare che si manifestano

(7) M. SCHUBERT, «Deutsche Med. Wochenschr.», p. 429 (1928).

(8) T. PERRI, «Acta» della Acc. Pontificia, vol. VIII, pp. 67–72 (1945); IX, pp. 197–204 (1946); XII, pp. 129–136 (1948); «Rend. Accad. Lincei», vol. II, pp. 213–217 (1947).

nel parabionte irradiato. Di quest'ultimo la testa è completamente regredita e così pure la parte anteriore del tronco, rimane spesso un pezzetto di coda che si dimostra essere più radioresistente degli altri organi.

Nel secondo caso l'idrope invece di estendersi, ad un certo momento comincia a regredire fino a scomparire del tutto, e per esempio l'intestino del normale prima sottile perchè compresso da essa si dilata di nuovo fino ad occupare con le ghiandole annesse tutto l'addome della larva. L'intestino come in molte parabiosi fra normali è più breve e meno complicato che nel normale isolato. L'irradiato viene inglobato ed in parte riassorbito dal normale e al binoculare

Fig. 1. – Parabiosi fra embrione normale e irradiato per 30 minuti eseguita l'8 luglio e fissata il 4 agosto del 1944.

Fig. 2 – Parabiosi fra embrione normale e irradiato per 30 minuti eseguita il 18 giugno e fissata il 4 agosto del 1944. Dell'irradiato è rimasta parte del tronco e la coda.

si osserva una larva le cui dimensioni sono leggermente superiori a quelle dei controlli, normali isolati, con una piccolissima pinna codale dell'irradiato accanto alla coda propria (fig. 3). Ad un fianco, dove era stata eseguita l'operazione, si nota una massa opaca che man mano diventa sempre più piccola. All'esame istologico si osservano in questa zona prodotti della degenerazione istologica con pigmento in quantità sempre minore man mano che ci si allontana dal tempo dell'operazione e nella piccola pinna codale raramente si osservano cellule nervose nel midollo spinale e se queste sono presenti hanno una disposizione anomala. Nella zona necrotica si osservano in alcuni casi capsule connettivali racchiudenti prodotti della degenerazione cellulare.

Risulta quindi da quanto ho detto che l'embrione e la larva normale risentono della degenerazione del parabionte irradiato solo meccanicamente ossia non si ha (come d'altronde è noto in letteratura) una trasmissione della « Radiumkrankheit » a tessuti sani e normali. In secondo luogo l'embrione normale consuma,

avendo metabolismo più intenso dell'irradiato (Urbani e Urbani 1946 loc. cit.) per il suo accrescimento anche le sostanze di riserva di questo come dimostra il suo maggiore sviluppo, al termine del periodo vitellino rispetto ai controlli isolati. Rimane il problema se esso sia capace anche di utilizzare i prodotti della disgregazione dell'organismo irradiato e il meccanismo della eliminazione delle sostanze tossiche della necrosi.

La risposta al secondo problema è data in prevalenza dalle parabiosi tra embrioni normali e quelli irradiati per 30 minuti. Anche questa dose è letale entro 6–9

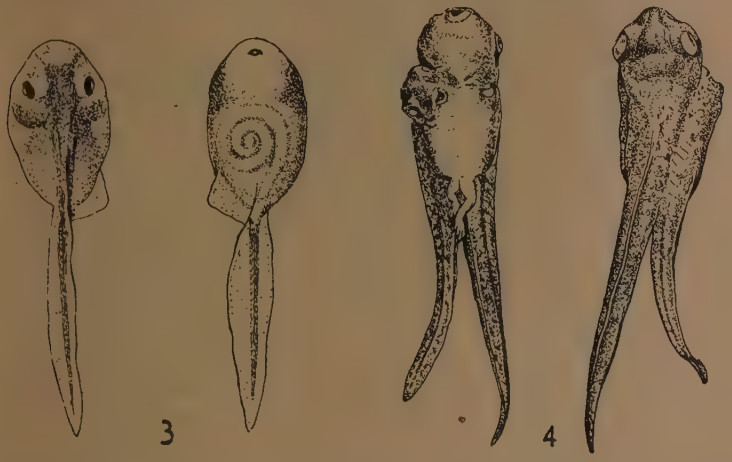


Fig. 3. – Parabiosi fra embrione normale e irradiato per 1 ora eseguita il 28 giugno e fissata l'8 luglio 1944. Dell'irradiato è rimasto un piccolo pezzo di pinna codale.

Fig. 4. – Parabiosi fra embrione normale e irradiato per 30 minuti eseguita il 9 giugno e fissata il 28 agosto 1944. La coppia è stata trattata con tiroxina e presenta gli arti posteriori uno appartenente all'irradiato e l'altro al normale.

giorni dall'irradiazione (le operazioni sono state eseguite durante l'estate). In questi casi si osserva bene la sensibilità differenziale dei vari tessuti e organi. In un primo tempo (primo giorno dopo l'operazione) i parabionti irradiati si presentano come i controlli irradiati isolati ma in seguito mentre in questi le alterazioni e le degenerazioni si estendono fino a provocare la morte degli embrioni, nei primi le lesioni si arrestano in modo che l'irradiato è riconoscibile ed ha dimensioni, seppure inferiori al normale, tuttavia maggiori di quelle dell'irradiato isolato ed inoltre si accresce e si sviluppa come lo dimostrano le fotografie (figg. 1, 2, e 5). Da questi casi si può arguire che quando l'irradiazione ha colpito l'embrione, in particolare nella parte anteriore, quella posteriore messa in comunicazione con un embrione normale, può svilupparsi ed utilizzare le sostanze elaborate da quest'ultimo. L'embrione irradiato isolato in questi casi morrebbe perchè profondamente alterata la testa con la bocca, l'encefalo, specialmente nella parte più cefalica, gli organi di senso, le branchie, il cuore ed il pronefro, ma le cellule cordali, i miotomi ed in parte anche le cellule del midollo spinale, possono svilupparsi e differenziarsi quando ricevono nutrimento e i prodotti del catabolismo

vengano eliminati attraverso il sistema circolatorio ed emuntorio del normale. In questo modo le alterazioni sono bloccate, limitate agli organi più sensibili ai raggi, la cui funzione è in parte vicariata da quelli del normale.

Per quanto riguarda il terzo problema se cioè una coppia fra normale e irradiato per 30 minuti (nei casi nei quali quest'ultimo non viene riassorbito e la parte residua è capace di svilupparsi e di accrescersi) sia capace di andare in metamorfosi, per ora non ho che un solo caso positivo avendo tentato una sola volta di raggiungere la metamorfosi. In genere le altre coppie sono state

Fig. 5. – Sezione del tronco della parte più apicale della parabiosi della fig. 2 dove si riscontrano necrosi da irradiazione.

fissate prima, senza trattamento con tiroxina. Riprendo i protocolli di questa esperienza: parabiosi eseguita il 9 giugno 1944; il 18 dello stesso mese tutti i controlli irradiati erano morti. Inizio del trattamento con tiroxina Roche il 24 agosto, dopo quattro giorni la coppia muore, presentando, come si vede dal disegno (fig. 4) già gli arti posteriori (più piccolo quello dell'irradiato) un piccolo accorciamento della coda e una trasformazione della forma del corpo che dall'aspetto globoso della larva va assumendo la sagoma della ranocchietta. Il parabionte normale presentava sporgente dall'opercolo l'abbozzo dell'arto anteriore ed inoltre la sua bocca aveva iniziato le modificazioni caratteristiche della metamorfosi. All'esame istologico non si notavano necrosi in atto nella testa dell'irradiato.

Ora non so se mi sono proprio imbattuta in un caso fortunato perchè anche esternamente questo embrione, sebbene avesse la testa malformata e il vestibolo boccale contratto, pur tuttavia dimostrava di non avere risentito profondamente dell'azione dei raggi e quindi ho potuto ottenere che entrasse in metamorfosi contemporaneamente al normale perchè alcuni suoi tessuti non erano stati lesi nelle capacità proliferative e differenziative. Ad ogni modo i controlli sono morti tutti entro nove giorni dall'irradiazione e non si può quindi pensare

che, isolato, l'irradiato avrebbe potuto metamorfosare. La mancanza di zone necrotiche in atto nella sua testa che pur presenta delle anomalie strutturali fa pensare che nel lungo periodo di convivenza col normale abbia potuto eliminare i prodotti della necrosi istologica. Interessante però il fatto che l'irradiato non presenta il cuore e quindi tutta la circolazione è diretta dal cuore del normale, in oltre presenta reni e branchie che si stanno trasformando come quelle del normale. È oggetto di un lavoro in corso lo studio particolareggiato della metamorfosi delle larve irradiate in parabiosi con normali e della eliminazione dei prodotti della degenerazione istologica che si presenta di particolare interesse sotto vari punti di vista.

Concludendo, dalle mie esperienze risulta che embrioni irradiati con dosi letali, possono a seconda della particolare sensibilità risentire più o meno profondamente dell'azione dei raggi X che si estrinseca in un tempo più o meno precoce ma che porta in definitiva alla loro morte.

Questi embrioni uniti in parabiosi dopo l'irradiazione possono essere riassorbiti, quasi completamente o meno dal normale; in alcuni casi pur essendo profondamente alterata la testa e parte del tronco la parte posteriore di questo può accrescersi e svilupparsi dimostrandosi in tal modo la presenza in esso di cellule che hanno risentito poco o niente dell'azione dei raggi e che possono estrinsecare la loro capacità proliferativa e differenziativa qualora vengano messe in rapporto con un organismo normale che provvede alla loro nutrizione e alla eliminazione dei prodotti del loro catabolismo. Questo fatto conferma, ciò che era stato già messo in evidenza da altri autori, la non trasmissibilità delle alterazioni da raggi e della particolare sensibilità ad essi di particolari cellule e tessuti la cui alterazione e degenerazione porta alla morte del soggetto.

In un caso inoltre ho ottenuto, in seguito a trattamento con tiroxina che anche un embrione irradiato, presentante evidenti alterazioni cefaliche e assenza del cuore, unito in parabiosi, può iniziare la metamorfosi e che quindi non solo ciò che rimane di esso può svilupparsi ed accrescersi ma anche iniziare quelle trasformazioni che sono legate alla metamorfosi stessa.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente dà alla Classe la dolorosa notizia della morte avvenuta a Bevagna il 2 giugno c. a. del prof. FILIPPO SILVESTRI, zoologo ed entomologo illustre che occupava il terzo posto dei Soci Nazionali dell'Accademia in ordine di anzianità.

Filippo Silvestri, nato nel 1873, Socio dell'Accademia dal 1908 e professore dell'Istituto Superiore Agrario di Portici dal 1904, dedicò la maggior parte dei suoi numerosissimi lavori alla entomologia nella qual scienza aveva acquistato fama mondiale. Ha portato notevoli contributi non solo alla sistematica, ma pure alla biologia generale e delle sue scoperte ha fatto importanti applicazioni alla difesa delle piante dagli insetti nocivi.

Prega poi il Socio Cotronei di prendere accordi con il Collega Grandi per commemorare degnamente l'illustre scienziato scomparso.

Il Socio Cotronei accetta.

Il Presidente informa poi la Classe di un altro grave lutto che ha colpito l'Accademia proprio nella notte dal 7 all'8 giugno con la morte, avvenuta a Roma, del Socio ANTONINO LO SURDO, illustre cultore delle discipline fisiche e geofisiche, Premio Reale nel 1926.

Al prof. Lo Surdo, nato nel 1880, si deve la scoperta dell'azione del campo elettrico sulle radiazioni luminose emesse dagli atomi (fenomeno Stark–Lo Surdo) e di altri fenomeni di spettroscopia. Dedicò vari studi ai fenomeni termoionici e si occupò di ricerche di geofisica. Ricoperse la carica di Direttore dell'Istituto Geofisico di Roma e di Direttore dell'Istituto Nazionale di Geofisica.

Il Socio Lo Surdo sarà, come il Collega Silvestri, degnamente commemorato dall'Accademia.

Alla memoria dei due illustri consoci scomparsi il Presidente invia il reverente saluto suo e dell'Accademia.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio Lombardi presenta la prima parte del « Vocabolario Elettrotecnico Italiano » edito a cura del Comitato Elettrotecnico Italiano e redatto sulla base del Vocabolario Internazionale alla cui compilazione il Comitato Italiano partecipò a suo tempo attivamente.

Il Socio Puntoni presenta la IV edizione del I volume della sua opera « Microbiologia medica ». Detto volume è dedicato alla batteriologia generale speciale e ad esso seguirà il II che il predetto Socio si propone di presentare all'Accademia nelle sedute del prossimo anno.

Il Socio Gortani presenta i due volumi del suo « Compendio di geologia » e li illustra brevemente.

Il Segretario accademico presenta le pubblicazioni pervenute in omaggio, mettendo in particolare rilievo il volume « Botanist and Biometrician » di J. Arthur Harris, la « Revista de Ciencias » della « Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos » e il volume « El Petroleo » del quale è autore D. Ruperto Sanz, compreso nelle Memorie dell'Istituto Geologico y Minero de España.

PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per la pubblicazione nei Rendiconti i Soci U. Amaldi, Semerano, Bargellini, Cotronei, Vernoni (a mezzo del Collega Cotronei), Puntoni, Rolla, Signorini, Marotta.

Il Segretario accademico legge quindi l'elenco delle Note pervenute alla Cancelleria.

Le seguenti Note saranno pubblicate in fascicoli successivi:

ARMELLINI G., Risultati delle misure micrometriche di cento stelle doppie.

RUSSO A., Diminuzione cromatica nei blastomeri somatici di alcuni Metazoi e negli individui equivalenti di un Ciliato «Criptochilum echini» Mps., loro potere germinale causa dei processi di rigenerazione e delle neoformazioni.

AMANTEA L., Due nuovi casi di pigomelia spontanea negli uccelli (pres. dal Socio G. COTRONEI).

BIOCCA E., Osservazioni sul comportamento dei «Ragni granchio» all'avvelenamento curarico (pres. dal Corrisp. V. PUNTONI).

BRONZINI E., Ricerche parassitologiche e biologiche sul materiale del Giardino Zoologico di Roma. – II. Osservazioni preliminari sulla cristallizzazione delle emoglobine in alcune specie di mammiferi (pres. dal Corrisp. V. PUNTONI).

CERQUIGLINI S., Sulle principali proprietà chimico–fisiche del siero di sangue umano normale (pres. dal Socio G. COTRONEI).

CONTI S., Nuove masse granitiche nelle Alpi Liguri. – I. L'affioramento granitico di Val Casotto (pres. dal Socio G. ROVERETO).

NARDINI R., Sul comportamento asintotico degli integrali di un'equazione differenziale della dinamica. Nota I (pres. dal Corrisp. G. SANSONE).

NARDINI R., Sul comportamento asintotico degli integrali di un'equazione differenziale della dinamica. Nota II (pres. dal Corrisp. G. SANSONE).

SANTI R. e PORRO A., Interferenze in processi ossidoriduttivi di farmaci antitiroidei (pres. dal Corrisp. E. MENEGHETTI).

STARKOFF O., Contributo alla conoscenza dell'acarofauna di Roma e dintorni. Fam.: *Argasidae* Murray, 1877. Nota I (pres. dal Corrisp. V. PUNTONI).

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio Brunelli, anche a nome dei Colleghi Fabiani e Cotronei, legge la relazione sulla Memoria del Rev. Vito Zanon dal titolo: «Crisostomatacee africane» con la quale si propone la stampa del lavoro nelle Memorie accademiche.

La proposta, messa ai voti, è approvata con le solite riserve di carattere finanziario.

Il Socio U. Amaldi, a nome anche del Collega Picone, legge la relazione sulla Memoria della signorina Brigitte Radon dal titolo: «Sviluppo in serie degli integrali ellittici», con la quale si propone la stampa del lavoro nelle Memorie dell'Accademia.

Messa ai voti la proposta è approvata con le solite riserve di carattere finanziario.

TEMI PER DISCUSSIONI

Il Presidente invita poi la Classe a formulare le proposte per le discussioni e per le conferenze da tenere nel prossimo anno accademico.

Dopo ampia discussione, alla quale partecipano, oltre che il Presidente, i Soci Giordani, Abetti, Gortani, Bianchi, Panichi, Dore, M. G. Levi, Armellini, Pierantoni e Cotronei, la Classe approva, in linea di massima, come temi delle prossime conferenze e relative discussioni i seguenti argomenti: « Il problema della determinazione sperimentale del sesso » (proposto dal Socio Pierantoni) e « Il metano » (proposto dal Socio Giordani).

Il Presidente incarica il Socio Pierantoni di mettersi in rapporto con i Colleghi Beccari e D'Ancona per quanto concerne lo studio del primo dei predetti temi e invita i Soci Dore e Gortani ad accordarsi con il Collega Fabiani per la parte attinente al secondo di essi.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta dell'8 giugno 1949

ANDERSON Edgar. — *The corn plant of today*. Iowa, Pioneer Hi – Bred Corn Company, 1949. Pp. 20, in–8°, con tavv.

BURR George O. — Vedi ROSENDAHL C. Otto, GORTNER Ross Aiken and BURR George O.

COMITATO ELETTROTECNICO ITALIANO. — *Vocabolario Elettrotecnico Italiano*. Milano, 1949. Pp. 324, in–8°.

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS. *Revista de Ciencias*. Homenaje a la memoria del doctor Federico Villareal ilustre fundador de la Revista de Ciencias e nel 50° aniversario de esta (1897–1947). Vol. I, 1948, n. 1–4.

GORTANI Michele. — *Compendio di geologia per naturalisti e ingegneri*. Udine, Del Bianco Editore, 1946. Voll. 2, in–8°.

GORTNER Ross Aiken. — Vedi: ROSENDAHL C. Otto, GORTNER Ross Aiken and BURR George O.

PUNTONI Vittorio. — *Microbiologia medica*, 4ª ed. completamente aggiornata. Vol. I. Batteriologia generale e speciale. Roma, Studio Ed. degli Istituti Universitari, 1949. Pp. XII–622, in–8°.

REVELLI Paolo. – *Per la corologia storica della Liguria*. Estr. da « Atti della Società Ligure di Storia Patria », vol. LXXI, 1948.

— *Riviera, Contributo al « Glossario dei nomi territoriali italiani »*. Estr. da « Annali di Ricerche e Studi di Geografia », 1948, n. 5, gennaio–giugno.

ROSENDAHL C. Otto, GORTNER Ross Aiken and BURR George O. – *J. Arthur Harris, Batanist and Biometrician*. Minneapolis, University of Minnesota, 1936. Pp. V–209, in–8°, con figg. e tavv.

SADE Albert. — *Énumération des Carrés latins. Application au 7e ordre, Conjecture pour les ordres supérieurs*. Marseille, Impr. Du Pharo, 1948. Pp. 8, in–8°.

SANZ Ruperto. — *El petroleo*. Madrid, 1948. Pp. VII–217, in–8, con tavv. (Memorias del Instituto Geológico y minero de España).

WALDMEIER M. — *Die Sonnenaktivität im Jahre 1947*. Estr. « Astronomische Mitteilungen der Eidgenössischen Sternwarte. Zürich », n. 156.

— *Tätigkeitsbericht der Eidgenössischen Sternwarte Zürich für das Jahr 1948*.

— *Tetrapolare Sonnenfleckengruppen*. Estr. da « Experientia », vol. V, 1949, n. 1.

U. B.

ERRATA CORRIGE

L'ultima riga della p. 380 deve esser letta dopo la 1ª riga della pagina che segue.

A p. 502, nel titolo invece di M. M. ESPOSITO SUE leggasi: M. M. ESPOSITO SEU.

INDICI DEL VOLUME

INDICE PER AUTORI

A

ABETTI G. – Altezza della cromosfera nell'anno 1948 ed andamento del ciclo solare, *555*.

AGENO M., CHIOZZOTTO M. e QUERZOLI R. – Una verifica della formula di Klein e Nishina, a 2,62 MeV, *319*.

——— Sulla nuova tecnica dei contatori a scintillazione. Nota I, *453*.

——— Sulla nuova tecnica dei contatori a scintillazione. Nota II, *626*.

ALIBRANDI A. – Sugli effetti di alte dosi di tiamina in alcune specie di Anuri, *245*.

— Azione della tiroxina sulla paralisi motoria da tiamina, *355*.

ALIBRANDI A. e ALIBRANDI G. – Effetti dell'acetilcolina sulla durata dell'apnea volontaria, *356*.

ALIBRANDI G., vedi ALIBRANDI A.

ALOISI M., vedi BONETTI E.

AMERIO A. – Osservazioni alla Nota di Radicati e Gamba su « Un nuovo metodo per misurare la velocità della luce », *28*.

AMERIO L. – Relazioni tra il metodo della trasformata multipla di Laplace e il metodo di M. Riesz per l'integrazione di equazioni di tipo iperbolico. Nota II, *48*.

— Relazioni tra il metodo della trasformata multipla di Laplace e il metodo di M. Riesz per l'integrazione di equazioni di tipo iperbolico. Nota III, *175*.

AMPRINO R. – Ricerche sull'istogenesi dei muscoli in condizioni sperimentalmente modificate, *645*.

ANDREATTA C. – Rapporti fra colate laviche e coperture di tufi in una zona meridionale del sistema dei porfidi atesini (altopiano di Pinè), *563*.

ANDREOTTI A. – Sulle superficie di Kummer e di Weddle, *61*.

ARDY C. e DACHÀ U. – Sull'assorbimento delle albumine e globuline del siero di sangue, *481*.

ARDY C., vedi LOMBROSO C.

ARGHIRIADE E. – Sur le point principal des courbes tracées sur une surface, *189*.

ARMELLINI CONTI G. – La pioggia invernale a Roma dal 1825 al 1949, *449*.

ASCOLI G. – Sopra una proprietà delle normali ad una superficie ed una sua parziale estensione. Nota II, *3*.

B

BACCAREDDA M. – Velocità ultrasonore e compressibilità adiabatiche in alcuni derivati benzenici bisostituiti isomeri, *466*.

BAFFONI G. M. – Rilievi craniometrici in alcuni Microchirotteri nostrani, *264*.

BARBUTI U. – Una proprietà che caratterizza l'unicità della soluzione delle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine, *298*.

BATTAGLIA B., vedi TANZI B.

BEER S. e SACCHETTI A. – La diafisi e l'estremità distale del femore di « Strepsiceros strepsiceros », *347*.

BENEDICTY M. – Sul gruppo delle trasformazioni cremoniane monomiali, *697*.

BEVILACQUA L., vedi BONSIGNORE A.

BIOCCA E. – Sulla posizione sistematica e sulla importanza epidemiologica di un particolare germe, il « Paracoli são paulo », *125*.

— Ricerche sull'azione oligodinamica dell'argento, *246*.

BOAGA G. – Sull'interpretazione geodetica del residuo della equazione di Laplace. *25*.

— Sulla rappresentazione di Weingarten della sfera sul piano, *402*.

BOCCHIOTTI S., MURATORIO A. e ROSSI O. – Sul potere glicoregolatore dell'« Insulina nativa » estratta dal pancreas di uccelli granivori, *374*.

BOCCHIOTTI S. e PONTREMOLI S. – Deidrogenazione dei grassi epatici da perfrigerazione, *478*.

BOMPIANI E. – Tessuti di curve piane e corrispondenze fra piani, *7*.

— Sulle corrispondenze puntuali fra spazi proiettivi, *145*.

BONETTI E. e ALOISI M. – Il metabolismo batterico del glicerolo e dei suoi derivati. –

III. Comportamento di alcuni «Mycobacteria», *492*.

BONINO G. B. e SCROCCO E. – Contributi allo studio della struttura dei chinoni e delle forme chinoidi. – VI. Energie medie di risonanza ed energie minime di eccitazione elettronica nelle forme naftochinoniche, *36*.

—— Indici di legame e spettri di oscillazione nelle molecole poliatomiche, *421*.

BONSIGNORE A. – Dosaggio separato dei piridin nucleotidi e della N_1–metilnicotinamide dei tessuti mediante l'azione della nucleosidasi, *475*.

BONSIGNORE A. e BEVILACQUA L. – La reazione di condensazione acetonica e del butanolo alcalino (F_2) nello studio dei composti piridinici ad N quaternario derivati dalla nicotinamide o dalla N_1–metilnicotinamide nel fegato di ratto, *333*.

BONSIGNORE A. e RICCI C. – Ricerche sulla natura del composto dosabile come N_1–metilnicotinamide nel fegato di ratto trattato con nicotinamide, *337*.

BORDONI P. G. – Deduzione dalla meccanica statistica di una legge di dipendenza della compressibilità dei solidi dalla temperatura, *597*.

BRONZINI E. – Ricerche parassitologiche e biologiche sul materiale del Giardino Zoologico di Roma. – I. Osservazioni parassitologiche su alcuni mammiferi di recente cattura ed importazione, *739*.

C

CAGLIOTI V., SARTORI G. e SILVESTRONI P. – Ricerche polarografiche e coulombometriche sui cianuri complessi di cobalto, *273*.

—— Ricerche polarografiche e coulombometriche su alcuni complessi cianidrici del manganese mono e bivalente, *407*.

CAMBI E. – Verifica sismica di massima di una torre metallica, *608*.

CANTELLI F. P. – Sulle probabilità di Karup, *397*.

— Considerazioni sulla legge uniforme dei grandi numeri. Nota I, *550*.

CASTIGLIA C. – Effetto dell'elasticità ritardata sugli stati di coazione di origine viscosa, *311*.

CAVALLINI D. – Sull'ossidazione dell'acido fenilpiruvico e p–ossifenilpiruvico con acido ascorbico, *115*.

CAVAZZINI E. – La catalasi negli organi di «Bufo vulgaris» in metamorfosi, *250*.

CEAS M. P. – La formazione degli organi di senso nella larva delle Ascidie semplici, *498*.

CESSI T., vedi VANNÌNI E.

CHIOZZOTTO M. – Su di un tipo di voltmetro a generazione per alte tensioni, *458*.

CHIOZZOTTO M., vedi AGENO M.

COLOMBO G. – Il comportamento del nucleo durante le prime fasi dello sviluppo embrionale in «Rana esculenta», *120*.

— Sopra alcuni casi di riducibilità alle quadrature per le equazioni del moto di un punto sollecitato da forze posizionali, *286*.

— Altre osservazioni sul comportamento del nucleo durante le prime fasi dello sviluppo embrionale degli Anfibi, *370*.

CONTI G. A. – La pioggia invernale a Roma dal 1825 al 1949, *449*.

CONTI R. – Due criteri di convergenza uniforme per le successioni di funzioni monotone di due variabili in un rettangolo e nel piano, *202*.

— Sul problema di Cauchy per l'equazione di tipo misto $x^2 z_{xx} - y^2 z_{yy} = 0$, *577*.

CORRENTI V. – Sulle variazioni della statura e del peso nell'accrescimento, *378*.

CORTI R. – Sul valore dello strato epidermico che tappezza la faccia ventrale del carpello delle Angiosperme: osservazioni in «Idesia polycarpa» Maxim, *135*.

— Il significato del tappeto delle antere al suo primo differenziarsi: Osservazioni in «Idesia polycarpa» Maxim, *343*.

COSSU A. – Proprietà di curvatura di una particolare classe di varietà a connessione affine, *702*.

CROCCO G. A. – Il Turboreattore d'alta quota, *161*.

D

DACHÀ U., vedi ARDY C.

DACHÀ U., vedi MORANDO G. C.

DALLA VOLTA V. – Una questione di geometria Riemanniana connessa a un problema di ottica geometrica, *64*.

D'AMBROGI M. – Ricerche sul differenziamento specifico di alcuni neuroni dei Teleostei, *127*.

DEL PIANTO E. – Attività antibatterica di alcune cumarine naturali e sintetiche, *714*.

DEMANGEOT J. – Sulla tettonica degli altipiani del Gran Sasso d'Italia, *734*.

E

ESPOSITO SEU M. M. – Autofecondazione e fecondazione incrociata nelle «Ascidie», *502*.

F

FABIANI R. – Osservazioni sulle forme di «Neosqualodon» del Miocene della Sicilia, *428*.

FAEDO S. – Un nuovo metodo per l'integrazione dei problemi di propagazione, *435*.

— Chiarimento a una Nota del professore W. Sierpiński. Nota I, *572*.

— Chiarimento a una Nota del professore W. Sierpiński. Nota II, *667*.

FANO G. – Su una particolare varietà a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche, *151*.

FERRARI E., vedi RICCOBONI L.

FICHERA G. – Proprietà di media toroidali delle funzioni armoniche, *431*.

— Sul calcolo delle deformazioni, dotate di simmetria assiale, di uno strato sferico elastico, *582*.

FINZI A. – Sulla generazione di una trasformazione finita assegnata su una curva chiusa mediante una trasformazione infinitesima, *688*.

FINZI B. – Discontinuità sul fronte d'onda delle azioni gravitazionali, *18*.

FRANCHETTA A. – Sul sistema aggiunto ad una curva riducibile, *685*.

G

GAGLIARDO E. – Contributo alle conoscenze sul metodo dell'ione pilota in polarografia quantitativa, *80*.

— Il comportamento dell'«Aerosol» O T all'elettrodo a goccia di mercurio, *721*.

GALGANO M. – Identificazione del «Triton intermedium» G. Costa, 1871, col «Triturus italicus» (Peracca), 1898, *352*.

GALGANO M., vedi MAZZI V.

GALLI M. – È possibile determinare la velocità della luce in percorsi aperti? Nota I, *620*.

GALLITELLI P. – Sui costituenti minori di alcune rocce argillose appenniniche e sul loro probabile significato, *31*.

GARAVALDI O. – Su di un problema di propagazione termica, trattato col metodo degli operatori funzionali, *461*.

GIACOBBE A. – L'Ecologia dell'Abete bianco appenninico. – I. Morfologia e biologia, *339*.

GIANNUZZI M. A. – Sopra la doppia 12050 del Catalogo di Aitken, *315*.

GODEAUX L. – Sulla costruzione di certe superficie algebriche irregolari, *694*.

GROSS W. – Sulla matrice di Green di un problema di Elasticità Piana, *444*.

H

HIEKE MERLIN O. – Facies ultrafemiche nei basalti dell'Africa Orientale, *89*.

I

IANDELLI A. – Sulla struttura cristallina del composto $PrGe_2$, *727*.

L

LELLI G., vedi PENSO G.

LENTI C. – Inibitori di fenolossidasi nel fegato e nel pancreas, *86*.

LEONARDI P. – Stratigrafia del deposito quaternario della grotta Marilisa da Schio nei Colli Berici (Vicenza), *484*.

LEVI F. – Generalizzazione del legame sforzi-deformazioni nei solidi elastico-viscosi, *304*.

LOMBROSO C. e ARDY C. – Azione dei farmaci simpaticolitici sulle combustioni (A. D. S.) provocate dagli autolizzati proteici, *259*.

LONGO C. – Trasformazioni puntuali fra due piani proiettivi in una coppia di punti corrispondenti a direzioni inflessionali di specie superiore indeterminate, *68*.

M

MALARODA R. – Condizioni tettoniche della zona di Prestine (media Valcamonica), *102*.

MANACORDA T. – Sul moto di un solido asimmetrico attorno ad un punto fisso, *711*.

MARCHESONI V. – Variabilità, differenziazione ed osservazioni biologiche su di una Cianoficea, *227*.

MARINELLI G. – Sulla presenza del radicale solforico in alcuni nesosilicati, *487*.

MAZZI V. – Effetti della serra calda sulla ipofisi del Tritone crestato, *523*.
MAZZI V. e GALGANO M. – Ulteriori osservazioni intorno all'effetto della serra calda sul ciclo sessuale del Tritone crestato, *518*.
MAZZI V. e PIERI M. – La morfologia dell'ipofisi del Tritone crestato, *365*.
MORANDO G. C. e DACHÀ U. – Tessuto acinoso del pancreas e genesi del diabete da allossana negli uccelli granivori, *239*.
MURATORIO A., vedi BOCCHIOTTI S.

N

NARDINI R. – Sulla stabilità delle vibrazioni quasi armoniche di un sistema dissipativo, *603*.
NICOLINI T. – Serie oscillatorie ad autoregressione disturbata e moto polare di Chandler. Nota I, *73*.
— Serie oscillatorie ad autoregressione disturbata e moto polare di Chandler. Nota II, *222*.

O

OBRECHKOFF N., Sur l'approximation diophantique linéaire, *283*.
ORTALI V. e PENSO G. – Studio morfologico, al microscopio elettronico, dei fagi attivi sui micobatteri, *248*.
ORTALI V., vedi PENSO G.
OTTAVIANI G. – Una condizione necessaria e sufficiente per la convergenza uniforme nell'intervallo $(-\infty, \infty)$ di una successione di funzioni di una variabile, a variazione limitata, e sua estensione alle funzioni di due (o più) variabili, *291*.
— Intorno alle probabilità di Karup e legame con la teoria dei capitali accumulati, *679*.

P

PALAZZO G., vedi QUILICO A.
PANICHI U. – Commemorazione del Corrispondente Carlo Perrier, *386*.
PANIZZI L., vedi QUILICO A.
PENSO G., vedi ORTALI V.
PENSO G., LELLI G., ORTALI V. – Sul potere patogeno di un micobatterio: il cosidetto «ceppo Battaglini», *750*.
PENSO G. e ORTALI V. – Isolamento e studio di fagi attivi sui micobatteri, *109*.
PERRI T. – Sull'ibridazione tra «Bufo viridis» e «Bufo vulgaris». Nota II, *255*.
PETRUCCI D. – Ricerche sull'azione della vernalizzazione nel metabolismo del «Triticum vulgare», *742*.
PIERI M., vedi MAZZI V.
PINO P., vedi SPERONI G.
PISANÒ A. – Sullo sviluppo dei blastomeri isolati dell'uovo di «Ascidia» allo stadio II, *505*.
PONTREMOLI S., vedi BOCCHIOTTI S.

Q

QUERZOLI R., vedi AGENO M.
QUILICO A. e PALAZZO G. – Sulla preparazione dell'isossazolo, *168*.
QUILICO A., PANIZZI L. e VISCONTI DI MODRONE N. – Ricerche sulla fermentazione citrica con mutanti indotti di «Aspergillus niger», *40*.

R

RICCI C., vedi BONSIGNORE A.
RICCOBONI L. e FERRARI E. – Ponte sbilanciato per titolazioni conduttometriche, *632*.
RICCOBONI L. e ZOTTA M. – Sulla preparazione del fenil-etil-diclorosilano, *472*.
RIEDEL A. – Primi risultati di uno studio geologico sulla media Val Camonica a sinistra del fiume Oglio, *97*.
ROLLERO A. – Un nuovo riferimento intrinseco per le trasformazioni puntuali fra piani proiettivi, *213*.
ROSSI O., vedi BOCCHIOTTI S.
RUOTOLO A. – Ricerche sull'esistenza di una formazione sfinterica del meato ureterale nell'uomo, *232*.
RUSSO A. – Minore prodotto delle tonnare della Sicilia orientale nell'ultimo quinquennio e problemi relativi, *569*.

S

SABAN G. – Due problemi variazionali nella teoria metrica delle superficie rigate, *207*.
SACCHETTI A., vedi BEER S.
SACCONI L. – Ricerche magnetiche su alcuni complessi dell'uranio^{IV}, a numero di coordinazione otto, *639*.
SALVADORI M. – Sul calcolo degli autovalori mediante differenze finite ed estrapolazione, *181*.

SANSONE G. – Valutazione asintotica degli integrali dell'equazione di Liénard che per $t \to -\infty$ tendono allo zero, *13*.
— Sopra una classe di equazioni di Liénard prive di integrali periodici, *156*.
SARTORI G., vedi Caglioti V.
SCARPA O. – Concordanze e discordanze fra valori teorici e sperimentali delle forze elettromotrici delle pile elettrochimiche, *412*.
SCROCCO E., vedi BONINO G. B.
SEGRE B. – Alcune proprietà caratteristiche delle varietà a curvatura costante. Nota I, *393*.
— Alcune proprietà caratteristiche delle varietà a curvatura costante. Nota II, *547*.
— Alcune proprietà caratteristiche delle varietà a curvatura costante. Nota III, *661*.
SEMERANO G. – Risoluzione della coppia polarografica cadmio-indio, *556*.
SILVESTRONI P., vedi CAGLIOTI V.
SPERONI G. e PINO P. – Sull'isossazolo, *325*.
STAMPACCHIA G. – Sulle successioni di funzioni continue rispetto ad una variabile e misurabili rispetto ad un'altra, *198*.
SUPINO G. – Sul moto irrotazionale dei liquidi viscosi. Nota I, *615*.
— Sul moto irrotazionale dei liquidi viscosi. Nota II, *708*.

T

TANZI B. e BATTAGLIA B. – La fosfatasi alcalina nella ghiandola nidamentale dei Selaci, *747*.
TONOLO A. – Sulle varietà riemanniane normali a tre dimensioni, *438*.
TOSCANO L. – Sviluppi in serie della funzione ipergeometrica di Kummer, *590*.

U

UDESCHINI P. – Sulla indeterminazione del tensore energetico nello spazio-tempo, *216*.
URBANI E. – Osservazioni sull'acido ribonucleico dell'oocite in crescita di « Antedon rosacea » Lamarck, *131*.
— Osservazioni sull'acido ribonucleico dell'oocite in crescita di « Pholcus phalangioides » Füssly, *526*.
URBANI-MISTRUZZI L. – Alcuni problemi delle parabiosi studiati negli Anfibi. Nota I, *530*.
— — Alcuni problemi delle parabiosi studiati negli Anfibi. Nota II, *759*.

V

VANNINI E. – Azioni femminizzanti e mascolinizzanti del desossicorticosterone sulle gonadi di girini di « Rana dalmatina », *358*.
— A proposito dell'origine interrenale del tessuto midollare della gonade negli Anfibi e negli Uccelli, *511*.
VANNINI E. e CESSI T. – Comunanza di origine fra il blastema della corteccia surrenale e il tessuto midollare della gonade nell'embrione di cavia, *650*.
VAONA G. – Trasformazioni puntuali fra due piani in una coppia e direzioni caratteristiche indeterminate, *194*.
VAONA G., vedi VILLA M.
VILLA M. e VAONA G. – Le trasformazioni puntuali in una coppia a Jacobiano nullo. – I. Intorno del 2° ordine, *184*.
— — Le trasformazioni puntuali in una coppia a Jacobiano nullo. – II. Intorno del 3° ordine. Riferimenti intrinseci, *278*.
VIOLA T. – L'integrale in forma ordinaria, alla frontiera d'un campo dello spazio funzionale lagrangiano di prim'ordine, *673*.
VISCONTI DI MODRONE N., vedi QUILICO A.

Z

ZEILON N. – Sul calcolo numerico degli autovalori, *52*.
ZOTTA M., vedi RICCOBONI L.

INDICE PER MATERIE

A

Analisi. — Due criteri di convergenza uniforme per le successioni di funzioni monotone di due variabili in un rettangolo e nel piano. R. CONTI, *202*.

— Sul problema di Cauchy per l'equazione di tipo misto $x^2 z_{xx} - y^2 z_{yy} = 0$. R. CONTI *577*.

— Una condizione necessaria e sufficiente per la convergenza uniforme nell'intervallo $(-\infty, \infty)$ di una successione di funzioni di una variabile, a variazione limitata, e sua estensione alle funzioni di due (o più) variabili. G. OTTAVIANI, *291*.

— Sulle successioni di funzioni continue rispetto ad una variabile e misurabili rispetto ad un'altra. G. STAMPACCHIA, *198*.

Analisi matematica. — Un nuovo metodo per l'integrazione dei problemi di propagazione. S. FAEDO, *435*.

— Chiarimento a una Nota del professore W. Sierpiński. Nota I. S. FAEDO, *572*.

— Chiarimento a una Nota del professore W. Sierpiński. Nota II. S. FAEDO, *667*.

— L'integrale in forma ordinaria, alla frontiera d'un campo dello spazio funzionale lagrangiano del prim'ordine. T. VIOLA, *673*.

— Sul calcolo numerico degli autovalori. N. ZEILON, *52*.

Anatomia umana. — Ricerche sull'esistenza di una formazione sfinterica del meato ureterale nell'uomo. A. RUOTOLO, *232*.

Antropologia. — Sulle variazioni della statura e del peso nell'accrescimento. V. CORRENTI, *378*.

Astronomia. — Altezza della cromosfera nell'anno 1948 ed andamento del ciclo solare. G. ABETTI, *555*.

— Sopra la doppia 12050 del Catalogo di Aitken. M. A. GIANNUZZI, *315*.

— Serie oscillatorie ad autoregressione disturbata e moto polare di Chandler. Nota I. T. NICOLINI, *73*.

— Serie oscillatorie ad autoregressione disturbata e moto polare di Chandler. Nota II. T. NICOLINI, *222*.

— Risoluzione della coppia polarografica cadmio–indio. G. SEMERANO, *556*.

B

Biologia. — Ricerche sull'istogenesi dei muscoli in condizioni sperimentalmente modificate. R. AMPRINO, *645*.

— Ricerche sull'azione oligodinamica dell'argento. E. BIOCCA, *246*.

— Il metabolismo batterico del glicerolo e dei suoi derivati. – III. Comportamento di alcuni «Mycobacteria». E. BONETTI e M. ALOISI, *492*.

— Sull'ossidazione dell'acido fenilpiruvico e p–ossifenilpiruvico con acido ascorbico. D. CAVALLINI, *115*.

— La catalasi negli organi di «Bufo vulgaris» in metamorfosi. E. CAVAZZINI, *250*.

— La formazione degli organi di senso nella larva delle Ascidie semplici. M. P. CEAS, *498*.

— Ricerche sul differenziamento specifico di alcuni neuroni dei Teleostei. M. D'AMBROGI, *127*.

— Autofecondazione e fecondazione incrociata nelle «Ascidie». M. M. ESPOSITO SEU, *502*.

— Effetti della serra calda sull'ipofisi del Tritone crestato. V. MAZZI, *523*.

— Ulteriori osservazioni intorno all'effetto della serra calda sul ciclo sessuale del Tritone crestato. V. MAZZI e M. GALGANO, *518*.

— La morfologia dell'ipofisi del Tritone crestato. V. MAZZI e M. PIERI, *365*.

— Studio morfologico, al microscopio elettronico, dei fagi attivi sui micobatteri. V. ORTALI e G. PENSO, *248*.

— Isolamento e studio di fagi attivi sui micobatteri. G. PENSO e V. ORTALI, *109*.

— Sul potere patogeno di un micobatterio: il cosidetto «ceppo Battaglini». G. PENSO, G. LELLI e V. ORTALI, *750*.

— Sull'ibridazione tra «Bufo viridis» e «Bufo vulgaris». Nota II. T. PERRI, *255*.

— Sullo sviluppo dei blastomeri isolati dell'uovo di «Ascidia» allo stadio II. A. PISANÒ, *505*.

— La fosfatasi alcalina nella ghiandola nidamentale dei Selaci. B. TANZI e B. BATTAGLIA, *747*.
— Osservazioni sull'acido ribonucleico dell'oocite in crescita di « Antedon rosacea » Lamarck. E. URBANI, *131*.
— Osservazioni sull'acido ribonucleico dell'oocite in crescita di « Pholcus phalangioides » Füssly. E. URBANI, *526*.
— Alcuni problemi delle parabiosi studiati negli anfibi. Nota I. L. URBANI-MISTRUZZI, *530*.
— Alcuni problemi delle parabiosi studiati negli anfibi. Nota II. L. URBANI-MISTRUZZI, *759*.
— Azioni femminizzanti e mascolinizzanti del desossicorticosterone sulle gonadi di girini di « Rana dalmatina ». E. VANNINI, *358*.
— A proposito dell'origine interrenale del tessuto midollare della gonade negli Anfibi e negli Uccelli. E. VANNINI, *511*.
— Comunanza di origine fra il blastema della corteccia surrenale e il tessuto midollare della gonade nell'embrione di cavia. E. VANNINI e T. CESSI, *650*.
Biologia vegetale. — Ricerche sull'azione della vernalizzazione nel metabolismo del « Triticum vulgare ». D. PETRUCCI, *742*.
Botanica. — Sul valore dello strato epidermico che tappezza la faccia ventrale del carpello delle Angiosperme: osservazioni in « Idesia polycarpa » Maxim. R. CORTI, *135*.
— Il significato del tappeto delle antere al suo primo differenziarsi: Osservazioni in « Idesia polycarpa » Maxim. R. CORTI, *343*.
— L'Ecologia dell'Abete bianco appenninico. – I. Morfologia e biologia. A. GIACOBBE, *339*.
— Variabilità, differenziazione ed osservazioni biologiche su di una Cianoficea. V. MARCHESONI, *227*.

C

Chimica. — Velocità ultrasonore e compressibilità adiabatiche in alcuni derivati benzenici bisostituiti isomeri. M. BACCAREDDA, *466*.
— Ricerche polarografiche e coulombometriche sui cianuri complessi di cobalto. V. CAGLIOTI, G. SARTORI e P. SILVESTRONI, *273*.
— Ricerche polarografiche e coulombometriche su alcuni complessi cianidrici del manganese mono e bivalente. V. CAGLIOTI, G. SARTORI e P. SILVESTRONI, *407*.
— Attività antibatterica di alcune cumarine naturali e sintetiche. E. DEL PIANTO, *714*.
— Contributo alle conoscenze sul metodo dell'ione pilota in polarografia quantitativa. E. GAGLIARDO, *80*.
— Il comportamento dell'« Aerosol » O T all'elettrodo a goccia di mercurio. E. GAGLIARDO, *721*.
— Inibitori di fenolossidasi nel fegato e nel pancreas. C. LENTI, *86*.
— Ponte sbilanciato per titolazioni conduttometriche. L. RICCOBONI e E. FERRARI, *632*.
— Sulla preparazione del fenil-etil-diclorosilano. L. RICCOBONI e M. ZOTTA, *472*.
— Risoluzione della coppia polarografica cadmio–indio. G. SEMERANO, *556*.
Chimica biologica. — Deidrogenazione dei grassi epatici da perfrigerazione. S. BOCCHIOTTI e S. PONTREMOLI, *478*.
— Dosaggio separato dei piridin nucleotidi e della N_1–metilnicotinamide dei tessuti mediante l'azione della nucleosidasi. A. BONSIGNORE, *475*.
— La reazione di condensazione acetonica e del butanolo alcalino (F_2) nello studio dei composti piridinici ad N quaternario derivati dalla nicotinamide o dalla N_1–metilnicotinamide nel fegato di ratto. A. BONSIGNORE e L. BEVILACQUA, *333*.
— Ricerche sulla natura del composto dosabile come N_1–metilnicotinamide nel fegato di ratto trattato con nicotinamide. A. BONSIGNORE e C. RICCI, *337*.
Chimica delle fermentazioni. – Ricerche sulla fermentazione citrica con mutanti indotti di « Aspergillus niger ». A. QUILICO, L. PANIZZI e N. VISCONTI DI MODRONE, *40*.
Chimica-fisica. — Indici di legame e spettri di oscillazione nelle molecole poliatomiche. G. B. BONINO e E. SCROCCO, *421*.
— Ricerche magnetiche su alcuni complessi dell'uranio^{IV}, a numero di coordinazione otto. L. SACCONI, *639*.
Chimica-fisica organica. — Sull'isossazolo. G. SPERONI e P. PINO, *325*.
Chimica inorganica. — Sulla struttura cristallina del composto $PrGe_2$. A. IANDELLI, *727*.

Chimica organica. — Contributi allo studio della struttura dei chinoni e delle forme chinoidi. – VI. Energie medie di risonanza ed energie minime di eccitazione elettronica nelle forme naftochinoniche. G. B. BONINO e E. SCROCCO, *36*.

— Sulla preparazione dell'isossazolo. A. QUILICO e G. PALAZZO, *168*.

Citologia. — Il comportamento del nucleo durante le prime fasi dello sviluppo embrionale in « Rana esculenta ». G. COLOMBO, *120*.

— Altre osservazioni sul comportamento del nucleo durante le prime fasi dello sviluppo embrionale degli Anfibi. G. COLOMBO, *370*.

Commemorazioni. — Commemorazione del Corrispondente Carlo Perrier. U. PANICHI, *386*.

Comunicazioni varie, *140, 270, 535, 656*.

E

Endocrinologia. — Sul potere glicoregolatore dell'« Insulina nativa » estratta dal pancreas di uccelli granivori. S. BOCCHIOTTI, A. MURATORIO e O. ROSSI, *374*.

— Tessuto acinoso del pancreas e genesi del diabete da allossana negli uccelli granivori. G. C. MORANDO e U. DACHÀ, *239*.

Elettrochimica. — Concordanze e discordanze fra valori teorici e sperimentali delle forze elettromotrici delle pile elettrochimiche. O. SCARPA, *412*.

Equazioni differenziali. — Una proprietà che caratterizza l'unicità della soluzione delle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine. U. BARBUTI, *298*.

— Valutazione asintotica degli integrali dell'equazione di Liénard che per $t \to -\infty$ tendono allo zero. G. SANSONE, *13*.

— Sopra una classe di equazioni di Liénard prive di integrali periodici. G. SANSONE, *156*.

Errata corrige, *768*.

F

Fisica. — Una verifica della formula di Klein e Nishina, a 2,62 MeV. M. AGENO, M. CHIOZZOTTO e R. QUERZOLI, *319*.

— Sulla nuova tecnica dei contatori a scintillazione. Nota I. M. AGENO, M. CHIOZZOTTO e R. QUERZOLI, *453*.

— Sulla nuova tecnica dei contatori a scintillazione. Nota II. M. AGENO, M. CHIOZZOTTO e R. QUERZOLI, *626*.

— Osservazioni alla Nota di Radicati e Gamba su « Un nuovo metodo per misurare la velocità della luce ». A. AMERIO, *28*.

— Su di un tipo di voltmetro a generazione per alte tensioni. M. CHIOZZOTTO, *458*.

— È possibile determinare la velocità della luce in percorsi aperti? M. GALLI, *620*.

Fisica matematica. — Su di un problema di propagazione termica, trattato col metodo degli operatori funzionali. O. GARAVALDI, *461*.

Fisiologia. — Sugli effetti di alte dosi di tiamina in alcune specie di Anuri. A. ALIBRANDI, *245*.

— Azione della tiroxina sulla paralisi motoria da tiamina. A. ALIBRANDI, *355*.

— Effetti dell'acetilcolina sulla durata dell'apnea volontaria. A. ALIBRANDI e G. ALIBRANDI, *356*.

G

Geodesia. — Sull'interpretazione geodetica del residuo della equazione di Laplace. G. BOAGA, *25*.

— Sulla rappresentazione di Weingarten della sfera sul piano. G. BOAGA, *402*.

Geologia. — Rapporti fra colate laviche e coperture di tufi in una zona meridionale del sistema dei porfidi atesini (altopiano di Pinè). C. ANDREATTA, *563*.

— Sulla tettonica degli altipiani del Gran Sasso d'Italia. J. DEMANGEOT, *734*.

— Stratigrafia del deposito quaternario della grotta Marilisa da Schio nei Colli Berici (Vicenza). P. LEONARDI, *484*.

— Condizioni tettoniche della zona di Prestine (media Valcamonica). R. MALARODA, *102*.

— Primi risultati di uno studio geologico sulla media Val Camonica a sinistra del fiume Oglio. A. RIEDEL, *97*.

Geometria. — Sulle superficie di Kummer e di Weddle. A. ANDREOTTI, *61*.

— Sur le point principal des courbes tracées sur une surface. E. ARGHIRIADE, *189*.

— Sopra una proprietà delle normali ad una superficie ed una sua parziale estensione. Nota II. G. ASCOLI, *3*.

— Sul gruppo delle trasformazioni cremoniane monomiali. M. BENEDICTY, *697*.

— Tessuti di curve piane e corrispondenze fra piani. E. BOMPIANI, *7*.
— Sulle corrispondenze puntuali fra spazi proiettivi. E. BOMPIANI, *145*.
— Proprietà di curvatura di una particolare classe di varietà a connessione affine. A. COSSU, *702*.
— Una questione di geometria Riemanniana connessa a un problema di ottica geometrica. V. DALLA VOLTA, *64*.
— Sulla costruzione di certe superficie algebriche irregolari. L. GODEAUX, *694*.
— Trasformazioni puntuali fra due piani proiettivi in una coppia di punti corrispondenti a direzioni inflessionali di specie superiore indeterminate. C. LONGO, *68*.
— Un nuovo riferimento intrinseco per le trasformazioni puntuali fra piani proiettivi. A. ROLLERO, *213*.
— Sulle varietà riemanniane normali a tre dimensioni. A. TONOLO, *438*.
— Trasformazioni puntuali fra due piani in una coppia e direzioni caratteristiche indeterminate. G. VAONA, *194*.
— Le trasformazioni puntuali in una coppia a Jacobiano nullo. – I. Intorno del 2° ordine. M. VILLA e G. VAONA, *184*.
— Le trasformazioni puntuali in una coppia a Jacobiano nullo. – II. Intorno del 3° ordine. Riferimenti intrinseci. M. VILLA e G. VAONA, *278*.
Geometria algebrica. — Su una particolare varietà a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche. G. FANO, *151*.

I

Idrodinamica. — Sul motō irrotazionale dei liquidi viscosi. Nota I. G. SUPINO, *615*.
— Sul moto irrotazionale dei liquidi viscosi. Nota II. G. SUPINO, *708*.

M

Matematica. — Relazioni tra il metodo della trasformata multipla di Laplace e il metodo di M. Riesz per l'integrazione di equazioni di tipo iperbolico. Nota II. L. AMERIO, *48*.
— Relazioni tra il metodo della trasformata multipla di Laplace e il metodo di M. Riesz per l'integrazione di equazioni di tipo iperbolico. Nota III. L. AMERIO, *175*.
— Sulle probabilità di Karup. F. P. CANTELLI, *397*.
— Considerazioni sulla legge uniforme dei grandi numeri. Nota I. F. P. CANTELLI, *550*.
— Sopra alcuni casi di riducibilità alle quadrature per le equazioni del moto di un punto sollecitato da forze posizionali. G. COLOMBO, *286*.
— Proprietà di media toroidali delle funzioni armoniche. G. FICHERA, *431*.
— Sul calcolo delle deformazioni, dotate di simmetria assiale, di uno strato sferico elastico. G. FICHERA, *582*.
— Sulla generazione di una trasformazione finita assegnata su una curva chiusa mediante una trasformazione infinitesima. A. FINZI, *688*.
— Sul sistema aggiunto ad una curva riducibile. A. FRANCHETTA, *685*.
— Sur l'approximation diophantique linéaire. N. OBRECHKOFF, *283*.
— Intorno alle probabilità di Karup e legame con la teoria dei capitali accumulati. G. OTTAVIANI, *679*.
— Due problemi variazionali nella teoria metrica delle superficie rigate. G. SABAN, *207*.
— Sul calcolo degli autovalori mediante differenze finite ed estrapolazione. M. SALVADORI, *181*.
— Alcune proprietà caratteristiche delle varietà a curvatura costante. Nota I, B. SEGRE, *393*.
— Alcune proprietà caratteristiche delle varietà a curvatura costante. Nota II. B. SEGRE, *547*.
— Alcune proprietà caratteristiche delle varietà a curvatura costante. Nota III. B. SEGRE, *661*.
Meccanica. — Deduzione dalla meccanica statistica di una legge di dipendenza della compressibilità dei solidi dalla temperatura. P. G. BORDONI, *597*.
— Verifica sismica di massima di una torre metallica. E. CAMBI, *608*.
— Effetto dell'elasticità ritardata sugli stati di coazione di origine viscosa. C. CASTIGLIA, *311*.
— Il Turboreattore d'alta quota. G. A. CROCCO, *161*.
— Discontinuità sul fronte d'onda delle azioni gravitazionali. B. FINZI, *18*.
— Sulla matrice di Green di un problema di Elasticità Piana. W. GROSS, *444*.

— Generalizzazione del legame sforzi-deformazioni nei solidi elastico-viscosi. F. LEVI, *304*.
— Sul moto di un solido asimmetrico attorno ad un punto fisso. T. MANACORDA, *711*.
— Sulla stabilità delle vibrazioni quasi armoniche di un sistema dissipativo. R. NARDINI, *603*.
— Sulla indeterminazione del tensore energetico nello spazio-tempo. P. UDESCHINI, *216*.
Metereologia. — La pioggia invernale a Roma dal 1825 al 1949. G. ARMELLINI CONTI, *449*.
Mineralogia. — Sulla presenza del radicale solforico in alcuni nesosilicati. G. MARINELLI, *487*.

O

Opere pervenute in dono all'Accademia, *144, 272, 391, 544, 658, 768*.

P

Paleontologia. — Osservazioni sulle forme di « Neosqualodon » del Miocene della Sicilia. R. FABIANI, *428*.
Patologia. — Sulla posizione sistematica e sulla importanza epidemiologica di un particolare germe, il « Paracoli são paulo ». E. BIOCCA, *125*.
— Ricerche parassitologiche e biologiche sul materiale del Giardino Zoologico di Roma. – I. Osservazioni parassitologiche su alcuni mammiferi di recente cattura ed importazione. E. BRONZINI, *739*.
Personale accademico, *139, 390, 537, 765*.
Petrografia. — Sui costituenti minori di alcune rocce argillose appenniniche e sul loro probabile significato. P. GALLITELLI, *31*.
— Facies ultrafemiche nei basalti dell'Africa Orientale. O. HIEKE MERLIN, *89*.
Plichi suggellati, *656*.
Premi in corso di assegnazione presso l'Accademia Nazionale dei Lincei, *538*.
Presentazione di libri, *140, 270, 389, 536, 766*.
Presentazione di Note e Memorie, *139, 270, 389, 536, 656, 766*.

R

Relazioni di Commissioni, *657, 767*.

S

Scienza dell'Alimentazione. — Sull'assorbimento delle albumine e globuline del siero di sangue. C. ARDY e U. DACHÀ, *481*.
Scienza della nutrizione. — Azione dei farmaci simpaticolitici sulle combustioni (A. D. S.) provocate dagli autolizzati proteici. C. LOMBROSO e C. ARDY, *259*.
Sviluppi in serie. — Sviluppi in serie della funzione ipergeometrica di Kummer. L. TOSCANO, *590*.

T

Talassobiologia. — Minore prodotto delle tonnare della Sicilia orientale nell'ultimo quinquennio e problemi relativi. A. RUSSO, *569*.
Temi per discussioni, *767*.

Z

Zoologia. — Rilievi craniometrici in alcuni Microchirotteri nostrani. G. M. BAFFONI, *264*.
— La diafisi e l'estremità distale del femore di « Strepsiceros strepsiceros ». S. BEER e A. SACCHETTI, *347*.
— Identificazione del « Triton intermedium » G. Costa, 1871, col « Triturus italicus » (Peracca), 1898. M. GALGANO, *352*.

INDICI DEI FASCICOLI

FASCICOLO 1.

GENNAIO 1949.

NOTE DI SOCI

ASCOLI G. – Sopra una proprietà delle normali ad una superficie ed una sua parziale estensione . . . . . Pag. 3
BOMPIANI E. – Tessuti di curve piane e corrispondenze fra piani 7
SANSONE G. – Valutazione asintotica degli integrali dell'equazione di Liénard che per $t \to -\infty$ tendono allo zero 13
FINZI B. – Discontinuità sul fronte d'onda delle azioni gravitazionali 18
BOAGA G. – Sull'interpretazione geodetica del residuo della equazione di Laplace . 25
AMERIO A. – Osservazioni alla Nota di Radicati e Gamba su «Un nuovo metodo per misurare la velocità della luce» 28
GALLITELLI P. – Sui costituenti minori di alcune rocce argillose appenniniche e sul loro probabile significato. 31
BONINO G. B. e SCROCCO E. – Contributi allo studio della struttura dei chinoni e delle forme chinoidi. – VI. Energie medie di risonanza ed energie minime di eccitazione elettronica nelle forme naftochinoniche (pres. dal Socio *G. B. Bonino*) 36
QUILICO A., PANIZZI L. e VISCONTI DI MODRONE N. – Ricerche sulla fermentazione citrica con mutanti indotti di «Aspergillus niger» (pres. dal Corrisp. *A. Quilico*) 40

NOTE PRESENTATE DA SOCI

AMERIO L. – Relazioni tra il metodo della trasformata multipla di Laplace e il metodo di M. Riesz per l'integrazione di equazioni di tipo iperbolico. Nota II (pres. dal Socio *M. Picone*) . . . . . Pag. 48
ZEILON N. – Sul calcolo numerico degli autovalori (pres. dal Socio *M. Picone*) 52
ANDREOTTI A. – Sulle superficie di Kummer e di Weddle (pres. dal Socio *F. Severi*) 61
DALLA VOLTA V. – Una questione di geometria Riemanniana connessa a un problema di ottica geometrica (pres. dal Socio *A. Signorini*) 64
LONGO C. – Trasformazioni puntuali fra due piani proiettivi in una coppia di punti corrispondenti a direzioni inflessionali di specie superiore indeterminate (pres. dal Socio *E. Bompiani*) 68
NICOLINI T. – Serie oscillatorie ad autoregressione disturbata e moto polare di Chandler. Nota I (pres. dal Socio *L. Carnera*) 73
GAGLIARDO E. – Contributo alle conoscenze sul metodo dell'ione pilota in polarografia quantitativa (pres. dal Corrisp. *G. Semerano*) 80
LENTI C. – Inibitori di fenolossidasi nel fegato e nel pancreas (pres. dal Socio *A. Herlitzka*) 86
HIEKE MERLIN O. – Facies ultrafemiche nei basalti dell'Africa Orientale (pres. dal Socio *A. Bianchi*) 89

RIEDEL A. – Primi risultati di uno studio geologico sulla media Val Camonica a sinistra del fiume Oglio (pres. dal Corrisp. *Gb. Dal Piaz*) . . . . . Pag. 97
MALARODA R. – Condizioni tettoniche della zona di Prestine (media Valcamonica) (pres. dal Corrisp. *Gb. Dal Piaz*) 102
PENSO G. e ORTALI V. – Isolamento e studio di fagi attivi sui micobatteri (pres. dal Corrisp. *D. Marotta*) 109
CAVALLINI D. – Sull'ossidazione dell'acido fenilpiruvico e p-ossifenilpiruvico con acido ascorbico (pres. dal Corrisp. *G. Vernoni*) 115
COLOMBO G. – Il comportamento del nucleo durante le prime fasi dello sviluppo embrionale in « Rana esculenta » (pres. dal Corrisp. *U. D'Ancona*) 120
BIOCCA E. – Sulla posizione sistematica e sulla importanza epidemiologica di un particolare germe, il « Paracoli são paulo » (pres. dal Corrisp. *V. Puntoni*) . . . 125
D'AMBROGI M. – Ricerche sul differenziamento specifico di alcuni neuroni dei Teleostei (pres. dal Socio *G. Cotronei*) 127
URBANI E. – Osservazioni sull'acido ribonucleico dell'oocite in crescita di « Antedon rosacea » Lamarck (pres. dal Socio *G. Cotronei*) 131
CORTI R. – Sul valore dello strato epidermico che tappezza la faccia ventrale del carpello delle Angiosperme: osservazioni in « Idesia polycarpa » Maxim (pres. dal Socio *G. Negri*) 135

Personale Accademico 139
Presentazione di Note e Memorie 139
Presentazione di libri 140
Comunicazioni Varie. 140
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta dell'8 gennaio 1949 144

FASCICOLO 2.

FEBBRAIO 1949.

NOTE DI SOCI

BOMPIANI E. – Sulle corrispondenze puntuali fra spazi proiettivi . . . . . Pag. 145
FANO G. – Su una particolare varietà a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche . 151
SANSONE G. – Sopra una classe di equazioni di Liénard prive di integrali periodici 156
CROCCO G. A. – Il Turboreattore d'alta quota 161
QUILICO A. e PALAZZO G. – Sulla preparazione dell'isossazolo (pres. dal Corrisp. *A. Quilico*) 168

NOTE PRESENTATE DA SOCI

AMERIO L. – Relazioni tra il metodo della trasformata multipla di Laplace e il metodo di M. Riesz per l'integrazione di equazioni di tipo iperbolico. Nota III. (pres. dal Socio *M. Picone*) . . . . . Pag. 175
SALVADORI M. – Sul calcolo degli autovalori mediante differenze finite ed estrapolazione (pres. dal Corrisp. *G. Krall*) 181
VILLA M. e VAONA G. – Le trasformazioni puntuali in una coppia a Jacobiano nullo. – I. Intorno del 2° ordine (pres. dal Socio *L. Berzolari*) 184
ARGHIRIADE E. – Sur le point principal des courbes tracées sur une surface (pres. dal Socio *E. Bompiani*) 189
VAONA G. – Trasformazioni puntuali fra due piani in una coppia e direzioni caratteristiche indeterminate (pres. dal Socio *E. Bompiani*) 194

STAMPACCHIA G. – Sulle successioni di funzioni continue rispetto ad una variabile e misurabili rispetto ad un'altra (pres. dal Corrisp. *R. Caccioppoli*) . . . Pag. 198
CONTI R. – Due criteri di convergenza uniforme per le successioni di funzioni monotone di due variabili in un rettangolo e nel piano (pres. dal Corrisp. *G. Sansone*) 202
SABAN G. – Due problemi variazionali nella teoria metrica delle superficie rigate (pres. dal Corrisp. *B. Segre*) 207
ROLLERO A. – Un nuovo riferimento intrinseco per le trasformazioni puntuali fra piani proiettivi (pres. dal Socio *G. Loria*). 213
UDESCHINI P. – Sulla indeterminazione del tensore energetico nello spazio-tempo (pres. dal Corrisp. *B. Finzi*) 216
NICOLINI T. Serie oscillatorie ad autoregressione disturbata e moto polare di Chandler. Nota II (pres. dal Socio *L. Carnera*) 222
MARCHESONI V. – Variabilità, differenziazione ed osservazioni biologiche su di una Cianoficea (pres. dal Socio *G. Gola*) 227
RUOTOLO A. – Ricerche sull'esistenza di una formazione sfinterica del meato ureterale nell'uomo (pres. dal Socio *S. Sergi*) 232
MORANDO G. C. e DACHÀ U. – Tessuto acinoso del pancreas e genesi del diabete da allossana negli uccelli granivori (pres. dal Corrisp. *U. Lombroso*) 239
ALIBRANDI A. – Sugli effetti di alte dosi di tiamina in alcune specie di anuri (pres. dal Socio *C. Ciaccio*) 245
BIOCCA E. – Ricerche sull'azione oligodinamica dell'argento (pres. dal Corrisp. *V. Puntoni*) 246
ORTALI V. e PENSO G. – Studio morfologico, al microscopio elettronico, dei fagi attivi sui micobatteri (pres. dal Corrisp. *D. Marotta*). 248
CAVAZZINI E. – La catalasi negli organi di « Bufo vulgaris » in metamorfosi (pres. dal Socio *G. Cotronei*) 250
PERRI T. – Sull'ibridazione tra « Bufo viridis » e « Bufo vulgaris ». Nota II (pres. dal Socio *G. Cotronei*) 255
LOMBROSO C. e ARDY C. – Azione dei farmaci simpaticolitici sulle combustioni (A.D.S.) provocate dagli autolizzati proteici (pres. dal Corrisp. *U. Lombroso*) . . 259
BAFFONI G. M. – Rilievi craniometrici in alcuni Microchirotteri nostrani (pres. dal Socio *S. Sergi*) 264
Comunicazioni varie 270
Presentazione di libri 270
Presentazione di Note e Memorie 270
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 12 febbraio 1949 272

FASCICOLO 3.

MARZO 1949.

NOTE DI SOCI

CAGLIOTI V., SARTORI G. e SILVESTRONI P. – Ricerche polarografiche e coulombometriche sui cianuri complessi di cobalto (pres. dal Corrisp. *V. Caglioti*) . . . . Pag. 273

NOTE PRESENTATE DA SOCI

VILLA M. e VAONA G. – Le trasformazioni puntuali in una coppia a Jacobiano nullo. – II. Intorno del 3° ordine. Riferimenti intrinseci (pres. dal Socio *L. Berzolari*) Pag. 278
OBRECHKOFF N. – Sur l'approximation diophantique linéaire (pres. dal Socio *G. Castelnuovo*) 283

COLOMBO G. – Sopra alcuni casi di riducibilità alle quadrature per le equazioni del moto di un punto sollecitato da forze posizionali (pres. dal Socio *U. Amaldi*) . . Pag. 286
OTTAVIANI G. – Una condizione necessaria e sufficiente per la convergenza uniforme nell'intervallo $(-\infty, \infty)$ di una successione di funzioni di una variabile, a variazione limitata, e sua estensione alle funzioni di due (o più) variabili (pres. dal Corrisp. *F. P. Cantelli*) 291
BARBUTI U. – Una proprietà che caratterizza l'unicità della soluzione delle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine (pres. dal Corrisp. *G. Sansone*) 298
LEVI F. – Generalizzazione del legame sforzi-deformazioni nei solidi elastico-viscosi (pres. dal Socio *G. Colonnetti*) 304
CASTIGLIA C. – Effetto dell'elasticità ritardata sugli stati di coazione di origine viscosa (pres. dal Socio *G. Colonnetti*) 311
GIANNUZZI M. A. – Sopra la doppia 12050 del Catalogo di Aitken (pres. dal Socio *G. Armellini*) 315
AGENO M., CHIOZZOTTO M. e QUERZOLI R. – Una verifica della formula di Klein e Nishina, a 2,62 MeV (pres. dal Socio *G. C. Trabacchi*) 319
SPERONI G. e PINO P. – Sull'isossazolo (pres. dal Corrisp. *A. Quilico*) 325
BONSIGNORE A. e BEVILACQUA L. – La reazione di condensazione acetonica e del butanolo alcalino (F_2) nello studio dei composti piridinici ad N quaternario derivati dalla nicotinamide o dalla N_1-metilnicotinamide nel fegato di ratto (pres. dal Corrisp. *U. Lombroso*) 333
BONSIGNORE A. e RICCI C. – Ricerche sulla natura del composto dosabile come N_1-metilnicotinamide nel fegato di ratto trattato con nicotinamide (pres. dal Corrisp. *U. Lombroso*) 337
GIACOBBE A. – L'Ecologia dell'Abete bianco appenninico. – I. Morfologia e biologia (pres. dal Socio *G. Negri*) 339
CORTI R. – Il significato del tappeto delle antere al suo primo differenziarsi: Osservazioni in « Idesia polycarpa » Maxim (pres. dal Socio *G. Negri*) 343
BEER S. e SACCHETTI A. – La diafisi e l'estremità distale del femore di « Strepsiceros strepsiceros » (pres. dal Socio *S. Sergi*) 347
GALGANO M. – Identificazione del « Triton intermedium » G. Costa, 1871, col « Triturus italicus » (Peracca), 1898 (pres. dal Socio *N. Beccari*) 352
ALIBRANDI A. – Azione della tiroxina sulla paralisi motoria da tiamina (pres. dal Socio *C. Ciaccio*) 355
ALIBRANDI A. e ALIBRANDI G. – Effetti dell'acetilcolina sulla durata dell'apnea volontaria (pres. dal Socio *C. Ciaccio*) 356
VANNINI E. – Azioni femminizzanti e mascolinizzanti del desossicorticosterone sulle gonadi di girini di « Rana dalmatina » (pres. dal Corrisp. *U. D'Ancona*) 358
MAZZI V. e PIERI M. – La morfologia dell'ipofisi del Tritone crestato (pres. dal Socio *N. Beccari*) 365
COLOMBO G. – Altre osservazioni sul comportamento del nucleo durante le prime fasi dello sviluppo embrionale degli Anfibi (pres. dal Corrisp. *U. D'Ancona*) 370
BOCCHIOTTI S., MURATORIO A. e ROSSI O. – Sul potere glicoregolatore dell'« Insulina nativa » estratta dal pancreas di uccelli granivori (pres. dal Corrisp. *U. Lombroso*) 374
CORRENTI V. – Sulle variazioni della statura e del peso nell'accrescimento (pres. dal Socio *S. Sergi*) 378

COMMEMORAZIONI

PANICHI U. – Commemorazione del Corrispondente Carlo Perrier . . . . . Pag. 386

Presentazione di libri 389
Presentazione di Note e Memorie 389
Personale Accademico 390
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 12 marzo 1949. 391

FASCICOLO 4.

APRILE 1949.

NOTE DI SOCI

SEGRE B. – Alcune proprietà caratteristiche delle varietà a curvatúra costante. Nota I . . . . . Pag. 393
CANTELLI F. P. – Sulle probabilità di Karup 397
BOAGA G. – Sulla rappresentazione di Weingarten della sfera sul piano 402
CAGLIOTI V., SARTORI G. e SILVESTRONI P. – Ricerche polarografiche e coulombometriche su alcuni complessi cianidrici del manganese mono e bivalente (pres. dal Corrisp. *V. Caglioti*) 407
SCARPA O. – Concordanze e discordanze fra valori teorici e sperimentali delle forze elettromotrici delle pile elettrochimiche 412
BONINO G. B. e SCROCCO E. – Indici di legame e spettri di oscillazione nelle molecole poliatomiche (pres. dal Socio *G. B. Bonino*) 421
FABIANI R. – Osservazioni sulle forme di « Neosqualodon » del Miocene della Sicilia . . 428

NOTE PRESENTATE DA SOCI

FICHERA G. – Proprietà di media toroidali delle funzioni armoniche (pres. dal Socio *M. Picone*) . . . . . Pag. 431
FAEDO S. – Un nuovo metodo per l'integrazione dei problemi di propagazione (pres. dal Socio *M. Picone*) 435
TONOLO A. – Sulle varietà riemanniane normali a tre dimensioni (pres. dal Socio *F. Severi*) 438
GROSS W. – Sulla matrice di Green di un problema di Elasticità Piana (pres. dal Socio *M. Picone*) 444
ARMELLINI CONTI G. – La pioggia invernale a Roma dal 1825 al 1949 (pres. dal Socio *G. Armellini*) 449
AGENO M., CHIOZZOTTO M. e QUERZOLI R. – Sulla nuova tecnica dei contatori a scintillazione. Nota I (pres. dal Socio *G. C. Trabacchi*) 453
CHIOZZOTTO M. – Su di un tipo di voltmetro a generazione per alte tensioni (pres. dal Socio *G. C. Trabacchi*) 458
GARAVALDI O. – Su di un problema di propagazione termica, trattato col metodo degli operatori funzionali (pres. dal Socio *G. Giorgi*) 461
BACCAREDDA M. – Velocità ultrasonore e compressibilità adiabatiche in alcuni derivati benzenici bisostituiti isomeri (pres. dal Corrisp. *G. Natta*) 466
RICCOBONI L. e ZOTTA M. – Sulla preparazione del fenil-etil-diclorosilano (pres. dal Corrisp. *G. Semerano*) 472
BONSIGNORE A. – Dosaggio separato dei piridin nucleotidi e della N_1-metilnicotinamide dei tessuti mediante l'azione della nucleosidasi (pres. dal Corrisp. *U. Lombroso*) 475
BOCCHIOTTI S. e PONTREMOLI S. – Deidrogenazione dei grassi epatici da perfrigerazione (pres. dal Corrisp. *U. Lombroso*) 478
ARDY C. e DACHÀ U. – Sull'assorbimento delle albumine e globuline del siero di sangue (pres. dal Corrisp. *U. Lombroso*) 481
LEONARDI P. – Stratigrafia del deposito quaternario della grotta Marilisa da Schio nei Colli Berici (Vicenza) (pres. dal Corrisp. *G. B. Dal Piaz*) 484

MARINELLI G. – Sulla presenza del radicale solforico in alcuni nesosilicati (pres. dal Corrisp. *G. Carobbi*) . . . . . Pag. 487
BONETTI E. e ALOISI M. – Il metabolismo batterico del glicerolo e dei suoi derivati. – III. Comportamento di alcuni «Mycobacteria» (pres. dal Socio *G. Vernoni*) . . 492
CEAS M. P. – La formazione degli organi di senso nella larva delle Ascidie semplici (pres. dal Socio *G. Cotronei*) 498
ESPOSITO SEU M. M. – Autofecondazione e fecondazione incrociata nelle «Ascidie» (pres. dal Socio *G. Cotronei*) 502
PISANÒ A. – Sullo sviluppo dei blastomeri isolati dell'uovo di «Ascidia» allo stadio II (pres. dal Socio *G. Cotronei*) 505
VANNINI E. – A proposito dell'origine interrenale del tessuto midollare della gonade negli Anfibi e negli Uccelli (pres. dal Corrisp. *U. D'Ancona*) 511
MAZZI V. e GALGANO M. – Ulteriori osservazioni intorno all'effetto della serra calda sul ciclo sessuale del Tritone crestato (pres. dal Socio *N. Beccari*). 518
MAZZI V. – Effetti della serra calda sull'ipofisi del Tritone crestato (pres. dal Socio *N. Beccari*) 523
URBANI E. – Osservazioni sull'acido ribonucleico dell'oocite in crescita di «Pholcus phalangioides» Füssly (pres. dal Socio *G. Cotronei*) 526
URBANI-MISTRUZZI L. – Alcuni problemi delle parabiosi studiati negli anfibi. Nota I (pres. dal Socio *G. Cotronei*) 530

Comunicazioni varie 535
Presentazione di Note e Memorie 536
Presentazione di libri 536
Personale Accademico 537
Premi in corso d'assegnazione presso l'Accademia Nazionale dei Lincei 538
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 9 aprile 1949. . 544

FASCICOLO 5.

MAGGIO 1949.

NOTE DI SOCI

SEGRE B. – Alcune proprietà caratteristiche delle varietà a curvatura costante. Nota II . . . . . Pag. 547
CANTELLI F. P. – Considerazioni sulla legge uniforme dei grandi numeri. Nota I 550
ABETTI G. – Altezza della cromosfera nell'anno 1948 ed andamento del ciclo solare 555
SEMERANO G. – Risoluzione della coppia polarografica cadmio-indio 556
ANDREATTA C. – Rapporti fra colate laviche e coperture di tufi in una zona meridionale del sistema dei porfidi atesini (altopiano di Pinè) 563
RUSSO A. – Minore prodotto delle tonnare della Sicilia orientale nell'ultimo quinquennio e problemi relativi 569

NOTE PRESENTATE DA SOCI

FAEDO S. - Chiarimento a una Nota del professore W. Sierpiński. Nota I (pres. dal Socio *M. Picone*) . . . . . Pag. 572
CONTI R. – Sul problema di Cauchy per l'equazione di tipo misto $x^2 z_{xx} - y^2 z_{yy} = 0$ (pres. dal Corrisp. *G. Sansone*) 577
FICHERA G. – Sul calcolo delle deformazioni, dotate di simmetria assiale, di uno strato sferico elastico (pres. dal Socio *M. Picone*) 582

TOSCANO L. – Sviluppi in serie della funzione ipergeometrica di Kummer (pres. dal Corrisp. *G. Sansone*) . . . . . Pag. 590
BORDONI P. G. – Deduzione dalla meccanica statistica di una legge di dipendenza della compressibilità dei solidi dalla temperatura (pres. dal Socio *A. Signorini*) 597
NARDINI R. – Sulla stabilità delle vibrazioni quasi armoniche di un sistema dissipativo (pres. dal Corrisp. *G. Sansone*). 603
CAMBI E. – Verifica sismica di massima di una torre metallica (pres. dal Corrisp. *G. Albenga*) 608
SUPINO G. – Sul moto irrotazionale dei liquidi viscosi (pres. dal Socio *A. Signorini*) 615
GALLI M. – È possibile determinare la velocità della luce in percorsi aperti ? (pres. dal Corrisp. *L. Tieri*) 620
AGENO M., CHIOZZOTTO M. e QUERZOLI R. – Sulla nuova tecnica dei contatori a scintillazione. Nota II (pres. dal Socio *G. C. Trabacchi*) 626
RICCOBONI L. e FERRARI E. – Ponte sbilanciato per titolazioni conduttometriche (pres. dal Corrisp. *G. Semerano*) 632
SACCONI L. – Ricerche magnetiche su alcuni complessi dell'uranio^{IV}, a numero di coordinazione otto (pres. dal Corrisp. *V. Caglioti*) 639
AMPRINO R. – Ricerche sull'istogenesi dei muscoli in condizioni sperimentalmente modificate (pres. dal Socio *G. Levi*) 645
VANNINI E. e CESSI T. – Comunanza di origine fra il blastema della corteccia surrenale e il tessuto midollare della gonade nell'embrione di cavia (pres. dal Corrisp. *U. D'Ancona*) 650

Comunicazioni varie 656
Plichi suggellati. 656
Presentazione di Note e Memorie 656
Relazioni di Commissioni 657
Presentazione di libri 657
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta del 12 maggio 1949 658

FASCICOLO 6.

GIUGNO 1949.

NOTE DI SOCI

SEGRE B. – Alcune proprietà caratteristiche delle varietà a curvatura costante. Nota III . . . . . Pag. 661

NOTE PRESENTATE DA SOCI

FAEDO S. – Chiarimento a una Nota del professore W. Sierpiński. Nota II (pres. dal Socio *M. Picone*) . . . . . Pag. 667
VIOLA T. – L'integrale in forma ordinaria, alla frontiera d'un campo dello spazio funzionale lagrangiano del prim'ordine (pres. dal Socio *M. Picone*) 673
OTTAVIANI G. – Intorno alle probabilità di Karup e legame con la teoria dei capitali accumulati (pres. dal Corrisp. *F. P. Cantelli*) 679
FRANCHETTA A. – Sul sistema aggiunto ad una curva riducibile (pres. dal Socio *F. Severi*) 685

FINZI A. – Sulla generazione di una trasformazione finita assegnata su una curva chiusa mediante una trasformazione infinitesima (pres. dal Socio *U. Amaldi*) Pag. 688
GODEAUX L. – Sulla costruzione di certe superficie algebriche irregolari (pres. dal Corrisp. *B. Segre*) . . . 694
BENEDICTY M. – Sul gruppo delle trasformazioni cremoniane monomiali (pres. dal Socio *F. Severi*). . . . 697
COSSU A. – Proprietà di curvatura di una particolare classe di varietà a connessione affine (pres. dal Corrisp. *B. Segre*) . . . 702
SUPINO G. – Sul moto irrotazionale dei liquidi viscosi. Nota II (pres. dal Socio *A. Signorini*) . . . 708
MANACORDA T. – Sul moto di un solido asimmetrico attorno ad un punto fisso (pres. dal Socio *A. Signorini*) . . . 711
DEL PIANTO E. – Attività antibatterica di alcune cumarine naturali e sintetiche (pres. dal Socio *G. Bargellini*) . . . 714
GAGLIARDO E. – Il comportamento dell'« Aerosol » O T all'elettrodo a goccia di mercurio (pres. dal Corrisp. *G. Semerano*) . . . 721
IANDELLI A. – Sulla struttura cristallina del composto $PrGe_2$ (pres. dal Socio *L. Rolla*) 727
DEMANGEOT J. – Sulla tettonica degli altipiani del Gran Sasso d'Italia (pres. dal Socio *R. Fabiani*) . . . 734
BRONZINI E. Ricerche parassitologiche e biologiche sul materiale del Giardino Zoologico di Roma. – I. Osservazioni parassitologiche su alcuni mammiferi di recente cattura ed importazione (pres. dal Corrisp. *V. Puntoni*). . . . 739
PETRUCCI D. – Ricerche sull'azione della vernalizzazione nel metabolismo del « Triticum vulgare » (pres. dal Socio *G. Vernoni*) . . . 742
TANZI B. e BATTAGLIA B. – La fosfatasi alcalina nella ghiandola nidamentale dei Selaci (pres. dal Socio *G. Cotronei*) . . . 747
PENSO G., LELLI G., ORTALI V. – Sul potere patogeno di un micobatterio: il cosidetto « ceppo Battaglini » (pres. dal Corrisp. *D. Marotta*) . . . 750
URBANI-MISTRUZZI L. – Alcuni problemi delle parabiosi studiati negli anfibi. Nota II (pres. dal Socio *G. Cotronei*) . . . 759

Personale accademico . . . 765
Presentazione di libri . . . 766
Presentazione di Note e Memorie. . . . 766
Relazioni di Commissioni . . . 767
Temi per discussioni. . . . 767
Opere pervenute in dono all'Accademia presentate nella seduta dell'8 giugno 1949 . 768
Errata corrige . . . 768
Indice per Autori . . . 771
Indice per materie . . . 776
Indici dei fascicoli . . . 781